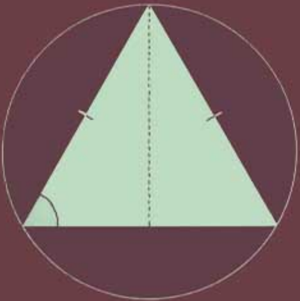
PROBLEMAS de ANÁLISIS MATEMÁTICO

Límite · Continuidad · Derivabilidad

L. D. Kudriávtsev, A. D. Kutásov,
V. I. Chejlov, M. I. Shabunin



Editorial Mir Moscú

Problemas de análisis matemático

Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов,
В. И. Чехлов, М. И. Шабунин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Предел
Непрерывность
Дифференцируемость

Под редакцией Л. Д. Кудрявцева

Издательство «Наука»

L. D. Kudriávtsev, A. D. Kutásov,
V. I. Chejlov, M. I. Shabunin

PROBLEMAS de ANÁLISIS MATEMÁTICO

Límite
Continuidad
Derivabilidad

Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por
el ingeniero Antonio Elías Ballesteros

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000664-8

© Издательство «Наука», 1984
© traducción al español, editorial Mir, 1989

INDICE

Prólogo

Capítulo I. Introducción 6
§ 1. Conjuntos. Combinatoria 7
§ 2. Elementos de lógica. Método de inducción matemática 7
§ 3. Números reales 24
§ 4. Progresiones. Adición. Binomio de Newton. Desigualdades numéricas 58
§ 5. Números complejos 76
§ 6. Polinomios. Ecuaciones algebraicas. Fracciones racionales 94
§ 7. Funciones numéricas. Sucesiones 114

Capítulo II. Límite y continuidad de las funciones 193
§ 8. Límite de una sucesión 193
§ 9. Límite de una función 247
§ 10. Continuidad de una función 279
§ 11. Asíntotas y gráficos de las funciones 309
§ 12. Continuidad uniforme de una función 335

Capítulo III. Derivada y diferencial 346
§ 13. Derivada. Fórmulas y reglas para calcular las derivadas. Diferencial de una función 346
§ 14. Sentido geométrico y físico de la derivada 371
§ 15. Derivadas y diferenciales de órdenes superiores 381

Capítulo IV. Aplicación de las derivadas para investigar las funciones 395
§ 16. Teoremas del valor medio para las funciones derivables 395
§ 17. Regla de L'Hospital 401
§ 18. Fórmula de Taylor 408
§ 19. Cálculo de los límites con ayuda de la fórmula de Taylor 429
§ 20. Investigación de funciones 450
§ 21. Trazado de gráficos 475
§ 22. Problemas para hallar los valores máximo y mínimo absolutos 494
§ 23. Resolución numérica de ecuaciones 500
§ 24. Función vectorial. Curvas 523

Soluciones 564

PROLOGO

El manual «Problemas de análisis matemático» que ofrecemos consta de cuatro capítulos.

El primero contiene material cuya asimilación tiene el objetivo de preparar al lector para resolver problemas de análisis matemático. En el segundo capítulo se dan problemas referentes a tales conceptos como el límite y la continuidad de las funciones. En los capítulos tercero y cuarto se han reunido problemas relacionados a las nociones de derivada y diferencial y al empleo de las derivadas para investigar funciones.

Al confeccionar el manual los autores se basaron en la experiencia de muchos años acumulada en la enseñanza del Curso de análisis matemático en el Instituto Fisicotécnico de Moscú, IFTM. El manual contiene gran cantidad de problemas originales creados por los profesores de la cátedra de matemática superior del IFTM y empleados al trabajar con los estudiantes. Parte considerable de los problemas del manual ha sido preparada por los autores. En el manual se han incluido problemas tomados de publicaciones ampliamente conocidas, en particular del manual de problemas de análisis matemático de B. P. Demidovich y del manual de problemas de matemática superior de N. M. Günter y P. O. Kuzmin.

Cada apartado del manual contiene material teórico de resolución de problemas típicos y problemas para el trabajo individual. Los problemas de cada apartado están agrupados por temas y cada grupo de ellos está dispuesto en orden de creciente complejidad: de los más sencillos a los de suficiente complejidad.

En el manual se presta gran atención a los problemas que favorecen a la asimilación de las nociones fundamentales del análisis matemático. El gran conjunto de problemas que ilustran uno u otro tema ofrece al profesor la posibilidad de utilizar el manual para operar en el aula, para tareas individuales y al componer los trabajos de control.

En lo fundamental el manual está destinado a los centros de enseñanza superior con programa ampliado de matemáticas. La presencia de una gran cantidad de problemas de diversa complejidad proporciona la posibilidad de utilizar el manual tanto en las universidades como en los centros de enseñanza técnica.

Los autores expresan su agradecimiento al colectivo de la cátedra de matemática superior del IFTM, cuya labor fructífera de muchos años ha contribuido en alto grado a la aparición de este manual.

Capítulo I
INTRODUCCIÓN

§ 1. Conjuntos. Combinatoria

1. Conjuntos. El conjunto y sus elementos es la noción primaria de matemática. Los conjuntos se designan con mayúsculas de cualquier alfabeto, por regla latino; los elementos del conjunto se designan con minúsculas. Para algunos de los conjuntos más importantes se usan designaciones estándares. P. ej., con las letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ se designan los *conjuntos de números naturales, enteros, racionales, reales y complejos*, respectivamente.

Si el objeto a es un elemento del conjunto A, escribimos $a \in A$ o bien $A \ni a$. Esto se lee así: «a pertenece al conjunto A» o bien «el conjunto A contiene el elemento a». La anotación $a \notin A$ significa que el objeto a no es elemento del conjunto A. P. ej.,

$$1 \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \pi \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}.$$

Si cada elemento del conjunto A es elemento del conjunto B, se escribe $A \subset B$ o bien $B \supset A$ y se dice que el conjunto A es el *subconjunto del conjunto* B. Aquí, también se suele decir que A se contiene en B o que B contiene A. De la definición de subconjunto se deduce que $A \subset A$, o sea, cada conjunto es su subconjunto. Asimismo se desprende de la definición que si $A \subset B$ y $B \subset C$, $A \subset C$. Ejemplos de inclusiones:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Si existe un elemento $a \in A$ tal que $a \notin B$, el conjunto A no es subconjunto del conjunto B. En este caso se escribe $A \not\subset B$ o bien $B \not\supset A$.

Reciben el nombre de iguales los conjuntos que constan de unos mismos elementos. Si los conjuntos A y B son iguales, se escribe $A = B$; en caso contrario, $A \neq B$.

Los conjuntos A y B son iguales si y sólo si son ciertas las inclusiones $A \subset B$ y $B \subset A$.

Para separar el subconjunto M del conjunto U se hace con frecuencia uso de cierta propiedad p, propia del conjunto M y sólo de él, es decir, la propiedad característica de los elementos del conjunto M. En tal caso se escribe

$$M = \{x \in U \mid p\},$$

lo que quiere decir que el conjunto M consta de aquellos y sólo de aquellos elementos del conjunto U que poseen la propiedad p*).

P. ej., la anotación

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

significa que $\mathbb{R}_+$ es un conjunto de números reales positivos.

Puede resultar que la propiedad p no es propia de ninguno de los elementos del conjunto U. Entonces, el subconjunto $\{x \in U \mid p\}$ no contiene elementos del conjunto U y lleva el nombre de *subconjunto vacío*.

$$\text{P. ej.,}\ \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2 = 1\},\quad \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq x\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\},$$

son subconjuntos vacíos de conjuntos de números naturales, racionales y reales, respectivamente. El subconjunto vacío se designa con el signo especial $\varnothing$ y se considera subconjunto de todo conjunto.

Si $M \subset U$ y $M \neq \varnothing$, $M \neq U$, el conjunto M se denomina subconjunto *propio* del conjunto U. Los subconjuntos $\varnothing$ y U del conjunto U reciben el nombre de *impropio*.

Ejemplo 1. Indiquen todos los subconjuntos del conjunto de tres elementos $\{a, b, c\}$.

△ El conjunto de tres elementos tiene los subconjuntos impropios $\varnothing$ y $\{a, b, c\}$ y seis subconjuntos propios: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Un total de ocho subconjuntos. ▲

2. Operaciones con conjuntos. Sean A y B conjuntos tomados al azar.

El conjunto que consta de todos aquellos y sólo de aquellos elementos pertenecientes por lo menos a uno de los conjuntos A y B lleva el nombre de *unión de los conjuntos* A y B y se designa con $A \cup B$.

El conjunto que consta de todos aquellos y sólo de aquellos elementos pertenecientes tanto al conjunto A como al B lleva el nombre de *intersección de los conjuntos* A y B y se designa con $A \cap B$.

$$\text{P. ej., si}\ A = \{1, 2, 3\},\quad B = \{2, 3, 4, 5\},$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\},\quad A \cap B = \{2, 3\}.$$

Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, entonces

$$A \cup B = \mathbb{R},\quad A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}.$$

Si $A \cap B = \varnothing$, se suele decir que los conjuntos A y B son disjuntos.

---

*) Si sólo se consideran los subconjuntos de cierto conjunto fundamental U, la indicación $x \in U$ con frecuencia se omite y se escribe $M = \{x \mid p\}$.

Las operaciones de unión e intersección poseen las siguientes propiedades:

1) conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

2) asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

3) distributividad

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

4) idempotentividad

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Si $a \in A$ y $b \in B$, el par de elementos a y b, anotado en la forma $(a;\ b)$, recibe el nombre de *par ordenado*, con la particularidad de que se considera que los pares $(a_1;\ b_1)$ y $(a_2;\ b_2)$ son iguales cuando y sólo cuando $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

El conjunto, cuyos elementos son todos pares ordenados $(a;\ b)$, $a \in A$, $b \in B$, se denomina *producto directo* o *cartesiano de los conjuntos* A y B y se designa con $A \times B$.

P. ej., si $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, entonces

$$A \times B = \{(1;\ 2), (1;\ 3), (2;\ 2), (2;\ 3)\},$$
$$B \times A = \{(2;\ 1), (2;\ 2), (3;\ 1), (3;\ 2)\}.$$

El producto directo no se supedita a la ley conmutativa. La igualdad $A \times B = B \times A$ sólo es justa cuando $A = B$. El producto $A \times A$ se llama *cuadrado cartesiano* y se designa con A^2. P. ej., el cuadrado cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el conjunto $(x;\ y)$ de todas las coordenadas cartesianas de los puntos de un plano.

El conjunto que consta de todos los elementos del conjunto A, no pertenecientes al conjunto B, recibe el nombre de *diferencia de los conjuntos* A y B y se denomina con $A \setminus B$.

P. ej., si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$,

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4, 5\}.$$

Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$,

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}, \quad B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}.$$

Si $A \subset B$, la diferencia $B \setminus A$ recibe el nombre de *complemento del conjunto A hasta el conjunto B* y se designa con A'_B.

En aquellos casos cuando sólo se consideran los subconjuntos de cierto conjunto fundamental U, el complemento del conjunto M

hasta el conjunto U se denomina simplemente complemento M y, en lugar de M'_U se escribe M'.

De la definición de complemento de un conjunto se desprenden en directo las igualdades

$$M \cup M' = U, \quad M \cap M' = \varnothing, \quad (M')' = M.$$

Para cualesquiera subconjuntos A y B del conjunto U son asimismo válidas las siguientes igualdades que llevan el nombre de *leyes de dualidad de Morgan*:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

es decir, el complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos, en tanto que la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de sus complementos.

Ejemplo 2. Demuestren la ley de dualidad:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

△ Sea $x \in (A \cap B)'$, entonces $x \notin A \cap B$ y, por lo tanto, $x \notin A$, o bien, $x \notin B$, o sea, $x \in A'$, o bien, $x \in B'$, pero esto significa que $x \in A' \cup B'$. Así, pues, queda demostrada la inclusión

$$(A \cap B)' \subset A' \cup B'.$$

Sea $x \in A' \cup B'$, entonces $x \in A'$, o bien, $x \in B'$ y, por consiguiente, $x \notin A$, o bien $x \notin B$, es decir, $x \notin A \cap B$, lo que quiere decir que $x \in (A \cap B)'$. De modo que está demostrada la inclusión

$$A' \cup B' \subset (A \cap B)'.$$

De las inclusiones $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ y $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ se desprende que los conjuntos $(A \cap B)'$ y $A' \cup B'$ constan de los mismos elementos, o sea, son iguales.▲

3. Conjuntos equivalentes y no equivalentes. Decimos que entre los conjuntos A y B se ha establecido *correspondencia biunívoca* si a cada elemento del conjunto A se le contrapone uno, y sólo un elemento del conjunto B, de forma que a diversos elementos del conjunto A se les contraponen diversos elementos del conjunto B y cada elemento del conjunto B resulta contrapuesto a cierto elemento del conjunto A.

P. ej., entre el conjunto de todos los números naturales pares y el conjunto $\mathbb{N}$ es posible establecer correspondencia biunívoca:

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, \ldots \end{array}$$

Los conjuntos entre los que se puede establecer correspondencia biunívoca reciben el nombre de *equivalentes*. Si los conjuntos A y B son equivalentes, se escribe $A \sim B$; si ellos no son equivalentes, escribimos $A \not\sim B$.

La relación de equivalencia entre conjuntos posee las propiedades de:

1) reflexibilidad $A \sim A$;
2) simetría: si $A \sim B$, $B \sim A$;
3) transitividad: si $A \sim B$ y $B \sim C$, $A \sim C$.

Si $A \sim B$ se dice que los conjuntos A y B tienen igual potencia.

Si $A \not\sim B$, pero $A \sim B_1 \subset B$, se dice que el conjunto A tiene menor potencia que el B.

El conjunto $A \neq \varnothing$ se denomina *finito* si existe tal número $n \in \mathbb{N}$ que

$$A \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

En semejante caso suele decirse que el conjunto A contiene n elementos o que él tiene la potencia n.

El conjunto vacío $\varnothing$ también se considera finito, su potencia se toma igual a cero.

El conjunto que no es finito se considera *infinito*.

El conjunto A recibe el nombre de *numerable* si $A \sim \mathbb{N}$. Decimos que el conjunto numerable tiene potencia numerable. Si el conjunto es finito o numerable lo denominan no más que numerable.

Recibe el nombre de *innumerable* un conjunto si él tiene potencia mayor que la del conjunto $\mathbb{N}$.

Teoremas de Cantor:

1. *El conjunto de todos los números racionales es numerable.*
2. *El conjunto de todos los números reales es innumerable.*

El conjunto A lleva el nombre de conjunto *de potencia del continuo* si $A \sim \mathbb{R}$.

Sea dado el conjunto $S = \{s\}$, llamado conjunto de índices y a cada índice s se le contrapone el conjunto A_s. El conjunto $\{A_s\}$, cuyos elementos son los conjuntos A_s, $s \in S$, se denomina *sistema o familia de conjuntos*. Las nociones de unión o intersección de dos conjuntos se extienden al caso de un sistema arbitrario finito o infinito de conjuntos de la forma siguiente.

Lleva el nombre de *unión* de un sistema de conjuntos A_s, $s \in S$ el conjunto de todos los elementos pertenecientes por lo menos a uno de los conjuntos del sistema.

Lleva el nombre de *intersección* del sistema de conjuntos A_s, $s \in S$ el conjunto de todos los elementos contenidos en cada conjunto del sistema.

La unión e intersección del sistema de conjuntos A_s, $s \in S$ se designan

$$\bigcup_{s \in S} A_s \quad \text{y} \quad \bigcap_{s \in S} A_s.$$

En casos particulares cuando el sistema de conjuntos es finito o numerable, se escribe

$$\bigcup_{s=1}^{n} A_s, \ \bigcap_{s=1}^{n} A_s, \ n \in \mathbb{N}, \text{ o bien, } \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s, \ \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s.$$

Resuelvan los problemas **1.1—1.8** en los que A, B, C, D son conjuntos tomados al azar.

1.1. Se dan los conjuntos A, B, C. Con ayuda de las operaciones de unión e intersección escriban un conjunto que conste de los elementos pertenecientes: 1) a los tres conjuntos; 2) por lo menos a un conjunto; 3) por lo menos a dos de dichos conjuntos.

1.2. Demuestren que las igualdades: 1) $A \cup B = B$, 2) $A \cap B = A$ son ciertas cuando y sólo cuando $A \subset B$.

1.3. Demuestren que la igualdad $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ es cierta cuando y sólo cuando $A \supset C$.

1.4. Demuestren las igualdades:

1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
2. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
4. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

1.5. Demuestren que la inclusión $A \setminus B \subset C$ es cierta cuando y sólo cuando $A \subset B \cup C$.

1.6. Demuestren las inclusiones:

1) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$.
2) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

1.7. Determinen en qué razón ($X \subset Y$, $X \supset Y$, $X = Y$) se encuentran los conjuntos X e Y si:

1) $X = A \cup (B \setminus C)$, $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.
2) $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
3) $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
4) $X = (A \times B) \cup (C \times B)$, $Y = (A \cup C) \times B$.
5) $X = (A \times B) \cup (C \times D)$, $Y = (A \times C) \cup (B \times D)$.

1.8. Demuestren que si $A \subset C$, $B \subset D$,

$$A \times B = (A \times D) \cap (B \times C).$$

1.9. Sean $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leqslant 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$. ¿De qué elementos constan los conjuntos:

1) $B \cup C$; 2) $A \cap B \cap C$; 3) $A \cup B \cup C$;
4) $(A \cap B) \cup (B \cup C)$; 5) $B \times C$; 6) $C \times B$?

1.10. Los conjuntos A y B están compuestos, respectivamente, de los elementos $a = 4n + 2$, $b = 3n$, $n \in \mathbb{N}$. Hallen $A \cap B$.

1.11. Supongamos que el conjunto A contiene n elementos, el conjunto B, m elementos y la intersección $A \cap B$, k elementos. Hallen el número de elementos de los conjuntos: 1) $A \cup B$, 2) $A \times B$.

1.12. Sea que $A \subset \mathbb{N}$ y cada elemento de A es un número múltiplo bien a 2, o bien a 3, o bien a 5. Hallen el número de elementos del conjunto A si entre ellos tenemos: 70 números múltiplos a 2; 60 números múltiplos a 3; 80 números múltiplos a 5; 32 números múltiplos a 6; 35 números múltiplos a 10; 38 números múltiplos a 15; 20 números múltiplos a 30.

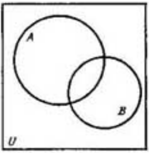


Fig. 1

1.13. Los conjuntos A y B son subconjuntos del conjunto U (fig. 1). Sombreen en el dibujo los siguientes conjuntos:

1) $A \cup B'$; 2) $A' \cap B$; 3) $(A \cup B)'$; 4) $(A \cup B')'$;
5) $(A \cap B)'$; 6) $(A' \cap B) \cup (A \cap B')$.

1.14. Sean A y B subconjuntos tomados al azar del conjunto U. Demuestren las igualdades:

1) $(A \setminus B)' = A' \cup B$.
2) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$.
3) $(A \cup B) \cap (A' \cup B') = A \cup B$.

1.15. Sea $A \subset U$, $B \subset U$. Hallen el conjunto $X \subset U$ que satisfaga la ecuación

$$(X \cup A)' \cup (X \cup A') = B.$$

1.16. Hallen los subconjuntos A y B del conjunto U si se sabe que para todo conjunto $X \subset U$ es cierta la igualdad

$$X \cap A = X \cup B.$$

1.17. Sea $A_s \subset U$, $s \in S$. Demuestren que:

1) $\left(\bigcup_{s \in S} A_s\right)' = \bigcap_{s \in S} A_s'$; 2) $\left(\bigcap_{s \in S} A_s\right)' = \bigcup_{s \in S} A_s'$.

1.18. Está dado un sistema de conjuntos arbitrarios A_s, $s \in \mathbb{N}$.

1) Sea $B_n = \bigcup_{s=1}^{n} A_s$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s.$$

2) Sea $B_n = \bigcap_{s=1}^{n} A_s$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s.$$

1.19. Sea A_{sp}, $s \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ un sistema de conjuntos tomados al azar. Establezcan si son ciertas las inclusiones:

1) $\bigcup_{s=1}^{\infty}\left(\bigcap_{p=1}^{\infty} A_{sp}\right) \subset \bigcap_{p=1}^{\infty}\left(\bigcap_{s=1}^{\infty} A_{sp}\right)$.

2) $\bigcup_{s=1}^{\infty}\left(\bigcap_{p=1}^{\infty} A_{sp}\right) \supset \bigcap_{p=1}^{\infty}\left(\bigcup_{s=1}^{\infty} A_{sp}\right)$.

1.20. Establezcan la correspondencia biunívoca entre los conjuntos A y B:

1) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$.

2) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k^2,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \mathbb{N}$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b,\ b > a\}$.

4) $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$.

1.21. Establezcan la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos del intervalo $(0;\ 1)$ y el conjunto de todos los puntos del segmento $[0;\ 1]$.

1.22. Demuestren la equipotencia de los siguientes conjuntos:

1) del cuadrado $\{(x;\ y) \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$ y del círculo $\{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

2) del círculo abierto $\{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ y de todo el plano $(x;\ y)$;

3) del círculo abierto $\{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ y el círculo cerrado $\{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

1.23. Demuestren que un conjunto es infinito cuando y sólo cuando él es equivalente a cierto subconjunto suyo.

1.24. Demuestren que si el conjunto A es infinito y el conjunto B numerable, $(A \cup B) \sim A$.

1.25. Demuestren que si $A \setminus B \sim B \setminus A$, $A \sim B$.

1.26. Demuestren que si $A \subset B \subset C$ y $A \sim C$, $A \sim B$.

1.27. Demuestren que si A y B son conjuntos numerables, el conjunto $A \times B$ es numerable.

1.28. Demuestren que la unión de un sistema no más que numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

1.29. Demuestren la numerabilidad de los siguientes conjuntos:

1) el conjunto de todos los números de la forma 2^k, $k \in \mathbb{N}$;

2) el conjunto de todos los triángulos en el plano, cuyos vértices tienen coordenadas racionales;

3) el conjunto de todos los puntos de un plano con coordenadas racionales;

4) el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales;

5) el conjunto de todos los números algebraicos (un número se denomina algebraico si es la raíz de un polinomio con coeficientes enteros);

6) el conjunto de todos los subconjuntos finitos de un conjunto numerable.

1.30. Demuestren que si la distancia entre cualesquiera dos puntos de un conjunto de puntos en una recta es mayor que la unidad, dicho conjunto no es más que numerable.

1.31 Demuestren que los siguientes conjuntos tienen la potencia de continuo:

1) el conjunto de todos los puntos de un intervalo no vacío $(a; b)$;

2) el conjunto de todas las sucesiones compuestas con las cifras 0 y 1;

3) el conjunto de todas las sucesiones de números reales;

4) el conjunto de todos los puntos de un cuadrado;

5) el conjunto de todos los puntos de un círculo;

6) el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto numerable;

7) el conjunto de todos los subconjuntos numerables del conjunto de potencia de continuo.

1.32. En el plano se ha construido un conjunto de: 1) circunferencias, 2) figuras en forma de T, 3) figuras que tienen la forma de Γ, intersecantes todas a pares. ¿Puede ser este conjunto innumerable?

1.33. Hallen la potencia del conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto finito que contiene n elementos.

1.34. Demuestren que para cada conjunto, el conjunto de todos sus subconjuntos tiene una potencia mayor que la del conjunto inicial.

1.35. Sea A un conjunto no numerable, y B, no más que numerable. Demuestren que los conjuntos $A \cup B$ y $A \setminus B$ tienen la potencia del conjunto A.

---

4. Conjuntos ordenados. Un conjunto recibe el nombre de *ordenado* si para cualesquiera dos de sus elementos a y b se ha establecido una relación del orden $a \leqslant b$, o bien $b \leqslant a$ (a no supera b, o bien, b no supera a) que posee las propiedades:

1) reflexibilidad: $a \leqslant a$, es decir, todo elemento no se supera a sí mismo;

2) antisimetría: si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, los elementos a y b coinciden;

3) transitividad: si $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$.

Se considera que un conjunto vacío es ordenado. Un conjunto se puede ordenar con distintos procedimientos. P. ej., en el conjunto de estudiantes de un grupo la relación de orden ($\leqslant$) puede establecerse con los dos siguientes procedimientos: el estudiante a no supera al estudiante b, o sea, $a \leqslant b$ si: 1) la estatura de estudiante a es menor que la del estudiante b, 2) el apellido del estudiante a en el diario del grupo está bajo un número mayor que la del estudiante b.

Estableciendo con diferentes procedimientos la relación de orden en un mismo conjunto, obtenemos diferentes conjuntos ordenados.

Los elementos de conjuntos finitos ordenados se escribe, por regla, entre paréntesis ordinarios, disponiendo el elemento a a la izquierda del elemento b, si $a \leqslant b$. P. ej., la anotación $A = (3, 2, 1)$, $B = (2, 3, 1)$ significa que A y B son diferentes conjuntos ordenados, a diferencia de la anotación $A = \{3, 2, 1\}$, $B = \{2, 3, 1\}$ de la que se desprende que $A = B$.

P. ej., el conjunto que contiene tres elementos a, b y c tiene 3 subconjuntos de dos elementos:

$$\{a, b\}, \quad \{a, c\}, \quad \{b, c\}$$

y 6 subconjuntos de dos elementos ordenados:

$$(a, b), \quad (b, a), \quad (a, c), \quad (c, a), \quad (b, c), \quad (c, b).$$

5. Arreglos y permutaciones. Supongamos que tenemos un conjunto que contiene n elementos. Cada uno de sus subconjuntos ordenados, constituidos por k elementos, se denomina *arreglo* de n elementos por k elementos.

El número de todos los arreglos de n elementos por k elementos se denomina A_n^k (se lee: «número de arreglos de n por k» o bien «A de n por k»). (A de la palabra francesa *arrangement*.)

El número de arreglos se halla con la fórmula

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), \quad k > 0, \tag{1}$$

es decir, el número de arreglos de n elementos por k elementos es igual al producto de k números naturales sucesivos de n hasta $n - k + 1$, incluido.

El producto de todos los números naturales de 1 a n se designa con el símbolo $n!$ (se lee «n factorial»), es decir,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n.$$

Haciendo uso de esta designación, podemos escribir la fórmula (1) en la forma

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{2}$$

con la particularidad de que si convenimos considerar que $0! = 1$, la fórmula (2) proporciona resultado correcto incluso en los casos cuando $k = 0$ y $k = n$.

El arreglo de n elementos recibe el nombre de *permutación* de n elementos.

Las permutaciones son un caso particular de los arreglos. Como cada permutación contiene todos los n elementos del conjunto, diversas permutaciones se distinguen entre sí sólo por el orden de los

elementos. El número de permutaciones de n elementos se designa con P_n. (P de la palabra francesa *permutation*.)

Como $P_n = A_n^n$, para el número de permutaciones es válida la fórmula

$$P_n = n!. \qquad (3)$$

De la fórmula (3) se deduce que el conjunto que contiene n elementos se puede ordenar con ayuda de $n!$ procedimientos.

Ejemplo 3. Un grupo de estudiantes estudia 7 asignaturas. ¿Con cuántos procedimientos es posible componer el horario de las clases para el lunes si para ese día se planifican clases dedicadas a 4 asignaturas?

△ Sin duda, hay tantos procedimientos diferentes para confeccionar el horario como cuantos subconjuntos ordenados de cuatro elementos existen en un conjunto de siete elementos. Por lo tanto, el número de procedimientos es igual al número de arreglos de 7 elementos por 4 elementos, es decir, es igual a A_7^4. Con la fórmula (1), haciendo en ella $n = 7$, $k = 4$, hallamos

$$A_7^4 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840. \ ▲$$

Ejemplo 4. ¿Cuántos números de seis cifras, múltiplos a cinco, pueden ser compuestos de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 a condición de que las cifras no se repitan en el número?

△ Con el fin de que el número compuesto de las cifras prefijadas se divida entre 5 es necesario y suficiente que la cifra 5 se encuentre en el último puesto. Las demás cinco cifras pueden encontrarse en los restantes cinco puestos en cualquier orden. Por consiguiente, la cantidad buscada de números de seis cifras, múltiplos a cinco, es igual a la cantidad de permutaciones de los cinco elementos, es decir, $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$. ▲

Ejemplo 5. ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden formar con las letras de la palabra «zadacha» (vocablo ruso que significa «problema»)?

△ Formar cierta permutación de las letras de la palabra «zadacha» quiere decir que en seis puestos numerados hay que poner de algún modo una letra «z», una"letra"«d», una"letra"«ch» y tres letras «a». Si las letras «z», «d» y «ch» se han colocado de algún modo, el resto de los puestos se rellenarán con la letra «a». ¿Pero con cuántos procedimientos es posible poner tres letras diferentes en seis puestos? Es evidente que el número de procedimientos es igual al número de subconjuntos ordenados de tres elementos del conjunto de seis elementos, es decir, es igual a $A_6^3 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$.

Podemos razonar de otro modo. Si las seis letras de la palabra fueran diferentes, el número de permutaciones sería igual a $6!$. Pero con la letra «a» tropezamos en dicho vocablo tres veces y las permutaciones de sólo estas tres «a» no ofrecen nuevos procedimientos

de disposición de las letras. Por ello, el número de permutaciones de las letras de la palabra «zadacha» no será 6!, sino que 3! veces menor, es decir,

$$\frac{6!}{3!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}=6\cdot5\cdot4=120. \ \blacktriangle$$

6. **Combinaciones.** Sea que tenemos un conjunto constituido por n elementos. Cada uno de sus subconjuntos, con k elementos, lleva el nombre de *combinación* de n elementos por k elementos.

El número de todas las combinaciones de n elementos por k elementos se designa con el símbolo C_n^k (se lee: «número de combinaciones de n por k», o bien, «c de n por k»).

El número de combinaciones se determina con la fórmula

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \tag{4}$$

o bien con la fórmula

$$C_n^k=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!}. \tag{5}$$

Son válidas las siguientes igualdades

$$C_n^k=C_n^{n-k}. \tag{6}$$

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k,\quad k<n. \tag{7}$$

Haciendo uso de la igualdad (6) es posible simplicar el cálculo de los números C_n^k en aquellos casos cuando $k>n/2$, p. ej.,

$$C_{15}^{12}=C_{15}^{3}=\frac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2}=455.$$

Ejemplo 6. ¿Cuántas comisiones de exámenes, compuestas de 5 miembros, se pueden formar de 10 profesores?

△ Es evidente que son tantos como cuantos haya subconjuntos de cinco elementos en un conjunto de diez elementos, es decir, el número de comisiones será igual a C_{10}^5. Con la fórmula (4), haciendo en ella $n=10$, $k=5$, hallemos

$$C_{10}^5=\frac{10!}{5!5!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot3\cdot4\cdot5}=252. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 7. En el campeonato nacional de fútbol (primera liga) toman parte 18 equipos, con la particularidad de que cada dos equipos compiten entre sí dos veces. ¿Cuántos partidos se juegan en el transcurso de la temporada?

△ En la primera etapa tendrán lugar tantos partidos cuantos subconjuntos haya de dos elementos en un conjunto de 18 elementos, es decir, su cantidad será igual a C_{18}^2. Con la fórmula (5), hallamos

$$C_{18}^2=\frac{18\cdot 17}{2}=153.$$

En la segunda etapa se juega igual cantidad de partidos, por lo que en el transcurso de la temporada tendrán lugar 306 encuentros. ▲

Ejemplo 8. ¿Con cuántos procedimientos $2n$ elementos pueden dividirse a pares?

Podemos obtener respuesta a esta pregunta empleando la fórmula para el número de combinaciones y el número de permutaciones. Aduzcamos otra solución.

△ Designemos el número de particiones a pares de $2n$ elementos con R_{2n}.

Elijamos cualquier elemento. Con su participación se puede formar un par con $2n-1$ procedimientos. Cada vez, después de la formación de un par, quedarán $2n-2$ elementos que pueden ser divididos en pares con R_{2n-2} procedimientos. Por esta razón, $R_{2n} = (2n-1)R_{2n-2}$. Haciendo uso de esta fórmula recurrente, obtenemos $R_{2n} = (2n-1)R_{2n-2} = (2n-1)\cdot(2n-3)R_{2n-4} = \ldots = (2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot R_2 = (2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1$.

El producto de todos los números naturales que no superan n y que tienen la misma paridad que n, con frecuencia se designa con $n!!$ (se lee: «n doble factorial»).

Así, pues, $2n$ elementos se puede dividir a pares con $(2n-1)!!$ procedimientos. ▲

7. Sucesos aleatorios y su probabilidad. Examinemos el experimento que consiste en lanzar una moneda. Este experimento tiene dos resultados: o la moneda cae de forma que arriba estará la cara, o bien cae con ésta hacia abajo. Uno u otro resultado del experimento depende de múltiples causas que no es posible tomar en consideración y, por ello, es imposible predecir el resultado del experimento. El suceso que consiste en que «cayó la cara» es un ejemplo de suceso aleatorio. Como ejemplo de otros sucesos aleatorios se pueden aducir: «la aparición de la unidad» al jugar a los dados (cubos de material homogéneo con caras numeradas con cifras desde la unidad hasta seis), fallo de una bombilla eléctrica antes de determinado plazo, falta de correspondencia con la norma elegida para verificar un artículo. En todos estos casos es imposible predecir de antemano, hasta finalizar el experimento, si tendrá lugar o no el respectivo suceso. Por ello, semejantes sucesos llevan el nombre de aleatorios.

En el experimento con el lanzamiento de la moneda ambos resultados son equivalentes, antes de lanzar la moneda no hay fundamento alguno para dar preferencia a uno de los resultados. En semejantes casos se dice que los dos resultados son equiprobables,

en tanto que la probabilidad de cada uno de ellos es igual a 1/2. Al lanzar el dado hay seis resultados. Si el dado es homogéneo y simétrico, todos los resultados del experimento son igualmente posibles o bien equiprobables. La probabilidad de cada resultado es igual a 1/6.

La generalización de estos sencillos experimentos será un experimento en el que son posibles n resultados equiprobables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, llamados asimismo sucesos elementales. En tal caso, la probabilidad de cada uno de los resultados se toma igual a $1/n$. Esto se escribe del modo siguiente:

$$P(u_1) = 1/n, \quad P(u_2) = 1/n, \ \ldots, \quad P(u_n) = 1/n.$$

La primera de estas fórmulas se lee: «la probabilidad del suceso u_1 es igual a $1/n$».

Ahora, estudiemos un experimento con n resultados equiprobables y cierto suceso A que se produce cuando el experimento termina con ciertos k resultados y no tiene lugar en el caso si se obtiene uno de los restantes $n - k$ resultados. Vamos a decir que los resultados que conducen al suceso A le favorecen. *La probabilidad del suceso A relacionado con un experimento con n resultados equiprobables se denomina la razón entre el número de resultados que favorecen al suceso A y el número de todos los resultados*, es decir,

$$P(A) = k/n, \tag{8}$$

donde k es el número de resultados favorecientes al suceso A. La probabilidad de cualquier suceso A satisface las desigualdades

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,$$

lo que en directo se desprende de la fórmula (8), ya que es evidente que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Ejemplo 9. El experimento consiste en que se lanzan dos monedas: de cobre y de plata. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos en una moneda aparezca la cara?

△ Se considera que los resultados equiprobables del experimento son los siguientes:

u_1 — la cara aparece en ambas monedas,
u_2 — la cara aparece sólo en la moneda de cobre,
u_3 — la cara aparece sólo en la moneda de plata,
u_4 — la cara no aparece en ninguna de las monedas.

Los resultados u_1, u_2, u_3 (aparición de la cara por lo menos en una moneda) favorecen al acontecimiento A. Haciendo en la fórmula (8) $n = 4$, $k = 3$, obtenemos $P(A) = 3/4$. ▲

Ejemplo 10. Al marcar un número en el teléfono el abonado se olvidó de las dos últimas cifras y sólo recordando que éstas eran diferentes, las marcó a la ventura. ¿Cuál es la probabilidad de que el número se ha marcado correctamente?

△ Las dos últimas cifras se pueden marcar con un número de procedimientos igual al número de subconjuntos ordenados de dos elementos en un conjunto de diez elementos (el de todas las cifras). Este número de procedimientos es igual a A_{10}^2. Por lo tanto, existe un total de A_{10}^2 resultados. Sólo un resultado (las cifras se han marcado correctamente) favorece al suceso A. Por ello, $P(A) = 1/A_{10}^2 = 1/(10 \cdot 9) = 1/90$. ▲

Ejemplo 11. Entre 100 bombillas eléctricas 5 están deterioradas. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar 3 bombillas éstas estén en buen estado?

△ En un conjunto de 100 elementos hay C_{100}^3 subconjuntos de tres elementos. Por ello, 3 bombillas de 100 pueden elegirse mediante C_{100}^3 procedimientos. Las bombillas se eligen a la ventura. Esto significa que todos los procedimientos para la elección (todos los resultados) son equiprobables. El número de resultados exitosos, es decir, las tres bombillas están en buen estado, se calcula de forma análoga. De 95 bombillas en buen estado 3 se pueden elegir con C_{95}^3 procedimientos, ya que tantos son los subconjuntos de tres elementos existentes en el conjunto de 95 elementos. Haciendo en la fórmula (8) $n = C_{100}^3$, $k = C_{95}^3$, obtenemos

$$P(A) = C_{95}^3/C_{100}^3 = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}856. \quad ▲$$

1.36. Calculen:

1) $\frac{A_{20}^4}{A_{20}^6 + A_{20}^5}$. 2) $\frac{A_{10}^7}{6!\,(C_7^5 + C_7^4)}$.

3) $\frac{P_{n+1}}{(n-k)!\,A_{n-1}^{k-1}}$, $k \leqslant n$. 4) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

1.37. Hallen n, si:

1) $\frac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240 A_{n+3}^{k+3}$. 2) $C_{n+3}^{n} - C_{n+2}^{n-1} = 15(n+1)$.

3) $C_{10}^n > 2C_{10}^{n+1}$. 4) $4(n-2)!\,A_{n+2}^5 < 143 \cdot n!$

1.38. En un grupo hay 30 estudiantes. ¿Con cuántos procedimientos se pueden separar dos personas para hacer guardia si: 1) una de ellas ha de ser el jefe; 2) no debe haber jefe?

1.39. Para cinco funcionarios hay tres plazas en una casa de reposo. ¿Con cuántos procedimientos se pueden distribuir si: 1) todas las plazas son diferentes; 2) todas ellas son iguales?

1.40. ¿Con cuántos procedimientos se pueden disponer en una fila 5 bolas blancas y 4 negras de modo que las negras no estén juntas? Consideremos dos casos: 1) las bolas de un mismo color no se distinguen entre sí; 2) todas las bolas son diferentes.

1.41. ¿Cuántas diagonales tiene un n — ágono convexo?

1.42. Ningunas tres diagonales de un decágono convexo se cortan en un punto. Determinen el número de puntos de intersección de las diagonales.

1.43. En la primera de las dos rectas paralelas yacen 15 puntos, en la segunda, 21. ¿Cuántos triángulos existen con los vértices en dichos puntos?

1.44. ¿Con cuántos procedimientos se pueden colocar en la tabla de ajedrez 8 torres de un mismo color de modo que no se batan entre sí y que se encuentren sólo en los escaques negros?

1.45. Con las cifras 0, 1, 2, 3 se han compuesto los más variados números de cuatro cifras de modo que en cada número no hay cifras iguales. ¿Cuántos números se han obtenido? ¿Cuántos números pares hay entre ellos?

1.46. ¿Cuántos números diferentes de diez cifras se pueden escribir empleando las cifras 1 y 2?

1.47. ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden formar de las letras de las siguientes palabras: 1) cebra, 2) pañal, 3) caracal, 4) abracadabra?

1.48. ¿Con cuántos procedimientos se pueden distribuir 28 fichas de dominó entre cuatro jugadores de forma que cada uno de ellos reciba 7 fichas?

1.49. Un equipo de hockey consta de 2 porteros, 7 defensas y 10 delanteros. ¿Con ayuda de cuántos procedimientos es posible formar el grupo de seis jugadores que empieza el juego, compuesto de un portero, dos defensas y tres delanteros?

1.50. ¿Cuántos números de seis cifras existen en los que todas las cifras son impares (1, 3, 5, 7, 9)?

1.51. ¿Cuántos divisores tiene el número 462?

1.52. En un estante hay m libros encuadernados de negro y n libros encuadernados de azul, con la particularidad de que todos los libros son diferentes. ¿Con cuántos procedimientos se pueden disponer los libros de forma que los encuadernados en negro estén juntos?

1.53. ¿Con cuántos procedimientos se pueden empaquetar 9 libros diferentes en 5 impresos si 4 de ellos deben contener 2 libros cada uno?

1.54. ¿Con cuántos procedimientos es posible poner 12 monedas iguales en 5 diferentes monederos de modo que ninguno de éstos quede vacío?

1.55. Una caja fuerte se cierra con cerrojo que consta de cinco discos en cada uno de los cuales están representadas las cifras 0, 1, 2, . . ., 9. El cerrojo se abre si en los discos se ha marcado una determinada combinación de cifras. ¿Serán suficientes 10 días para abrir la caja fuerte si el «día laboral» dura 13 horas y para marcar una combinación de cifras son necesarios 5 segundos?

1.56. Entre todos los números enteros desde 1 hasta 10^n cuáles hay más: ¿aquellos para cuya anotación se emplea la cifra 9 o bien aquellos que se escriben sin ella?

1.57. Cierto alfabeto consta de seis letras que, para su transmisión por telégrafo, están codificadas así:

·; —; ··; — —; ·—; —·

Al transmitir una palabra no hicieron intervalos que separaran las letras entre sí, de modo que se obtuvo una cadena continua de puntos y rayas que contenía 12 signos. ¿Con cuántos procedimientos se puede leer la palabra transmitida?

1.58. En una urna había 3 bolas blancas, 4 negras, 5 rojas y de ella, al azar, se sacaba una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sacada sea: 1) blanca, 2) negra, 3) amarilla, 4) roja?

1.59. Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos aparecidos en los dados sea igual a 8?

1.60. El programa de los exámenes consta de 40 preguntas. En el examen se propone responder a dos de ellas. El estudiante había preparado respuestas a 30 preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que en el examen le toquen dos preguntas para las que él había preparado la respuesta?

1.61. En la lotería de 50 billetes 8 ganan. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los cinco primeros billetes tomados al azar dos sean premiados?

1.62. Entre diez billetes dos ganan. Determinen la probabilidad de que entre los cinco billetes tomados a la ventura: 1) uno será premiado, 2) ambos serán los premiados.

1.63. Al jugar al «Sportlotó» 6 números de 49 son los «felices». El participante en el juego indica 6 números de 49. ¿Cuál es la probabilidad de adivinar: 1) los 6 números «felices», 2) 3 números «felices»?

1.64. En el ascensor de una casa de ocho pisos, en el primero entraron 5 personas. Supongamos que cada una de ellas, independientemente de los demás y con igual probabilidad, puede salir en cualquier piso a partir del segundo. Hallen la probabilidad de que las 5 salen en diferentes pisos.

1.65. En el campeonato de baloncesto participan 18 equipos, entre los cuales hay dos equipos de extraclase. Para reducir el número total de partidos, los equipos se dividen en dos grupos iguales para lo que se realiza un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos equipos de extraclase resulten estar: 1) en diferentes subgrupos, 2) en un mismo subgrupo?

1.66. Demuestren que es menor que 1/10000 la probabilidad de que el cumpleaños de las doce personas elegidas al azar trascurran en diferentes meses.

§ 2. Elementos de lógica. Método de la inducción matemática

1. Proposiciones. Operaciones con proposiciones. Por *proposición* se entiende toda afirmación acerca de la que tiene sentido decir que ella es verdadera o falsa. De los datos de las proposiciones, con ayuda de las llamadas subjunciones lógicas a las que se refieren la partícula «no», las conjunciones «y», «o», las palabras «si . . ., entonces ...», «cuando y sólo cuando . . .» se forman nuevas proposiciones.

La operación de negación corresponde en el lenguaje habitual a la partícula «no». Para cada proposición p se puede formar una nueva proposición $\overline{p}$ (se lee: «p con raya», o bien «no p») que es verdadera si p es falsa y, a la inversa, falsa si p es verdadera. La proposición $\overline{p}$ recibe el nombre de *negación* de la proposición p. P. ej., para la proposición «la sucesión $\{1/n\}$ tiene límite» la negación es la proposición «la sucesión $\{1/n\}$ no tiene límite».

La proposición compuesta por las proposiciones p y q con ayuda de la conjunción «y» recibe el nombre de *conjunción* y se designa con $p \wedge q$ (se lee: «p y q»).

Se considera que la conjunción $p \wedge q$ es una proposición verdadera cuando y sólo cuando las proposiciones p y q son verdaderas.

Si la proposición está formada con las proposiciones p y q con ayuda de la conjunción «o», ella se denomina *disyunción* de las proposiciones p y q y se designa $p \vee q$ (se lee: «p o q»).

La disyunción $p \vee q$ se considera proposición verdadera cuando y sólo cuando es verdadera por lo menos una de las proposiciones.

La proposición formada con las proposiciones p y q con ayuda de las palabras «si . . ., entonces . . .» se llama *implicación* y se designa con $p \rightarrow q$ (se lee: «si p, entonces q»). Con ello, la proposición p lleva el nombre de condición, en tanto que la proposición q, conclusión.

Se considera que la implicación $p \rightarrow q$ es una proposición falsa sólo en el caso cuando la condición (proposición p) es verdadera y la conclusión (proposición q), falsa.

La proposición formada por las proposiciones p y q, con ayuda de las palabras «cuando y sólo cuando . . .» se denomina *equivalencia* (o *implicación doble*) y se designa con $p \leftrightarrow q$.

La equivalencia $p \leftrightarrow q$ es verdadera cuando y sólo cuando ambas proposiciones p y q son verdaderas o bien cuando ambas son falsas.

Si a las proposiciones verdaderas adjudicamos la letra V y las falsas, la letra F, las operaciones lógicas $\overline{p}$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ pueden ser determinadas de modo formal con ayuda de las siguientes tablas de verdad:

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Las nuevas proposiciones pueden ser formadas mediante varias operaciones lógicas, con la particularidad de que cada una de las operaciones puede ser empleada varias veces. El orden con el que han de realizarse las operaciones se indica con ayuda de paréntesis.

En las tablas de verdad para la implicación vemos que si la condición p y la implicación $p \rightarrow q$ son verdaderas, la conclusión q también será verdadera. En semejante caso se escribe $p \Rightarrow q$ y se dice que p se deduce de q. Esta regla clásica de deducción se emplea en matemáticas con constancia.

Si de p se deduce q y de q se deduce p, las proposiciones p y q reciben el nombre de *equivalentes*. Las proposiciones equivalentes se unen bien con el signo $\Leftrightarrow$, o bien con el signo de igualdad, es decir, se escribe o $p \Leftrightarrow q$, o bien $p = q$.

Durante la investigación de las proposiciones con relación a la equivalencia, en los casos sencillos es posible hacer uso de las tablas de verdad, ya que para las proposiciones equivalentes de diferente forma, las tablas de verdad coinciden. P. ej., empleando las tablas de verdad para la negación e implicación, es fácil confeccionar la tabla de verdad para las proposiciones de la forma $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$:

p	q	$\bar{q}$	$\bar{p}$	$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Esta tabla coincide con la tabla de verdad para la implicación $p \to q$. Por lo tanto, las proposiciones $p \to q$ y $\overline{q} \to \overline{p}$ son equivalentes, es decir, $p \to q \Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$ o bien $p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$.

La tabla de verdad correspondiente a la proposición formada por n proposiciones sencillas contiene 2^n filas. Por esta razón, por regla, la equivalencia de las proposiciones se establece con otro procedimiento: cierta cantidad de equivalencias base (leyes de álgebra proporcional) se verifica partiendo de las tablas de verdad, las igualdades obtenidas se utilizan al demostrar otras igualdades de la misma forma que en álgebra elemental en las transformaciones idénticas se emplean las leyes algebraicas: conmutativa, asociativa, distributiva y otras.

Leyes fundamentales del álgebra proposicional:

1. Conmutatividad de la disyunción:

$$p \vee q = q \vee p. \tag{1}$$

2. Conmutatividad de la conjunción:

$$p \wedge q = q \wedge p. \tag{2}$$

3. Asociatividad de la disyunción:

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r. \tag{3}$$

4. Asociatividad de la conjunción:

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r. \tag{4}$$

5. Primera ley distributiva:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \tag{5}$$

6. Segunda ley distributiva:

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r). \tag{6}$$

7. Ley de Morgan:

$$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}, \quad \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}. \tag{7}$$

8. Ley de la negación doble:

$$\overline{\overline{p}} = p. \tag{8}$$

9. Leyes de idempotencia:

$$p \vee p = p, \quad p \wedge p = p. \tag{9}$$

En lógica las proposiciones idénticamente verdaderas o bien idénticamente falsas desempeñan importante papel. Las proposiciones idénticamente verdaderas son siempre verdaderas independientemente de si las proposiciones que las forman son verdaderas o falsas. P. ej., la proposición $p \vee \overline{p}$ es idénticamente verdadera.

Designaremos las proposiciones idénticamente verdaderas con la letra i.

Las proposiciones idénticamente falsas siempre lo son, es decir, independientemente de la veracidad o falsedad de las proposiciones que las forman. Semejantes proposiciones se designan con la letra l. P. ej., $p \wedge \bar{p} = l$, ya que la proposición $p \wedge \bar{p}$ es falsa independientemente de si la proposición p es verdadera o falsa.

Para las proposiciones idénticamente verdaderas e idénticamente falsas, con todo p son ciertas las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} &p \vee \bar{p} = i, \quad &&p \wedge \bar{p} = l, \\ &p \vee i = i, \quad &&p \wedge i = p, \\ &p \vee l = p, \quad &&p \wedge l = l, \quad \bar{i} = l. \end{aligned} \tag{10}$$

Las leyes (1) — (10) del álgebra proposicional describen las propiedades de tres operaciones: disyunción, conjunción y negación. La implicación y la equivalencia se expresan a través de la disyunción, conjunción y negación mediante las siguientes fórmulas:

$$p \to q = \bar{p} \vee q, \tag{11}$$

$$p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}). \tag{12}$$

Ejemplo 1. Demuestren la equivalencia

$$\overline{p \to q} = p \wedge \bar{q}. \tag{13}$$

△ Empleando la igualdad (11), obtenemos

$$\overline{p \to q} = \overline{\bar{p} \vee q}.$$

A continuación, se emplea la ley de Morgan (7) y la ley de negación doble (8):

$$\overline{\bar{p} \vee q} = \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} = p \wedge \bar{q}.$$

La fórmula (13) proporciona la regla de construcción de la negación para la implicación que, con frecuencia, se aplica a los razonamientos matemáticos. ▲

Ejemplo 2. Brown, Jones y Smith se acusan de ser cómplices en un asalto a un banco. Los ladrones se escaparon en un automóvil que los esperaba. En el transcurso de la instrucción Brown mostró que los delincuentes marcharon en un «Buick» azul, Jones dijo que el auto era un «Crysler» negro y Smith afirmaba que era un «Ford Mustang», pero de manera ninguna azul. Era evidente que deseando complicar la instrucción cada uno de ellos indicó correctamente sólo la marca del automóvil o bien su color. ¿De qué color y marca era el auto?

△ Al resolver este problema omitiremos, para abreviar, el signo de conjunción, o sea, en lugar de $p \wedge q$ escribiremos simplemente pq.
Examinemos las proposiciones:
p — auto de color azul,
q — auto de marca «Buick»,
r — auto de color negro,
s — auto de marca «Crysler»,
t — auto de marca «Ford Mustang».
De las declaraciones de Brown, Jones y Smith se deduce, correspondientemente, que las proposiciones $p \vee q$, $r \vee s$, $\bar{p} \vee t$ son verdaderas. Por consiguiente, la conjunción verdadera de esas tres proposiciones:

$$(p \vee q)(r \vee s)(\bar{p} \vee t).$$

Abriendo los paréntesis, obtenemos la disyunción de ocho conjunciones:

$$(pr\bar{p})(prt) \vee (ps\bar{p}) \vee (pst) \vee (qr\bar{p}) \vee (qrt) \vee (qs\bar{p}) \vee (qst).$$

Del planteamiento se desprende que todas las conjunciones, salvo la quinta, son falsas. Por ello, la disyunción puede ser verdadera sólo a condición de la veracidad de la proposición $qr\bar{p}$, lo que significa que los delincuentes huyeron en un «Buick» negro. ▲

2. Enunciados que dependen de la variable (predicados). En matemáticas y otras ciencias, además de las proposiciones, se tropieza con diversos enunciados que dependen de la variable perteneciente a cierto conjunto. En lógica, semejantes enunciados se denominan *predicados*. El predicado $p(x)$, $x \in U$, hablando en general, no es una proposición. No obstante, se supone que para cada elemento fijado $x_0 \in U$ el predicado $p(x_0)$ es una proposición.

El conjunto U, en el que se prefija el predicado $p(x)$, se puede dividir en dos subconjuntos. Uno de ellos contiene aquellos y sólo aquellos elementos de U para los que $p(x)$ es verdadero. Recibe el nombre de conjunto de veracidad del predicado $p(x)$. Otro subconjunto consta de aquellos elementos de U para los que $p(x)$ es falso. Si el primero de dichos subconjuntos se designa con la letra P, el segundo se debe designar con P', ya que es el complemento del conjunto P hasta el conjunto U.

Por ej., para el predicado $x^2 - x < 0$, $x \in \mathbb{R}$, el intervalo $(0; 1)$ es el conjunto de veracidad P, la unión de los intervalos $(-\infty; 0]$ y $[1; +\infty)$ (complemento del intervalo $(0; 1)$ hasta toda la recta númerica) es el conjunto P'.

Dos predicados $p(x)$ y $q(x)$ prefijados en un mismo conjunto llevan el nombre de *equivalentes* si sus conjuntos de veracidad coinciden.

P. ej., dos predicados (desigualdades) $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$ y $x^4 - 5x^3 + 6x^2 < 0$ son equivalentes en el conjunto $\mathbb{R}$, ya que el conjunto de veracidad de cada uno de ellos es el intervalo (2; 3).

Para los predicados que dependen de la variable, lo mismo que para las proposiciones, se introducen operaciones lógicas.

Recibe el nombre de *negación* del predicado $p(x)$, $x \in U$, tal predicado definido en el propio conjunto U y que se convierte en una proposición de verdad para aquellos y sólo aquellos valores de x para los que $p(x)$ es falso.

La negación $p(x)$ se designa $\overline{p(x)}$. Si P es el conjunto de veracidad $p(x)$, el conjunto de veracidad $\overline{p(x)}$ será P'. En la fig. 2 están representados esquemáticamente los conjuntos U, P y P'.

De forma análoga también se determinan otras operaciones lógicas.

P. ej., la implicación $p(x) \rightarrow q(x)$ de los predicados $p(x)$ y $q(x)$, determinados en el conjunto U, se llama predicado determinado

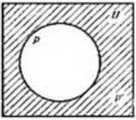


Fig. 2

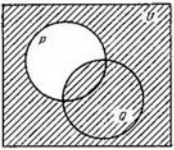


Fig. 3

en ese mismo conjunto U y que se convierte en una proposición falsa para aquellos y sólo aquellos valores de x, para los que la condición $p(x)$ es verdadera y la conclusión $q(x)$, falsa. En la fig. 3 está sombreado el conjunto de veracidad de la implicación $p(x) \rightarrow q(x)$ (P y Q son los conjuntos de veracidad de los predicados $p(x)$ y $q(x)$).

3. Signos de universalidad y existenciales (cuantores). Con predicados dependientes de las variables están ligados dos tipos de afirmaciones con las que se tropieza con frecuencia.

1. El predicado $p(x)$, $x \in U$ se convierte en una proposición verdadera para todos los elementos del conjunto U.

2. El predicado $p(x)$, $x \in U$, se convierte en una proposición verdadera al menos para uno de los elementos del conjunto U.

Estas afirmaciones se suelen escribir con brevedad haciendo para ello uso de signos especiales: el *signo de universalidad* $\forall$ (la primera letra girada del vocablo inglés *All* — todo) y el *signo existencial* $\exists$

(la primera letra girada del vocablo inglés *Exists* — existe). En lógica los signos $\forall$ y $\exists$ llevan el nombre de *cuantores*. El cuantor de universalidad $\forall$ corresponde a las palabras «todo», «cualquiera», «cada»; el cuantor existencial $\exists$, a las palabras «al menos uno», «se hallará», «existe».

Al emplear los signos $\forall$ y $\exists$, podemos escribir las afirmaciones 1 y 2 del modo siguiente:

1. $\forall xp(x)$, $x \in U$. 2. $\exists xp(x)$, $x \in U$.

Cada uno de estos predicados es bien verdadero, o bien falso y, por lo tanto, es una proposición.

Las reglas para confeccionar las negaciones para las proposiciones que contienen los cuantores se prefijan con las fórmulas

$$\overline{\forall xp(x)} = \exists x\overline{p(x)}, \quad \overline{\exists xp(x)} = \forall x\overline{p(x)}. \tag{14}$$

La primera fórmula significa que $p(x)$ es verdadera no para todas las x cuando y sólo cuando existe tal x para la cual $p(x)$ es falsa. La segunda fórmula nos indica que no existe tal x para la cual $p(x)$ es verdadera cuando y sólo cuando $p(x)$ es falsa para todas las x.

El elemento x_0 del conjunto U, para el que el predicado $p(x)$ no es cierto, lleva el nombre de contraejemplo para la proposición $\forall xp(x)$.

Así, pues, con el fin de cerciorarse de la falsedad de la proposición $\forall xp(x)$ es suficiente hallar (o bien como asimismo se dice, construir) un contraejemplo.

El predicado definido en el conjunto $X \times Y$ (es decir, en el producto cartesiano de los conjuntos X e Y), recibe el nombre de predicado dependiente de dos variables o bien predicado doble y se designa $p(x; y)$, $x \in X$, $y \in Y$. De semejante predicado, con ayuda de los cuantores $\forall$ y $\exists$ se pueden formar ocho proposiciones:

1. $\forall x\forall yp(x; y)$. 2. $\forall y\forall xp(x; y)$.
3. $\forall x\exists yp(x; y)$. 4. $\exists y\forall xp(x; y)$.
5. $\exists x\forall yp(x; y)$. 6. $\forall y\exists xp(x; y)$.
7. $\exists x\exists yp(x; y)$. 8. $\exists y\exists xp(x; y)$.

Las proposiciones 1 y 2 son, por lo visto, equivalentes lo mismo que las proposiciones 7 y 8. Las proposiciones 3 y 4, así como 5 y 6, no son equivalentes (véanse los problemas **2.21, 2.22**). Por ello se dice que los cuantores homónimos pueden permutarse, y los diferentes, no.

4. Método de inducción matemática. En muchas partes de las matemáticas es preciso demostrar la veracidad de los predicados $p(x)$ determinados en un conjunto de números naturales para todos los valores de la variable, es decir, la veracidad de la proposición

$$\forall np(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Con frecuencia, esto se consigue realizar con el *método de inducción matemática*. Este método se basa en el llamado principio de inducción

matemática (axioma de la inducción) que puede enunciarse del siguiente modo. El predicado $p(n)$ se considera verdadero para todos los valores naturales de la variable si se emplean las dos siguientes condiciones:

1. El predicado $p(n)$ es verdadero para $n = 1$.
2. De la suposición que $p(n)$ es verdadero para $n = k$ (donde k es cualquier número natural) se desprende que también es verdadero para el siguiente valor $n = k + 1$.

Por método de inducción matemática se entiende el siguiente método de demostración. Si es preciso demostrar la veracidad del predicado $p(n)$ para todos los valores naturales de n, primero se comprueba la veracidad de la proposición $p(1)$ y, a continuación, suponiendo que la proposición $p(k)$ es verdadera, se demuestra la veracidad de la proposición $p(k+1)$. Si la demostración es cierta para cada valor natural de k, en correspondencia con el principio de la inducción matemática el predicado $p(n)$ será verdadero para todos los valores de n.

Ejemplo 3. Demuestren la igualdad

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

△ Esta igualdad es el predicado $p(n)$ prefijado en un conjunto de números naturales. Demostremos la veracidad de $p(n)$ para todos los valores de n según el método de la inducción matemática.

1. La proposición $p(1)$ es verdadera, ya que

$$1^2=\frac{1\cdot 2\cdot(2\cdot 1+1)}{6}.$$

2. Supongamos que $p(k)$ es verdadero, es decir, es válida la igualdad

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Después de adicionar a ambos miembros de la igualdad $(k+1)^2$, obtenemos

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2.$$

Transformemos el segundo miembro de la igualdad de la siguiente forma:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Por lo tanto

$$1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

lo que significa que $p(k+1)$ es verdadero. De este modo, el razonamiento es justo con todo $k \in \mathbb{N}$.

En correspondencia con el principio de la inducción matemática la igualdad inicial es verdadera. ▲

Ejemplo 4. Demostrar la desigualdad de Bernoulli.

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha, \quad \alpha > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

△ 1. Con $n = 1$ obtenemos una proposición verdadera

$$1 + \alpha \geqslant 1 + \alpha.$$

2. Supongamos que la desigualdad es cierta con $n = k$, es decir,

$$(1+\alpha)^k \geqslant 1 + k\alpha.$$

Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $1+\alpha$ (esto se puede realizar, ya que $\alpha > -1$), obtenemos

$$(1+\alpha)^{k+1} \geqslant (1+k\alpha)(1+\alpha) \geqslant 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2.$$

Teniendo en cuenta que $k\alpha^2 \geqslant 0$, llegamos a la desigualdad

$$(1+\alpha)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)\alpha.$$

Así, pues, al suponer que la desigualdad es cierta para $n = k$, hemos demostrado que ella es asimismo cierta para $n = k+1$. Es evidente, que la demostración seguirá siendo válida para cada valor de k. De forma que la desigualdad está demostrada. ▲

Ejemplo 5. Demostrar que con cada $n \in \mathbb{N}$ el número $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ es múltiplo a 19.

△ 1. Con $n = 1$ la afirmación dada es, por lo visto, cierta.

2. Supongamos que es cierta para $n = k$, o sea, supongamos que $5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}$ se divide por 19. Entonces, como

$$5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} = 8 \cdot 5 \cdot 2^{3k-2} + 27 \cdot 3^{3k-1} =$$
$$= 8(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19 \cdot 3^{3k-1}$$

la afirmación también es cierta con $n = k+1$. En efecto, el primer sumando del segundo miembro de esta igualdad se divide por 19 debido a la suposición inductiva; el segundo se divide asimismo por 19, ya que contiene el factor 19.

Las dos condiciones del principio de inducción matemática se han cumplido. La afirmación está demostrada. ▲

Ejemplo 6. Demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

△1. Con $n = 1$ la desigualdad es cierta, ya que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1.$$

2. Supongamos que la desigualdad es cierta con $n = k$, es decir,

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+1}>1.$$

Adicionemos a ambos miembros de la desigualdad la suma de tres fracciones

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$$

y trasladamos el primer sumando del primer miembro al segundo de la desigualdad. Entonces, obtenemos

$$\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+4}>1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}.$$

El segundo miembro de esta desigualdad es mayor que la unidad, ya que

$$1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=$$

$$=1+\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>1.$$

Por lo tanto, el primer miembro con más razón es mayor que la unidad, es decir,

$$\frac{1}{(k+1)+1}+\ldots+\frac{1}{3(k+1)+1}>1.$$

Esta última desigualdad se obtiene de la inicial con $n = k + 1$.

Así, pues, al suponer la veracidad de la desigualdad con $n = k$, hemos demostrado su veracidad con $n = k + 1$. De este modo, hemos demostrado la desigualdad con el método de inducción matemática. ▲

Ejemplo 7. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos tomados al azar, con la particularidad de que $x_1x_2 \ldots x_n = 1$. Demuestren que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n.$$

△ 1. Si $n = 1$, de acuerdo con el planteamiento $x_1 = 1$ y, por consiguiente, podemos escribir $x_1 \geqslant 1$, es decir, para $n = 1$ la afirmación es cierta.

2. Supongamos que la afirmación es cierta para $n = k$. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$, números positivos tomados al azar y que

$$x_1x_2 \ldots x_kx_{k+1} = 1.$$

Pueden haber dos casos: bien todos estos números son iguales a 1 y, entonces, su suma será igual a $k + 1$ y la desigualdad quedará demostrada, o bien entre dichos números hay al menos un número no igual a la unidad y, entonces, habrá obligatoriamente al menos un

número más no igual a la unidad, con la particularidad de que si uno de ellos es menor que la unidad, el otro es mayor que ella. Sin limitar la universalidad es posible considerar que $x_k > 1$ y $x_{k+1} < 1$. Ahora, consideremos k números

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, (x_k x_{k+1}).$$

Su producto es igual a la unidad y, por consiguiente, según la suposición inductiva

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geqslant k.$$

Adicionemos a ambos miembros de la última desigualdad $x_k + x_{k+1}$, traslademos $x_k x_{k+1}$ a la derecha y transformemos el segundo miembro de la desigualdad:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} &\geqslant k - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} = \\ &= k + 1 + x_k (1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 = \\ &= k + 1 + x_k (1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) = \\ &= k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_k - 1) \geqslant k + 1. \end{aligned}$$

Así, pues, de la veracidad de la afirmación con $n = k$ se desprende su veracidad con $n = k + 1$. La afirmación está demostrada. De la demostración aducida se deduce que el signo de igualdad en la relación que demostramos tiene lugar cuando y sólo cuando $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. ▲

Ejemplo 8. Demuestren la desigualdad

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos arbitrarios.

△ Esta importante desigualdad entre la media aritmética y la media proporcional de n números es el corolario de la afirmación demostrada en el ejemplo 7. En efecto, sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos tomados al azar.

Consideremos n números

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}; \quad \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}; \ldots; \quad \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}.$$

Por lo visto, todos estos números son positivos y su producto es igual a la unidad. Por consiguiente, su suma es mayor o igual a n, es decir,

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}} \geqslant n,$$

de donde

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

con la particularidad de que la igualdad tiene lugar cuando y sólo cuando $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$. ▲

En ciertas ocasiones el método de inducción matemática se aplica en forma algo variada. Con la mayor frecuencia se utilizan las dos siguientes enunciaciones:

I. El predicado $p(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ es verdadero para todos los valores enteros de $n \geqslant m$ (m es cierto número entero) si se cumplen las condiciones:

1. El predicado $p(n)$ es verdadero para $n = m$.
2. De la suposición que $p(n)$ es verdadero para $n = k$ (k es un número entero, $k \geqslant m$) se desprende que es verdadero para el siguiente valor de $n = k + 1$.

II. El predicado $p(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ es verdadero para todo $n \geqslant m$ (m es cierto número entero) si se cumplen las condiciones:

1. El predicado $p(n)$ es verdadero para $n = m$ y $n = m + 1$.
2. De la suposición que $p(n)$ es verdadero para $n = k$ y $n = k - 1$ se deduce (para todo $k > m$) que él es verdadero para $n = k + 1$.

P. ej., la enunciación I se emplea al resolver los problemas **2.30**, **2.36**, la II, al resolver el problema **2.34**.

2.1. Entre las siguientes frases separen aquellas que son proposiciones y establezcan (si esto es posible) si ellas son verdaderas o falsas:

1) El gran poeta ruso A. S. Pushkin nació el año 1799.
2) El duodécimo campeón del mundo de ajedrez es Anatoli Kárpov.
3) ¡Vuelen en aeronaves de Aeroflot!
4) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
5) Para los dos conjuntos arbitrarios A y B es cierta la inclusión $A \subset A \cup B$.
6) Hay civilizaciones extraterrestres.
7) $2CO + O_2 = 2CO_2$.
8) La suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180°.

2.2. Se dan dos proposiciones:

p — «el número 3 es el divisor del número 174»;
q — «llueve».

¿En qué consisten las proposiciones:

1) $\overline{p}$; 2) $p \vee q$; 3) $p \wedge q$; 4) $p \rightarrow q$; 5) $\overline{p} \rightarrow q$; 6) $p \leftrightarrow \overline{q}$?

¿Cuáles de estas proposiciones son verdaderas si p es verdadera y q falsa?

2.3. Confeccionen la tabla de verdad para las proposiciones de la forma:

1) $s = (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$; 2) $s = (p \wedge (q \rightarrow p)) \vee \overline{p}$.

2.4. Demuestren las fórmulas (3) — (7).

2.5. Demuestren las fórmulas (11) y (12).

2.6. A un blanco se han efectuado tres tiros. Sea p_k la proposición «el blanco ha sido batido por el k-ésimo tiro», $k = 1, 2, 3$. ¿Qué significan las siguientes proposiciones:

1) $p_1 \vee p_2 \vee p_3$; 2) $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$; 3) $(\bar{p}_1 \vee \bar{p}_2) \wedge p_3$?

¿Cuáles de estas tres proposiciones son verdaderas si p_3 es verdadera y p_1 y p_2, falsas?

2.7. ¿Cuáles de las proposiciones p, q, r deben ser verdaderas y cuáles falsas para que $((\overline{\bar{p} \vee p}) \wedge q) \to r$ sea verdadera?

2.8. Simplifiquen las proposiciones de la forma:

1) $(p \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})) \vee (p \wedge \bar{q})$. 2) $(p \wedge q) \vee ((r \vee p) \wedge \bar{q})$.

3) $(r \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$. 4) $(p \to q) \wedge (\overline{r \to q})$.

2.9. A la pregunta de cuál de tres estudiantes estudiaba lógica fue obtenida una respuesta correcta: si la estudiaba el primero, también lo hacía el tercero, pero no era cierto que si la estudiaba el segundo, lo hacía asimismo el tercero. ¿Quién estudiaba lógica?

2.10. Víctor, Román, Yuri, Sergio ocuparon en la olimpiada de matemáticas los cuatro primeros puestos. Cuando les preguntaron acerca de la distribución de los puestos, dieron las tres siguientes respuestas:

1) Sergio — primero, Román — segundo;
2) Sergio — segundo, Víctor — tercero;
3) Yuri — segundo, Víctor — cuarto.

¿Cómo se distribuyeron los puestos si en cada una de las respuestas sólo una de las afirmaciones era verdadera?

2.11. Determinen cuál de cuatro estudiantes dio el examen si sabemos que:

1) si lo dio el primero, el segundo también;
2) si lo dio el segundo, el tercero también o bien el primero no lo dio;
3) si no lo dio el cuarto, lo dio el primero, pero el tercero no;
4) si el cuarto lo dio, el primero también.

2.12. Para una expedición polar de ocho pretendientes A, B, C, D, E, F, G y H hay que elegir seis especialistas: biólogo, hidrólogo, sinóptico, radista, mecánico y médico. Las funciones del biólogo pueden ser realizadas por E y G, las del hidrólogo, B y F. Las del sinóptico, F y G, las del radista, C y D, las del mecánico, C y H, las del médico, A y D. Aunque algunos de los pretendientes tienen dos especialidades, en la expedición cada uno puede realizar sólo una función. ¿Quién y en calidad de qué ha de incluirse en la expedición si F no puede ir sin B, D sin H y sin C, C no puede ir simultáneamente con G, y A no puede ir junto con B?

2.13. En un conjunto de números naturales de una cifra se dan dos predicados:

$p(n)$: el número 3 es divisor del número n;
$q(n)$: $n \leqslant 6$.
Hallen el conjunto de veracidad de los predicados:
1) $p(n) \vee q(n)$; 2) $p(n) \wedge \overline{q(n)}$;
3) $\overline{p(n)} \rightarrow q(n)$; 4) $\overline{p(n) \rightarrow q(n)}$.

2.14. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son proposiciones? ¿Cuáles de las proposiciones son verdaderas y cuáles falsas:

a) La suma de las raíces de la ecuación cuadrática aducida es igual al término independiente.

b) La suma de las raíces de cualquiera ecuación cuadrática aducida es igual al término independiente.

c) Existe una ecuación cuadrática reducida, en la que la suma de las raíces es igual al término independiente?

2.15. En el conjunto de todos los números naturales se prefijan tres predicados:
$p(n)$: el número $n^2 - 2$ es múltiplo de 7;
$q(n)$: el número $n - 2$ es múltiplo de 7;
$r(n)$: $4n^2 - 360n + 8099 < 0$.
¿Con qué valores de n de los tres predicados dos son verdaderos y uno falso?

2.16. En el conjunto de todos los números naturales se dan tres predicados:
$p(x)$: x es un número entero;
$q(x)$: $x^2 - 3x$ es un número entero negativo;
$r(x)$: $x + \frac{1}{x}$ es un número positivo.
¿Con qué valores de x es falsa una y sólo una de estas tres proposiciones?

2.17. En el conjunto de todos los pares ordenados $(m; n)$ de números enteros positivos se dan los predicados:
$p(m, n)$: $m + 1$ se divide por n;
$q(m, n)$: m es igual a $2n + 5$;
$r(m, n)$: $m + n$ se divide por 3;
$s(m, n)$: $m + 7n$ es un número primo.
Hallen todos los pares de números $(m; n)$ para los cuales una y sólo una de las proposiciones es falsa.

2.18. ¿Con qué valores de a el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y = b, \\ x^2 - 4y^2 = 1 \end{cases}$$

tiene raíces reales con cualesquiera valores de b?

2.19. Está dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} bx - y = ac^2, \\ (b-6)x + 2by = c + 1, \end{cases}$$

donde a, b, c son números reales. ¿Con qué valores de a y cualquier b habrá tal c con el que el sistema tiene al menos una raíz?

2.20. Se dan dos puntos A (0; 9), B (3; 6) y el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2x-y+a\leqslant 0, \\ 6x+3y+5a\geqslant 0. \end{cases}$$

¿Con qué valores del parámetro a la solución del sistema serán las coordenadas: 1) al menos de un punto del segmento AB, 2) de cada punto del segmento AB?

2.21. Consideremos dos definiciones de un trabajo sencillo de control.

1. El trabajo de control se denomina sencillo si cada uno de los problemas fue resuelto al menos por un estudiante.

2. El trabajo de control se llama sencillo si al menos un estudiante resolvió todos los problemas.

1) ¿Puede ser sencillo el trabajo de control en el sentido de la primera definición y difícil (no sencillo) en el sentido de la segunda?

2) ¿Puede ser sencillo el trabajo de control en el sentido de la segunda definición y difícil en el sentido de la primera?

2.22. Se da la desigualdad $kx + l^2 > 0$. Con qué valores de k son verdaderós los siguientes predicados:

1) Con toda l la desigualdad tiene al menos una solución.

2) Existe una l con la que la desigualdad es cierta para todas x.

3) Con toda l la desigualdad es cierta para todas x.

4) Existe una l con la que la desigualdad tiene al menos una solución.

2.23. Empleando las reglas de construcción de una negación para las proposiciones que contienen cuantores (véase la fórmula (14)), enuncien la negación de las siguientes proposiciones:

1) En cierto tren que va de Moscú a Leningrado, en cada vagón hay (existe) un sitio libre.

2) En cada ciudad de Suecia hay una calle en la que hay una casa en la que todas las ventanas dan al sur.

2.24. Construyan un contraejemplo para las proposiciones:

1) Con cada $n \in \mathbb{N}$ el número $n^2 + n + 41$ es primo.

2) Cada función continua en el punto tiene en éste una derivada.

Con el método de inducción matemática resuelvan los problemas **2.25 — 2.40.**

2.25. Demuestren que con cada $n \in \mathbb{N}$ son ciertas las igualdades:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

2) $1\cdot 2 + 2\cdot 5 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1)$.

3) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

4) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

5) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

6) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)\,n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

7) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

8) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

9) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$.

2.26. Demuestren que con toda $n\in\mathbb{N}$:

1) $n(2n^2-3n+1)$ es múltiplo de 6.

2) $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ se divide por 11.

3) $11^{n+1}+12^{2n-1}$ se divide por 133.

4) n^5-n es múltiplo de 5.

2.27. Demuestren que con todo número $n>1$ natural, $2^{2^n}+1$ termina en la cifra 7.

2.28. Demuestren la validez de las siguientes desigualdades para todos los números $n>1$ naturales:

1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

2) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

3) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

4) $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n$.

5) $(2n!)>\frac{4n}{n+1}(n!)^2$.

2.29. Demuestren que con todo número $n>2$ natural es cierta la desigualdad

$$2^n n!<n^n.$$

2.30. ¿Con qué valores naturales de n son ciertas las desigualdades:

1) $3^n>2^n+7n$; 2) $2^n>n^2+4n+5$;

3) $2^n>n^3$; 4) $n!>2^n$?

2.31. Demuestren que

$$3+33+\ldots+33\ldots 3=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27},\quad n\in\mathbb{N}$$

el primer miembro de la igualdad contiene n sumandos).

2.32. Demuestren la igualdad

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = 2\cos(\pi/2^{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}$$

(el primer miembro contiene n raíces).

2.33. Demuestren la igualdad

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.34. La sucesión $\{a_n\}$ es la relación recurrente

$$a_n = \frac{5}{2}a_{n-1} - a_{n-2} \; (n > 1), \quad a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{5}{2}.$$

Hallen el n-ésimo término de la sucesión.

2.35. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números no negativos arbitrarios, con la particularidad de que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1/2.$$

Demuestren que

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n) \geqslant 1/2.$$

2.36. Demuestren que cualquier suma de dinero mayor que 7 kop. sólo se puede cambiar con monedas de tres y cinco kopeks.

2.37. En el plano se han trazado n rectas de las que ningunas dos son paralelas y ningunas tres pasan por un mismo punto. ¿En cuántas partes dividen el plano dichas rectas?

2.38. ¿En cuántas partes se dividirá una esfera con n planos que pasan por el centro si ningunos tres planos pasan por un mismo diámetro?

2.39. En un plano se han trazado al azar n rectas. Demuestren que con pinturas blanca y negra puede ser pintado el plano de tal forma que cualesquiera dos partes, que tengan un lado común, estarán pintadas de diferente color.

2.40. Demuestren que si p es un número primo y n, un número natural, $n^p - n$ se divide por p (teorema de Fermat).

§ 3. Números reales

1. Números racionales e irracionales. Lleva el nombre de *número real* una fracción decimal infinita. Para los números reales están determinadas las operaciones de adición y multiplicación, sometidas a las leyes conmutativa y asociativa y ligadas entre sí con la ley distributiva (esto se tratará más adelante con mayor detalle). La operación inversa a la adición se llama sustracción, inversa a la multiplicación, división. Los números reales pueden compararse por su valor. El conjunto de números reales se designa con $\mathbb{R}$.

Así, pues, todo número real a, por definición, se escribe en forma de una fracción decimal infinita

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots, \tag{1}$$

donde α_0 es un número entero no negativo (es decir, α_0 puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, ..., m, ...), así como cada uno de α_n ($n = 1, 2, \ldots$) es una de las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. En la anotación (1) el signo «+», por regla, no se escribe. En tal caso, el número a recibe el nombre de no negativo: $a \geqslant 0$ y se escribe

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \tag{2}$$

El número (2) se denomina *valor absoluto* del número (1) y se designa con $|a|$. De este modo

$$|\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots| = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

Puede suceder que un mismo número real permite realizar la anotación en forma de dos fracciones decimales distintas; en semejante caso, en una de las anotaciones, a partir de cierto lugar (de las decenas) después de la coma, habrá sólo ceros, mientras que en otro, sólo nueves. P. ej.,

$$1 = 1,000 \ldots 0 \ldots = 0,999 \ldots 9 \ldots$$

En adelante, como anotación de números reales vamos a emplear sólo fracciones decimales infinitas (llamadas tolerables), en las que no hay semejantes decenas a partir de las cuales en la anotación del número sólo está la cifra 9. Llegando a este acuerdo, cada número real se escribe de forma única en forma de una fracción decimal infinita.

Si en la anotación decimal (1) del número a, a partir de cierto lugar, sólo hay ceros:

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 00 \ldots 0 \ldots,$$

por regla, se escribe

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \tag{3}$$

y se dice que el número a se escribe con ayuda de la fracción decimal finita (3).

Para un número no negativo a, escrito en forma de la fracción decimal tolerable infinita (2), la fracción decimal finita

$$\underline{a}_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \tag{4}$$

recibe el nombre de su *aproximación decimal inferior* (o bien *aproximación decimal por defecto*) del orden n, en tanto que el número

$$\overline{a}_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n}, \tag{5}$$

el de *aproximación decimal superior* (o bien *aproximación decimal por exceso*) del orden $n = 0, 1, 2, \ldots$

Pero si el número a es negativo: $a < 0$, es decir, se escribe en forma de una fracción decimal tolerable

$$a = -\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots,$$

donde al menos uno de α_m ($m = 0, 1, 2, \ldots$) no es igual a cero, sus aproximaciones decimales inferior $\underline{a}_n$ y superior $\overline{a}_n$ del orden n, se determinan con las igualdades (6)

$$\underline{a}_n = -\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n - 10^{-n}, \qquad (6)$$
$$\overline{a}_n = -\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

De este modo, con cualquier $a \in \mathbb{R}$

$$\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \overline{a}_n,$$
$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = 10^{-n},$$
$$\underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \ \overline{a}_{n+1} \leqslant \overline{a}_n.$$

Las aproximaciones con las fracciones decimales finitas (4), (5) y (6) de los números reales $a \in \mathbb{R}$ proporcionan facilidades al emplearlas cuando se realizan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y comparación de números reales.

P. ej., la suma $a + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ es el número real único que satisface con toda $n = 0, 1, 2, \ldots$ la desigualdad

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n \leqslant a + b \leqslant \overline{a}_n + \overline{b}_n.$$

El producto ab es el único número real que, con toda $n = 0$ $1, 2, \ldots$, satisface las desigualdades

$$\underline{a}_n\underline{b}_n \leqslant ab \leqslant \overline{a}_n\overline{b}_n \text{ si } a \geqslant 0, \ b \geqslant 0,$$
$$\underline{a}_n\overline{b}_n \leqslant ab \leqslant \overline{a}_n\underline{b}_n \text{ si } a < 0, \ b \geqslant 0,$$
$$\overline{a}_n\overline{b}_n \leqslant ab \leqslant \underline{a}_n\underline{b}_n \text{ si } a < 0, \ b < 0.$$

La condición $a < b$ es equivalente a la existencia de tal número n que $\overline{a}_n < \underline{b}_n$.

En el § 1 ya se indicó que los números naturales $1, 2, \ldots$ se designan con $\mathbb{N}$, y los enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, con $\mathbb{Z}$. Los números de la forma

$$\frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0$$

llevan el nombre de *racionales*, y el símbolo $\frac{m}{n}$ con el que se escriben, *fracción racional*. Un mismo número racional a puede ser escrito mediante diferentes fracciones racionales: si

$$a=\frac{m}{n} \quad \text{y} \quad a=\frac{k}{l}, \quad m,\ n,\ k,\ l\in\mathbb{Z}, \quad n\neq 0, \quad l\neq 0,$$

esto es posible cuando y sólo cuando $lm = kn$.

El conjunto de todos los números racionales se designa con $\mathbb{Q}$. Los números reales que no son racionales reciben el nombre de irracionales. El conjunto de todos los números irracionales se designa con $\mathbb{I}$.

Una fracción racional infinita se denomina *periódica* con período $\beta_1 \ldots \beta_m$ y se escribe en la forma

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\,(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m) \tag{7}$$

si después de cierta decena (su número se designa con n) el grupo de cifras $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m$ se repite constantemente.

Las fracciones decimales infinitas periódicas, y solamente ellas, son números reales racionales. De aquí se desprende que un número real es irracional cuando y sólo cuando él se escribe en forma de una fracción infinita aperiódica. El paso de la anotación de un número racional con una fracción racional p/q, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$, a su anotación mediante una fracción decimal infinita periódica, se realiza dividiendo «en columna» el numerador p por el denominador q. El paso de la anotación de un número racional de la forma (7) a su anotación con ayuda de una fracción racional se realiza con la fórmula

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\,(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m) = \\ = \alpha_0\,\frac{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m - \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}{\underbrace{99 \ldots 9}_{m \text{ veces}}\underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ veces}}}. \tag{8}$$

En el numerador de la fracción en el segundo miembro de la igualdad se encuentra la diferencia de los números situados después de la coma en (7) hasta el segundo y primer períodos, respectivamente. En el denominador está un número que comienza con la cifra 9 tomada tantas veces cuantas cifras hay en el período y, a continuación, siguen ceros cuya cantidad es igual al número de cifras antes del período. Empleando las reglas enunciadas p. ej., tenemos

$$\frac{3}{7}=0,(428571), \qquad 2,7\,(13)=2\,\frac{713-7}{990}=2\,\frac{706}{990}=2\,\frac{353}{495}.$$

Entre los puntos de la recta geométrica y los números reales se puede establecer tal correspondencia biunívoca que si al número cero le corresponde el punto O, a la unidad, el punto E y si tomamos

en la recta el vector $\overrightarrow{OE}$ como el versor de coordenadas, entonces a cada número se ha puesto en correspondencia el punto de la recta con abcisa igual a dicho número. Por esta razón, el conjunto de números reales lleva asimismo el nombre de *recta numérica* o bien *eje numérico* o *eje real*, los propios números reales se denominan *puntos* de la recta numérica y, p. ej., en lugar de «el número x es menor que y» se puede decir: «el punto x del eje numérico está a la izquierda del punto y».

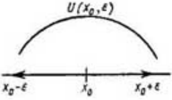


Fig. 4

La recta numérica R completada con dos elementos designados $+\infty$ (más infinito) y $-\infty$ (menos infinito) tales que para cualquier número $x \in R$, por definición, se considera

$$-\infty < x < +\infty,$$

recibe el nombre de *recta numérica ampliada* $\overline{R}$. Los elementos $+\infty$ y $-\infty$ también se denominan *puntos infinitamente alejados* de la recta numérica o bien *números infinitos*, a diferencia de los puntos $x \in R$ que, en ocasiones, se llaman *puntos finitos* de dicha recta (correspondientemente, *números finitos*).

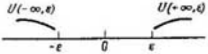


Fig. 5

Para todo punto $x_0 \in R$ el intervalo $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ lleva el nombre de su *ε-entorno* y se designa con $U(x_0;\ \varepsilon)$, es decir,

$$U(x_0;\ \varepsilon) = \{x\colon |x - x_0| < \varepsilon\} \tag{9}$$

(fig. 4). Para los puntos infinitamente alejados $+\infty$ y $-\infty$ sus ε-entornos $U(+\infty;\ \varepsilon)$ y $U(-\infty;\ \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ se determinan con las fórmulas:

$$U(+\infty;\ \varepsilon) = \{x\colon x > \varepsilon\},\quad U(-\infty;\ \varepsilon) = \{x\colon x < -\varepsilon\} \tag{10}$$

(fig. 5).

A veces, la recta numérica se completa con un elemento que se designa con ∞ y se llama infinidad. La infinidad sin signo no está ligada con la relación de orden con los números reales. Su ε-entorno $U(\infty;\ \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ se prefija con la fórmula

$$U(\infty;\ \varepsilon) = \{x\colon |x| > \varepsilon\}. \tag{11}$$

La infinidad sin signo se denomina asimismo punto infinitamente alejado de la recta numérica.

3.1. Escriban las fracciones racionales 2/3, 11/20, 3/14, —2/7 en forma de fracciones decimales infinitas.

3.2. Escriban las fracciones decimales infinitas periódicas 0,125 (0); 0,(3); 2,4 (31); 0,2 (9) en forma de fracciones racionales.

3.3. Demuestren que el número $0{,}121221222\ldots\underbrace{122\ldots2}_{n\ \text{veces}}\ldots$ es irracional.

3.4. Demuestren que $\log 2$, $\log_2 3$ son números irracionales.

3.5. Demuestren que los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2/3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ son irracionales.

3.6. ¿Puede ser la suma de dos números irracionales un número racional?

3.7. Demuestren que para cualesquiera números racionales a y b, tales que $a < b$, habrá un número irracional c que satisfaga la condición $a < c < b$.

3.8. Demuestren que para cualesquiera números racionales p, q, r, de los cuales al menos uno no es igual a cero, el número $p\sqrt{2} + q\sqrt{3} + r\sqrt{2/3}$ es irracional.

3.9. Hallen las cinco primeras aproximaciones decimales inferiores y superiores de los números 3/10, 1/3, 11/9, — 5/8.

3.10. Hallen tres aproximaciones decimales inferiores y superiores de los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

3.11. ¿Son conmensurables segmentos si la razón entre sus longitudes se expresa con la fracción 0,23 (75)?

3.12. Comparen los siguientes números reales:
1) 3,3 y 3,298. 2) 3,1416 y 3,14159.
3) 3,141592 y 22/7. 4) $\sqrt{3}+2$ y $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.
5) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ y $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

3.13. Hallen las tres primeras cifras significativas en las aproximaciones decimales inferiores y superiores para los siguientes números:

1) $\frac{1}{3}+\sqrt{3}$. 2) $\sqrt{2}-1{,}4$. 3) $\sqrt{5}-2\frac{1}{3}$.

4) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$. 5) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. 6) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

3.14. Demuestren que en dos puntos cualesquiera de la recta numérica existen entornos no intersecantes.

3.15. Demuestren que en dos puntos cualesquiera de la recta numérica ampliada con ayuda de dos puntos infinitamente alejados

$+\infty$ y $-\infty$, o bien mediante un punto infinitamente alejado ∞, existen entornos no intersecantes.

3.16. Hallen el ε-entorno máximo del punto $x = 2$ en el que
1) $x^2 - 5x + 4 < 0$, 2) $\operatorname{sen} x > 0$, 3) $\operatorname{tg} x < 0$,

$$4)\ \frac{x^2(x+1)}{x-1} > 0.$$

2. Números enteros.

Ejemplo 1. Demuestren que si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, existe una y única representación del número a en la forma

$$a = bq + r,\ 0 \leqslant r < b,\ q \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z}.$$

$\triangle$ Tomemos $q \in \mathbb{Z}$ de modo que $bq \leqslant a < b(q+1)$. Entonces $0 \leqslant a - bq < b$, es decir, el número $r = a - bq$ satisface las condiciones del problema.

Si $a = bq_1 + r_1$, $0 \leqslant r_1 < b$, entonces sustrayendo de él, término por término, la igualdad $a = bq + r$, obtenemos $0 = b(q_1 - q) + r_1 - r$ y, por lo tanto, $r_1 - r$ es múltiplo de b. Como $|r_1 - r| < b$, esto sólo es posible cuando y sólo cuando $r_1 = r$ y $q_1 = q$. $\blacktriangle$

3.17. El máximo común divisor (m.c.d.) de los números naturales a y b se designa con (a, b). Demuestren que si $a = bq + c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$, entonces $(a, b) = (b, c)$.

3.18. Sean $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$. Demuestren que existen $n \in \mathbb{N}$ y los números $q_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $r_j \in \mathbb{Z}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ tales que

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < b, \\ b &= r_1q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-3} &= r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}, \quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2},\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n \end{aligned} \tag{12}$$

y que r_{n-1} es el máximo común divisor de los números a y b. (Semejante método para hallar el m.c.d. de dos números naturales recibe el nombre de algoritmo de Euclides).

3.19. Demuestren que el conjunto de divisores comunes de dos números naturales coincide con el conjunto de m.c.d.

Indicación. Hagan uso del algoritmo de Euclides (12).

3.20. Demuestren que para cualesquiera números naturales a, b y c es válida la igualdad $(ac, bc) = (a, b)\,c$.

Indicación. Multipliquen la igualdad (12) por c.

Ejemplo 2. Demuestren que si a y b son números naturales y $(a, b) = 1$ (tales números llevan el nombre de mutuamente pri-

mos), para cualquier natural c es válida la igualdad $(ac, b) = (c, b)$.

△ Demostremos que los números (ac, b) y (b, c) se dividen entre sí, de donde se desprenderá de inmediato que ellos son iguales. El número b y, por consiguiente, asimismo el número bc se dividen por (ac, b). Por ello, el número (ac, b) es el divisor de los números ac y bc, de donde del problema (3.19) se deduce que (ac, b) es también el divisor de m.c.d. $(ac, bc) = c\,(a, b) = c$ de los números ac y bc. Así, pues, (ac, b) es el divisor de los números b y c y, por ello, también el divisor de (b, c). A la inversa, el número (b, c) es el divisor de los números b y ac, por consiguiente, él es el divisor de su m.c.d. (ac, b). ▲

Ejemplo 3. Demuestren que si a, b y c son números naturales, $(a, b) = 1$ y ac se divide por b, c también se divide por b.

△ De acuerdo con el ejemplo 2, tenemos $(ac, b) = (c, b)$ y como ac se divide por b, entonces $(ac, b) = b$. De este modo, $(c, b) = b$, es decir, el número c se divide por b. ▲

3.21. Demuestren que si cada número natural $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es recíprocamente primo con cada número natural $b_1, b_2, \ldots, b_m$, su producto $a_1 a_2 \ldots a_n$ es recíprocamente primo con el producto $b_1 b_2 \ldots b_m$.

3.22. Demuestren que si el producto de varios números enteros no negativos se divide por el número primo p, al menos uno de los factores también se divide por p. (Un número natural recibe el nombre de primo si él no tiene divisores enteros positivos salvo la unidad y él mismo.)

3.23. Demuestren que todo número natural mayor que la unidad se descompone en el producto de los factores primos y, además, con el único procedimiento, si nos abstraemos del orden de los factores.

3.24. Demuestren que el conjunto de los números primos es infinito.

3.25. Demuestren que para cualesquiera dos números naturales m y n existen tales números enteros p y q que

$$pm + qn = (m, n).$$

En particular si m y n son primos entre sí, $pm + qn = 1$.

3.26. Demuestren que si ξ es un número irracional, el conjunto de las partes fraccionales de los números del tipo $n\xi$, $n \in \mathbb{N}$ es denso en el segmento $[0; 1]$. (Se denomina *parte fraccional* del número real x la diferencia entre ese número y el número entero mayor que no supera a x. El conjunto $X \subset [a; b]$ lleva el nombre de *denso en el segmento* $[a, b]$ si todo entorno de cada punto de dicho segmento contiene puntos del conjunto X.)

3.27. Demuestren que si un número natural no es el cuadrado de semejante número, él tampoco puede ser el cuadrado de un número racional.

Indicación. Hagan uso del resultado del problema **3.23**.

---

3. Teoría axiomática de los números reales

3.1. Axiomas de los números reales. Se denomina *conjunto de números reales* un conjunto en el que para sus elementos se verifican las siguientes condiciones:

I. En el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ está definida la operación binaria llamada operación de adición: a todo par ordenado de números reales a y b le está puesto en correspondencia un número, designado con $a + b$ y denominado suma de los números a y b. Con esto, tienen lugar las siguientes propiedades:

I_1 (ley conmutativa de la adición). Para cualesquiera números a y b se cumple la igualdad $a + b = b + a$.

I_2 (ley asociativa de la adición). Para cualesquiera números a, b y c se cumple la igualdad $a + (b + c) = (a + b) + c$.

I_3. Existe tal número designado con 0 que para cualquier número a se cumple la igualdad $a + 0 = a$.

I_4. Para cada número a existe semejante número, llamado opuesto al número a y designado con $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

El número $a + (-b)$ se denomina diferencia $a - b$ de los números a y b.

II. En el conjunto de números reales está definida la operación binaria denominada operación de multiplicación: a cualquier par ordenado de números reales a y b le está puesto en correspondencia un número, designado con ab y llamado producto de los números a y b. Con esto, tienen lugar las siguientes propiedades:

II_1 (ley conmutativa de la multiplicación). Para cualesquiera números a y b se cumple la igualdad $ab = ba$.

II_2 (ley asociativa de la multiplicación). Para cualesquiera números a, b y c se cumple la igualdad $a(bc) = (ab)c$.

II_3. Existe un número tal, designado con 1, con que para cualquiera número a se cumple la igualdad $a1 = a$.

II_4. Para cualquier número $a \neq 0$ existe un número tal, llamado opuesto a a y designado con $\frac{1}{a}$, que $a\frac{1}{a} = 1$.

El número $a\frac{1}{b}$ recibe el nombre de cociente de la división del número a por $b \neq 0$ y se designa con $\frac{a}{b}$, a/b o bien $a:b$.

III. (ley distributiva de la adición con relación a la multiplicación). Para cualesquiera números reales a, b y c es válida la igualdad $(a + b)c = ac + bc$.

IV. Para cualquier número a está definida una y sólo una de las relaciones $a > 0$ (a mayor que cero), $a = 0$ (a igual a cero) y $a < 0$ (a menor que cero) y las condiciones $a > 0$ y $-a < 0$ son equivalentes. Además, si $a > 0$ y $b > 0$, entonces

IV_1. $a+b>0$.
IV_2. $ab>0$.

Los números mayores que cero se llaman positivos; los números menores que cero, negativos. Si $a-b>0$, se dice que el número a es mayor que el número b y se escribe $a>b$ (o bien, b es menor que a, que es lo mismo y, entonces, se escribe: $b<a$).

La presencia de las comparaciones «mayor» o bien «menor» para todo par ordenado de diferentes números reales lleva el nombre de propiedad de ordenación del conjunto de números reales.

V. (continuidad). Cualesquiera que sean los conjuntos no vacíos $A\subset\mathbb{R}$ y $B\subset\mathbb{R}$, en los que para dos elementos cualesquiera $a\in A$ y $b\in B$ se cumple la desigualdad $a\leqslant b$, existe tal número α que para todos $a\in A$ y $b\in B$ es válida la relación $a\leqslant\alpha\leqslant b$.

Con el fin de aclarar la definición axiomática de los números reales introduzcamos la noción de campo. Si en cierto conjunto X que contiene más de un elemento están definidas las operaciones de adición y multiplicación que satisfacen las condiciones I—III (en las enunciaciones de dichas condiciones el término «número» ha de sustituirse por el término «elemento del conjunto X»), el conjunto X recibe el nombre de campo. Si, además, se cumple la condición IV, el campo se denomina ordenado.

Sean X e Y campos ordenados y supongamos que existe tal aplicación biunívoca (biyección) $f\colon X\to Y$ del campo X en el campo Y que para todos $x\in X$ y $x'\in X$ tienen lugar las relaciones $f(x+x')=f(x)+f(x')$, $f(xx')=f(x)f(x')$ y si $x<x'$, $f(x)<f(x')$, entonces los campos ordenados X e Y reciben el nombre de isomorfos y la propia aplicación f, isomorfismo (con relación a la adición, multiplicación y ordenación).

Si el campo ordenado satisface la condición V, él lleva el nombre de campo continuo ordenado.

Teorema 1. Cualesquiera dos campos continuos ordenados son isomorfos.

Este teorema nos muestra que la definición axiomática de conjunto de números reales, dada más arriba, define dicho conjunto unívocamente con una precisión de hasta el isomorfismo.

Un conjunto de fracciones decimales infinitas es una de las realizaciones de un conjunto de números reales: los ejemplos de otras de sus realizaciones se darán en los problemas **3.43.** y **8.190.**

En la teoría axiomática de los números reales, para cualquier número a el número designado con $|a|$ y determinado con la fórmula

$$|a|=\begin{cases} a \text{ si } a\geqslant 0, \\ -a \text{ si } a<0 \end{cases} \tag{13}$$

recibe el nombre de *valor absoluto del número a* o bien su *módulo* (en el caso de realización de un conjunto de números reales en forma

de fracciones decimales infinitas esta definición coincide con la aducida en el p. 1).

3.28. Partiendo de las propiedades $I_1 - I_4$ de la suma demuestren las siguientes afirmaciones:

1) Si $a + b = c$, $a = c - b$.

2) El número que posee la propiedad de cero es único.

3) El número opuesto al dado es único.

4) Para todo número a es válida la igualdad $a - a = 0$.

5) Para cualesquiera números a y b es válida la igualdad

$$-a - b = -(a + b).$$

6) La igualdad $a + x = b$ tiene en $\mathbb{R}$ solución, con la particularidad de que ésta es la única: $x = b - a$.

7) Empleando el método de la inducción matemática, muestren que si $i_1, i_2, \ldots, i_n$ es la reordenación de los números $1, 2, \ldots, n$, entonces

$$(\ldots((a_{i_1} + a_{i_2}) + a_{i_3}) + \ldots + a_{i_{n-1}}) + a_{i_n} = \\ = (\ldots((a_1 + a_2) + a_3) + \ldots + a_{n-1}) + a_n.$$

3.29. Partiendo de las propiedades $II_1 - II_4$ de la multiplicación, demuestren las siguientes afirmaciones:

1) El número que posee la propiedad de la unidad es único.

2) El número opuesto al número dado diferente de cero es único.

3) Para todo número $a \neq 0$ es válida la igualdad

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a.$$

4) Para todo número $a \neq 0$ es válida la igualdad

$$\frac{a}{a} = 1.$$

5) Para cualesquiera números $a \neq 0$ y $b \neq 0$ es válida la igualdad

$$\frac{1}{a}\,\frac{1}{b} = \frac{1}{ab}.$$

6) La ecuación $ax = b$, $a \neq 0$, tiene en un conjunto de números reales una solución y, con ello, única:

$$x = \frac{b}{a}.$$

7) La igualdad

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad b\neq 0, \quad d\neq 0$$

es válida cuando y sólo cuando $ad = bc$.

8) Para cualquier fracción $\frac{a}{b}$, $b\neq 0$ y todo número $c\neq 0$ es válida la igualdad

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}.$$

9) Es válida la fórmula (regla de multiplicación de fracciones)

$$\frac{a}{b}\frac{c}{a}=\frac{ac}{bd}.$$

10) El elemento opuesto de la fracción $\frac{a}{b}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ es la fracción $\frac{b}{a}$, es decir, $\frac{a}{b}\frac{b}{a}=1$.

11) Es válida la fórmula (regla de división de fracciones)

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}, \quad b\neq 0, \quad c\neq 0, \quad d\neq 0.$$

12) Si $i_1, i_2, \ldots i_n$ es la reordenación de los números $1, 2, \ldots \ldots, n$, $(\ldots((a_{i_1}, a_{i_2})a_{i_3})\ldots a_{i_{n-1}})a_{i_n}=(\ldots((a_1a_2)a_3)\ldots a_{n-1})a_n$.

3.30. Partiendo de las propiedades I—III de la adición y la multiplicación, demuestren las siguientes afirmaciones:

1) Para cualesquiera números a, b y c tiene lugar la igualdad

$$a(b-c)=ab-ac.$$

2) Para todo número a se verifica la igualdad $a0 = 0$.

3) Si $ab = 0$, por lo menos uno de los factores a o bien b es igual a cero.

4) Para cualesquiera números a y b tiene lugar la igualdad

$$(-a)b=-ab.$$

5) Es válida la fórmula (regla de adición de fracciones)

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad b\neq 0, \quad d\neq 0.$$

6) Es válida la fórmula

$$(a_1+\ldots+a_n)b=a_1b+\ldots+a_nb, \quad n\in \mathrm{N}.$$

7) Es válida la fórmula

$$na=\underbrace{a+\ldots+a}_{n \text{ veces}}, \quad n\in \mathrm{N}.$$

3.31. Partiendo de las propiedades I — IV demuestren las siguientes afirmaciones:

1) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

2) Si $a > b$, para todo número c es válida la desigualdad $a + c > b + c$.

3) Para cualesquiera dos números a y b con precisión tiene lugar una de las tres relaciones $a > b$, $a = b$, $a < b$.

4) Si $a < b$, $-a > -b$.

5) Si $a < b$ y $c \leqslant d$, entonces $a + c < b + d$.

6) Si $a < b$ y $c \geqslant d$, $a - c < b - d$.

7) Si $a < b$ y $c < 0$, $ac > bc$.

8) Es válida la desigualdad $1 > 0$.

3.32. Demuestren las afirmaciones:

1) Para todo número a son válidas las relaciones

$$|a| \geqslant 0, \quad |a| = |-a|, \quad -|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$

2) Para cualesquiera números a y b son válidas las relaciones

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leqslant |a - b|, \quad |ab| = |a||b|.$$

3.33. Demuestren que dos conjuntos que satisfacen los axiomas I — V son entre sí isomorfos.

3.34. Demuestren que el conjunto de fracciones decimales infinitas tolerables forma un campo continuo ordenado, es decir, satisface los axiomas I — V.

3.2. Cortadura de conjuntos ordenados. El *conjunto* X se denomina *ordenado* si para cualesquiera dos de sus elementos a y b está definida una de las tres relaciones $a < b$ (a menor que b), $a = b$ (a igual a b) y $a > b$ (a mayor que b), con la particularidad de que si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. Todo subconjunto de un conjunto ordenado también lo es.

El conjunto de números reales y, en general, todo campo ordenado, son ejemplos de conjuntos ordenados.

Un par de subconjuntos no vacíos A y $B = X \setminus A$ del conjunto ordenado X lleva el nombre de su *cortadura* y se designa $A \mid B$ si cualquier elemento de A es menor que cualquier elemento de B. El conjunto A se llama *clase inferior* y el conjunto B, *superior*.

Si X es un conjunto ordenado y $\alpha \in X$, los conjuntos

$$A = \{x: x \leqslant \alpha\}, \quad B = \{y: y > \alpha\}, \tag{14}$$

así como

$$A = \{x: x < \alpha\}, \quad B = \{y: y \geqslant \alpha\} \tag{15}$$

forman la cortadura del conjunto X. En ambos casos decimos que la cortadura $A \mid B$ se realiza con el elemento α y se escribe $\alpha = A \mid B$.

Si dos cortaduras $A_1|B_1$ y $A_2|B_2$ en el conjunto ordenado X se realizan con los elementos de dicho conjunto: $A_1|B_1 = x_1 \in X$ y $A_2|B_2 = x_2 \in X$, entonces estas cortaduras se llaman *iguales* cuando lo son los elementos que las producen: $x_1 = x_2$. Pero si al menos una de las cortaduras $A_1|B_1$ y $A_2|B_2$ no se realiza con los elementos del conjunto X, las mencionadas cortaduras se llaman *iguales* si $A_1 = A_2$.

$A|B$ recibe el nombre de cortadura *nula* del campo ordenado si ella se produce con el cero: $A|B = 0$.

Si en la cortadura no nula $A|B$ de un campo ordenado el conjunto A contiene todos los elementos negativos, $A|B$ recibe el nombre de *cortadura mayor que cero* y se escribe $A|B > 0$.

Una cortadura no nula de un campo ordenado, que no es mayor que cero, se llama *cortadura menor que cero*: $A|B < 0$.

3.35. Demuestren que si $X = \mathbb{R}$ o bien $X = \mathbb{Q}$, entonces en el caso de la cortadura (14), en la clase B no hay número mínimo, mientras que en el caso de la cortadura (15), en la clase A no hay máximo.

3.36. Demuestren que en un conjunto ordenado el elemento que realiza la cortadura es único.

3.37. Sea B el conjunto de todos los números racionales positivos r tales que $r^2 > 2$ y $A = \mathbb{Q}\setminus B$. Demuestren que el par A, B forma una cortadura en el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ y que en la clase A no hay número máximo, mientras que en la clase B no hay mínimo y, por lo tanto, no existe el número racional que realiza esta cortadura.

3.38. Demuestren que si en un campo ordenado se cumplen los axiomas I — IV, el axioma V tiene lugar cuando y sólo cuando cada cortadura del campo que consideramos se realiza con uno de sus elementos.

En los problemas **3.39—3.43** se entiende por cortadura la que se realiza en un conjunto de números racionales.

3.39. Sean $A_1 | B_1$ y $A_2 | B_2$ dos cortaduras,

$$A_1 + A_2 = \{x = x_1 + x_2 : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\},$$
$$B_1 + B_2 = \{x = x_1 + x_2 : x_1 \in B_1, x_2 \in B_2\}.$$

Demuestren que entonces los conjuntos $A_1 + A_2$ y $B_1 + B_2$ forman una cortadura (se denomina suma de las cortaduras dadas y se designa $A_1|B_1 + A_2|B_2$).

3.40. Demuestren que para cualquier cortadura $A|B$ existe otra opuesta a ella que se designa $-A|B$ es decir, una cortadura tal que $A|B + (-A|B) = 0$.

3.41. Demuestren que si $-A|B < 0$, $A|B > 0$.

3.42. Sean $A_1|B_1$ y $A_2|B_2$ cortaduras, $A_1|B_1 > 0$, $A_2|B_2 > 0$,

$$B_1B_2 = \{x = x_1x_2 : x_1 \in B_1, x_2 \in B_2\}.$$

Demuestren que los conjuntos $A = \mathbb{R} \setminus B$ y B forman una cortadura (ella se denomina producto de las cortaduras dadas y se designa $A_1|B_1 \cdot A_2|B_2$).

El *valor absoluto* $|A|B|$ de la cortadura $A|B$ se determina con la fórmula

$$|A|B| = \begin{cases} A|B & \text{si } A|B \geqslant 0, \\ -A|B & \text{si } A|B < 0. \end{cases}$$

El *producto de cortaduras arbitrarias* en campos ordenados $A_1|B_1$ y $A_2|B_2$ se determina con la fórmula

$$A_1|B_1 \cdot A_2|B_2 = \begin{cases} 0, & \text{si } A_1|B_1 = 0 \text{ o bien } A_2|B_2 = 0, \\ |A_1|B_1| \cdot |A_2|B_2|, & \text{si } A_1|B_1 \text{ y } A_2|B_2 \text{ son de un mismo signo} \\ -(|A_1|B_1| \cdot |A_2|B_2|), & \text{si } A_1|B_1 \text{ y } A_2|B_2 \text{ son de signo opuesto.} \end{cases}$$

3.43. Demuestren que el conjunto de cortaduras de números racionales con introducción en él de la adición, multiplicación y ordenación es un campo continuo ordenado, es decir, un conjunto de números reales.

3.3. Potencias racionales. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. El número obtenido después de la multiplicación del número a por sí mismo n veces recibe el nombre de *potencia n- ésima del número a* y se designa con a^n. Por definición

$$a^0 = 1 \text{ y } a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0.$$

Sean $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. El número $b \in \mathbb{R}$, tal que $b^n = a$ (claro está, si existe), lleva el nombre de *raíz de n-ésima potencia* del número a y se designa con $\sqrt[n]{a}$ o bien $a^{1/n}$.

Si $a \geqslant 0$, $b = \sqrt[n]{a}$ y $b \geqslant 0$, el número b se llama *valor aritmético de la raíz* de n-ésima potencia del número a. En adelante, vamos a entender por raíz de un número real no negativo el valor aritmético de la raíz si no se ha acordado alguna otra cosa.

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces, por definición se hace

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

3.44. Sean $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, con la particularidad de que si $n \leqslant 0$ o bien $m \leqslant 0$, $a \neq 0$. Demuestren que, entonces:

1) $a^m a^n = a^{m+n}$. 2) $(a^m)^n = (a^n)^m$.

3.45. Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Demuestren que:

1) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$. 2) $\sqrt{a} = \sqrt[nm]{a^m}$. 3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

4) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$. 5) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

3.46. Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, $r' \in \mathbb{Q}$. Demuestren que:

1) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. 2) $a^r a^{r'} = a^{r+r'}$.

3) $(a^r)\, r' = a^{rr'}$. 4) $(ab)^r = a^r b^r$.

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

3.4. Cotas superior e inferior. Principio de segmentos encajados. Sea X el subconjunto de un conjunto extendido de números reales: $X \subset \overline{\mathbb{R}}$. El elemento $x_0 \in X$ se llama *elemento máximo* del conjunto X y se designa con máx X si para toda $x \in X$ se verifica la desigualdad $x \leqslant x_0$. El elemento $x_0 \in X$ se llama *elemento mínimo* del conjunto X y se designa con mín X si para todas las $x \in X$ tiene lugar la desigualdad $x \geqslant x_0$. Si existen los elementos máximo y mínimo del conjunto dado, ellos son únicos.

El conjunto $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ se denomina *acotado superiormente* (*inferiormente*) si existe tal número real $a \in \overline{\mathbb{R}}$ que todas las $x \in X$ satisfacen la desigualdad $x \leqslant a$ (correspondientemente, $x \geqslant a$); en semejante caso el número a lleva el nombre de número que acota superiormente (inferiormente) el conjunto X. El conjunto acotado superior o inferiormente se llama conjunto *acotado*.

El máximo (mínimo) de todos los números finitos o infinitos que acotan superiormente (inferiormente) el conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se denomina *cota superior* (*inferior*) del conjunto X y se designa sup X o bien $\sup\limits_{x \in X} \{x\}$ (correspondientemente, inf X o bien $\inf\limits_{x \in X} \{x\}$).

Si $\alpha = \sup X$ (correspondientemente, $\alpha = \inf X$), entonces

1) para todas las $x \in X$ se verifica la desigualdad $x \leqslant \alpha$ (correspondientemente, $x \geqslant \alpha$);

2) para todo $\beta < \alpha$ (correspondientemente, para todo $\beta > \alpha$) existe tal $x \in X$ que $x > \beta$ (correspondientemente, $x < \beta$).

Si α es un número finito, la condición 2) es equivalente a que para toda $\varepsilon > 0$ existe tal $x \in X$ que $x > \alpha - \varepsilon$ (correspondientemente, $x < \alpha + \varepsilon$).

Si la cota superior (inferior) del conjunto es un número finito: $\alpha \in \mathbb{R}$, ella se llama *finita*; en caso contrario, *infinita*.

Las cotas superior e inferior del conjunto dado son únicas. Para un conjunto no acotado superiormente X tenemos $\sup X = +\infty$ y para el no acotado inferiormente, $\inf X = -\infty$.

Teorema 2. Todo conjunto no vacío de números reales no acotado superiormente (inferiormente) tiene una cota superior (inferior) finita.

Del teorema 2 y los axiomas I — V de los números reales se desprende el llamado *principio de Arquímedes*: para todo número real positivo a existe tal número natural n que $n > a$.

El conjunto de segmentos $\{[a_n;\ b_n]\}$, $n \in \mathbb{N}$, de números reales ($a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$) recibe el nombre de *sistema de segmentos encajados* si para todas las n tiene lugar la implicación

$$[a_{n+1};\ b_{n+1}] \subset [a_n;\ b_n].$$

Teorema 3. (*principio de los segmentos encajados*). Cualquier sistema de segmentos encajados de números reales tiene intersección no vacía.

3.47. Demuestren que el conjunto $X \subset \mathbb{R}$ es acotado si y sólo si existe tal a que para todas las $x \in X$ se verifica la desigualdad $|x| \leqslant a$.

3.48. Demuestren que es acotado el conjunto

$$X = \left\{x : x = \frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1},\quad t > 0\right\}.$$

3.49. Sea $X = \{x\colon x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$. Demuestren que el conjunto X no tiene elemento mínimo ni máximo. Hallen $\sup X$ e $\inf X$.

3.50. Hallen las cotas superiores e inferiores de los conjuntos

$$\{n\};\ \left\{\frac{1}{n}\right\};\ \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\};\ \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right\},\quad n \in \mathbb{N}.$$

Hallen los elementos máximos y mínimos de estos conjuntos si tales existen.

3.51. Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $-X = \{x\colon -x \in X\}$. Demuestren que $\sup(-X) = -\inf X$, $\inf(-X) = -\sup X$.

3.52. Sea $X_k \subset \mathbb{R}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ y

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \left\{x\colon\ x=\sum_{k=1}^{n} x_k,\ x_k \in X_k,\ k=1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Demuestren que

$$\sup \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \sup X_k, \quad \inf \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \inf X_k.$$

3.53. Sea $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ y

$$X - Y = \{z\colon\ z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\}.$$

Demuestren que $\sup (X - Y) = \sup X - \inf Y$

3.54. Demuestren que el conjunto de todas las fracciones racionales propias m/n, $0 < m < n$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ no tiene elemento mínimo ni máximo. Hallen sus cotas superior e inferior.

3.55. El conjunto

$$[a;\ b]_{\mathbb{Q}} = \{x\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{Q}\}$$

se denomina segmento $[a;\ b]_{\mathbb{Q}}$ de números racionales.

El sistema $\{[a_n;\ b_n]_{\mathbb{Q}}\}$, $n \in \mathbb{N}$ de segmentos de números racionales se llama encajado si para cualquier n se verifica la implicación

$$[a_{n+1};\ b_{n+1}]_{\mathbb{Q}} \subset [a_n;\ b_n]_{\mathbb{Q}}.$$

¿Es válida la afirmación de que la intersección de cualquier sistema de segmentos encajados de números racionales contiene al meno un número racional?

3.56. ¿Es válida la afirmación de que todo sistema de intervalos encajados $\{(a_n;\ b_n)\}$, es decir, tales que

$$(a_{n+1};\ b_{n+1}) \subset (a_n,\ b_n),\ n \in \mathbb{N}$$

tiene intersección no vacía?

3.57. ¿Existe un sistema de intervalos encajados con intersección no vacía?

3.58. Partiendo de los axiomas I — V de los números reales, demuestren que para todo número $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ existe tal número natural n que $n > a$ (como indicamos más arriba esta propiedadad de los números reales se denomina principio de Arquímedes).

3.59. Demuestren que del principio de Arquímedes se desprende que para cualesquiera dos números $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ existe tal $n \in \mathbb{N}$ que $an > b$.

3.60. Sea que en el campo ordenado X se verifica el principio de Arquímedes, es decir, para todo $a \in X$, $a > 0$, existe tal $n \in \mathbb{N}$ que $n > a$. Entonces para el campo X son equivalentes las siguientes tres afirmaciones:

1) El campo X satisface el axioma V.

2) Cualquier sistema de segmentos encajados del campo X tiene intersección no vacía.

3) Cualquier subconjunto no vacío, acotado superiormente, del campo X tiene cota superior finita.

§ 4. Progresiones. Adición. Binomio de Newton. Desigualdades numéricas

1. Progresiones aritmética y geométrica. *La progresión aritmética* es una sucesión numérica $\{a_n\}$ tal que para todos los $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = a_n + d, \tag{1}$$

donde a_1, d son los números dados; d, la *razón* de la progresión aritmética.

Fórmulas para el n-ésimo término y la suma S_n de los primeros n términos de la progresión aritmética:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, \tag{2}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n. \tag{3}$$

Propiedades de la progresión aritmética:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n \geqslant 2, \tag{4}$$

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

La progresión geométrica es una sucesión numérica $\{b_n\}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = b_n q, \tag{6}$$

donde b_1, q son los números dados, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$; q, la *razón* de la progresión geométrica.

Fórmulas para el n-ésimo término y la suma S_n de los primeros n términos de la progresión geométrica:

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \tag{7}$$

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, \quad q \neq 1. \tag{8}$$

Propiedades de la progresión geométrica:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \quad n \geqslant 2, \tag{9}$$

$$b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Si $|q|<1$, la progresión geométrica lleva el nombre de *infinitamente decreciente*, su suma S se expresa con la fórmula

$$S=\frac{b_1}{1-q}. \tag{11}$$

4.1. Demuestren que si los números positivos a, b, c son términos consecutivos de una progresión aritmética, los números

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

también son términos consecutivos de la progresión aritmética.

4.2. Demuestren que si los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los términos consecutivos de una progresión aritmética,

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

4.3. Sea S_n la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética. Demuestren que:

1) $S_{n+3}=3S_{n+2}-3S_{n+1}+S_n$. 2) $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$.

4.4. Demuestren que si la sucesión $\{a_n\}$ es una progresión aritmética, con cualquier $n\geqslant 3$ y todo $k\in\mathbb{N}$ es válida la igualdad

$$a_1^k-C_n^1a_2^k+C_n^2a_3^k+\ldots+(-1)^nC_n^na_{n+1}^k=0.$$

4.5. Sea S_n la suma de los primeros n miembros de una progresión geométrica. Demuestren que

$$S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2.$$

4.6. Demuestren que para cualquier número a y todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica la igualdad

$$(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})(1+a+a^2+\ldots+a^{n+1})=$$
$$=(1+a+a^2+\ldots a^n)^2-a^n.$$

4.7. Hallen las siguientes sumas:

1) $1+11+111+\ldots+11\ldots1$

(el último sumando es número de n cifras).

2) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$.

3) $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n$.

4) $x^n+2x^{n-1}+\ldots+(n-1)x^2+nx$.

4.8. Demuestren que la sucesión $\{b_n\}$ de números diferentes de cero es una progresión geométrica si y sólo si con cada $n \geqslant 3$ se verifica la igualdad

$$(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{n-1}^2)(b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)=$$
$$=(b_1b_2+b_2b_3+\ldots+b_{n-1}b_n)^2.$$

---

2. Suma. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los números prefijados. Su suma se designa con $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\ldots+a_n, \qquad (12)$$

donde k es el *índice de la suma*.

La suma no depende de la letra con que se designa su índice, o sea,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{p=1}^{n} a_p.$$

La operación de adición posee la propiedad de linealidad, es decir, para cualesquiera números α y β tiene lugar la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Examinemos la suma que contiene mn sumandos a_{ij}, donde los índices i y j toman valores desde 1 hasta n y desde 1 hasta m, respectivamente ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$). Semejante suma se designa con

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \quad \text{o bien} \quad \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij}$$

y lleva el nombre de *suma doble*. Tiene lugar la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

El problema de cálculo de la suma de la forma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

donde $f(x)$ es la función dada, se considera, por regla, como el problema de hallar S_n como una función de n. P. ej., si $f(k) = a_{k+1} - a_k$, donde $\{a_n\}$ es la sucesión dada, entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_2 - a_1 + a_3 - \\ - a_2 + \ldots + a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_1,$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1. \qquad (13)$$

Ejemplo 1. Calculen las sumas:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)};\quad 2)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

△ 1) Como $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, según la fórmula (13) hallamos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2) Haciendo uso de la igualdad

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

y de la fórmula (13), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right). \ ▲$$

Ejemplo 2. Calculemos la suma

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

△Consideremos la identidad

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Haciendo en ella $x = 1, 2, \ldots, n$ y sumando, término por término, las igualdades obtenidas, hallamos

$$\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

empleando la fórmula (13), obtenemos

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + \frac{3}{2}n(n+1) + n,$$

de donde

$$S_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Así, pues,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 3. Calculemos la suma

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx.$$

△ Analicemos la igualdad

$$S_n(x) \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{n} 2 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \frac{x}{2}.$$

Ya que,

$$2 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x,$$

de la fórmula (13) hallamos

$$S_n(x) \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = 2 \operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x \operatorname{sen} \frac{n}{2} x.$$

de donde

$$S_n(x) = \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x \operatorname{sen} \frac{n}{2} x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}, \quad \text{si } \operatorname{sen} \frac{x}{2} \neq 0,$$

si $\operatorname{sen}(x/2) = 0$, $S_n(x) = 0$. ▲

Ejemplo 4. La sucesión $\{x_n\}$ está prefijada con la fórmula $x_n = ax_{n-1} + b$. Expresen con x_1, a, b y n:

1) x_n, 2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

△ 1) Como

$$x_k = ax_{k-1} + b, \quad x_{k-1} = ax_{k-2} + b,$$

entonces

$$x_k - x_{k-1} = a(x_{k-1} - x_{k-2}) =$$
$$= a^2(x_{k-2} - x_{k-3}) = \ldots = a^{k-2}(x_2 - x_1),$$

es decir,

$$x_k - x_{k-1} = a^{k-2}(x_2 - x_1).$$

Haciendo en esta fórmula $k = 2, 3, \ldots, n$ y sumando las igualdades obtenidas, hallamos

$$\sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) = (x_2 - x_1) \sum_{k=2}^{n} a^{k-2}$$

o bien

$$x_n - x_1 = (x_2 - x_1) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} = ((a-1)x_1 + b) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1},$$

de donde

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}, \quad a \neq 1.$$

Con $a = 1$ la sucesión $\{x_n\}$ es una progresión aritmética con diferencia b, por lo que

$$x_n = x_1 + (n-1)b.$$

2) $S_n = x_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k = x_1 + a \sum_{k=2}^{n} x_{k-1} + (n-1)b,$

$$S_n = x_1 + a(S_n - x_n) + (n-1)b,$$

$$S_n(1-a) = x_1 - ax_n + (n-1)b =$$
$$= x_1 - a^n x_1 - ab \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} + (n-1)b,$$

de donde

$$S_n = \frac{(n-1)b}{1-a} + \frac{ab}{(a-1)^2}(a^{n-1} - 1) + \frac{a^n - 1}{a - 1} x_1, \quad a \neq 1. \ ▲$$

Ejemplo 5. La sucesión $\{x_n\}$ está prefijada con la fórmula

$$x_n = (\alpha + \beta) x_{n-1} - \alpha\beta x_{n-2},$$

donde $\alpha\beta \neq 0$. Expresen x_n a través de x_0, x_1, α, β y n.

△ Es posible escribir la igualdad inicial del modo siguiente:

$$x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2}).$$

Designemos $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$, entonces $y_n = \beta y_{n-1}$, de donde $y_n = \beta^{n-1} y_1$, o sea, $x_n - \alpha x_{n-1} = \beta^{n-1} y_1$ o bien

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta^{n-1} y_1.$$

Haciendo $x_n = \beta^n z_n$, obtenemos

$$z_n = \frac{\alpha}{\beta} z_{n-1} + \frac{y_1}{\beta}.$$

Considerando $\alpha \neq \beta$ y utilizando el resultado del anterior ejemplo, hallamos

$$z_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} z_1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \cdot \frac{y_1}{\beta},$$

donde $z_1 = x_1/\beta$, $y_1 = x_1 - \alpha x_0$. De aquí obtenemos

$$x_n = x_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \alpha\beta x_0 \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Si $\alpha = \beta$, $x_n = n\alpha^{n-1} x_1 - x_0 (n-1) \alpha^n$. ▲

4.9. Calculen la suma doble $\sum_{i=1}^{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ si:

1) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$ 2) $a_{ij} = i$.

3) $a_{ij} = i - j$, 4) $a_{ij} = |i - j|$.

4.10. Demuestren que para cualesquiera números a y b son válidas las igualdades:

1) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}$.

2) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b^k a^{2n-k}$.

4.11. Demuestren la *identidad de Lagrange*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

4.12. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones prefijadas de números. Demuestren que:

1) Si $B_m = \sum_{j=1}^{m} b_j$, con cualquier $n \in \mathbb{N}$ es válida la igualdad (*transformación de Abel*)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n,$$

y con todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $p \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n.$$

2) Si $D_s = \sum_{j=n+1}^{n+s} b_j$, para todo $p \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j} - a_{n+j+1}) D_j + a_{n+p} D_p.$$

4.13. Calculen las sumas:

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$. 2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$.

3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$.

4) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$. 5) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$.

4.14. Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética en la que todos sus términos y su diferencia d son distintos de cero. Demuestren que son válidas las igualdades

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$.

2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right)$.

3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} = \frac{1}{3d}\left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}}\right)$.

4.15. Sea

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

1) Demuestren la fórmula

$$\sum_{p=1}^{m} C_{m+1}^{p} S_n(p) = (n+1)^{m+1} - (n+1).$$

2) De acuerdo con esta fórmula calculen $S_n(3)$, haciendo uso de que

$$S_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_n(2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4.16. Demuestren las igualdades:

1) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = C_{2n+1}^{3}$. 2) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

3) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$.

4) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

5) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

6) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

7) $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

4.17. Demuestren las igualdades:

1) $\sum_{k=0}^{n} \cos(x+k\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\alpha \cos\left(x+\frac{n}{2}\alpha\right)}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

2) $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}(x+k\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\alpha \operatorname{sen}\left(x+\frac{n}{2}\alpha\right)}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

4.18. Calculen las sumas:

1) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(2k-1)x$. 2) $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$.

3) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2 kx$. 4) $\sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx$.

5) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^3 kx$. 6) $\sum_{k=1}^{n} \cos^3 kx$.

4.19. La sucesión $\{x_n\}$ está prefijada con la fórmula $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$. Expresen x_n a través de x_0, x_1 y n si:

1) $a=2$, $b=3$. 2) $a=3$, $b=-2$.

3) $a=\alpha$, $b=1-\alpha$, $\alpha \neq 2$.

---

3. Binomio de Newton. Para cualesquiera números a, b y todo $n \in \mathbb{N}$ es válida la *fórmula del binomio de Newton*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \quad (14)$$

donde

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Los sumandos $C_n^k a^{n-k} b^k$ se llaman *términos del desarrollo* (14), en tanto que los números C_n^k, *coeficientes del desarrollo* o bien *coeficientes binomiales*. Los coeficientes del desarrollo tienen las siguientes propiedades:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \quad (15)$$

Haciendo en la fórmula (14) $a=1$, $b=x$, obtenemos

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \quad (16)$$

Poniendo en la igualdad (16) $x=1$ y $x=-1$, hallamos

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0. \quad (17)$$

Ejemplo 6. Calculen la suma

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2.$$

△ Consideremos la identidad

$$(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}.$$

Igualando en esta identidad los coeficientes de x^n y empleando la fórmula (16), obtenemos

$$C_n^n C_n^0 + C_n^{n-1} C_n^1 + \ldots + C_n^{n-k} C_n^k + \ldots + C_n^0 C_n^n = C_{2n}^n.$$

En virtud de (15) esta igualdad se puede escribir en la forma $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n$.

Por consiguiente,

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n. \ \blacktriangle \tag{18}$$

Ejemplo 7. Calculen la suma

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}.$$

△ Haciendo uso de la igualdad

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)k!}=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n+1-k)}{(n+1)(k+1)!}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1},$$

obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^k=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1). \ \blacktriangle$$

4.20. Escriban la fórmula del binomio de Newton:
1) $(1+x)^5$. 2) $(a+b)^6$.
3) $(x+y)^7$. 4) $(a-b)^8$.

4.21. Hallen el término del desarrollo de $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ que contiene x^3.

4.22. Hallen el coeficiente del polinomio:
1) $(1-x+x^2)^3$ en el término con x^3.
2) $(1+2x-3x^2)^4$ en el término con x^3 y x^4.
3) $(1+x^2-x^3)^9$ en el término con x^8.
4) $(1+x^2+x^3)^7$ en el término con x^{11}.
5) $\sum_{k=3}^{15}(1+x)^k$ en el término con x^3.

4.23. Calculen las siguientes sumas:

1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)C_n^k$. 2) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_n^k$.

3) $\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k}$. 4) $\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k-1}$.

5) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_n^k$, $m<n$. 6) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2$.

4.24. Demuestren las siguientes igualdades:

1) $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$. 2) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}kC_n^k = 0$.

3) $\sum_{k=0}^{s} C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^s$. 4) $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1}$.

5) $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}C_n^k}{k+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

6) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}C_n^k}{k+1} = \frac{n}{n+1}$.

4.25. Hallen los términos del desarrollo que son números enteros:

1) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^5$. 2) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^8$.

4.26. Hallen el coeficiente máximo del polinomio:

1) $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$. 2) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$.

4.27. Hallen el término máximo del desarrollo $(1+\sqrt{2})^{30}$.

4.28. Demuestren las fórmulas:

1) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

2) $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+$
$+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc$.

3) $(a+b+c)^4 = a^4+b^4+c^4+4(a^3b+a^3c+b^3a+$
$+b^3c+c^3a+c^3b)+6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+$
$+12(a^2bc+b^2ac+c^2ab)$.

4.29. Demuestren la fórmula:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_p!} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_p^{k_p},$$

donde la sumación se lleva a cabo por todos los $k_1, k_2, \ldots, k_p$ enteros no negativos tales que $k_1+k_2+\ldots+k_p=n$.

---

4. Desigualdades numéricas. Propiedades fundamentales de las desigualdades:

1) si $a>b$, $b>c$, entonces $a>c$;
2) si $a>b$, entonces $a+c>b+c$ con toda c;
3) si $a>b$, $c>d$, entonces $a+c>b+d$;
4) si $a>b$ y $c>0$, $ac>bc$;
si $a>b$ y $c<0$, $ac>bc$;

5) si $a > b > 0$ y $c > d > 0$, $ac > bd$;
6) si $a \geqslant b > 0$ y $c > d > 0$, $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$;
7) si $a > b \geqslant 0$, $a^n > b^n$ con todo $n \in \mathbb{N}$;
8) si $a > b$, $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ con todo $n \in \mathbb{N}$;
9) si $a > b \geqslant 0$, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ con todo $n \in \mathbb{N}$;
10) si $a > b$, $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$ con todo $n \in \mathbb{N}$.

Algunas desigualdades importantes:

1) Para cualesquiera números reales a y b se verifica la desigualdad

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab. \tag{19}$$

2) La *media aritmética* de dos números no negativos no es menor que su *media proporcional*:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{20}$$

La desigualdad para la media aritmética y la media proporcional es válida para cualesquiera n números no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, o sea,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{21}$$

En (21) la desigualdad sólo tiene lugar con $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. La demostración de la desigualdad (21) se dio en el § 2 (ejemplo 8).

3) Para cualesquiera números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ se verifica la *desigualdad de Cauchy — Buniakovski*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{22}$$

En (22) la igualdad tiene lugar si y sólo si existen tales números α y β que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ y para toda $k = 1, 2, \ldots, n$ se verifica la igualdad $\alpha a_k + \beta b_k = 0$.

Ejemplo 8. Demuestren que para cualesquiera números reales a, b, c, d es válida la desigualdad

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd.$$

△ Empleando la desigualdad (21), obtenemos

$$\frac{1}{4}(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \geqslant \sqrt[4]{a^4 b^4 c^4 d^4} = |abcd| \geqslant abcd,$$

de donde se deduce la desigualdad buscada. ▲

Ejemplo 9. Demuestren la desigualdad de Cauchy — Buniakovski.

△ Si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, entonces en (22) tiene lugar la igualdad. Sea al menos uno de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distinto de cero y, en tal caso, $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Analicemos el trinomio de segundo grado con relación a x:

$$ax^2+2bx+c=\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2,$$

donde

$$a=\sum_{k=1}^{n}a_k^2,\quad b=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k,\quad c=\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

Como $(a_kx + b_k)^2 \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, el discriminante del trinomio $ax^2 + 2bx + c$ es no positivo: $b^2 \leqslant ac$. Por lo tanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

Aclaremos en qué caso en (22) tiene lugar la igualdad. Sea $b^2 = ac$. Entonces, si $a = 0$, es decir, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, haciendo $\alpha = 1$, $\beta = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$, obtenemos

$$\alpha a_k + \beta b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Sea $a \neq 0$, entonces el trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ tiene la raíz x_0 (ya que el discriminante del trinomio es igual a cero), es decir,

$$ax_0^2+bx_0+c=\sum_{k=1}^{n}(a_kx_0+b_k)^2=0.$$

De aquí se desprende que $a_kx_0 + b_k = 0$ con $k = 1, 2, \ldots, n$. Haciendo $\alpha = x_0$, $\beta = 1$, obtenemos $\alpha a_k + \beta b_k = 0$, donde $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.▲

Es fácil comprobar que cuando se verifican las condiciones $\alpha a_k + \beta b_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, la relación (22) se convierte en una igualdad.

4.30. Demuestren que para cualesquiera números a, b son válidas las desigualdades

1) $a^2 + b^2 \geqslant 2\,|ab|$. 2) $|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$.
3) $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geqslant (a^3 + b^3)^2$.
4) $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3$.

4.31. Demuestren que para cualesquiera números positivos a, b son válidas las desigualdades

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

que ligan la media armónica, la media proporcional, la media aritmética y la media cuadrática de los números a y b.

4.32. Demuestren que para cualesquiera números no negativos a, b son válidas las desigualdades

1) $a^n+b^n \leqslant (a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
2) $a^n+b^n \geqslant a^k b^{n-k}+b^k a^{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$.
3) $(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

4.33. Demuestren que si $|b| < |a|/2$, entonces

$$\frac{1}{|a-b|} < \frac{2}{|a|}.$$

4.34. Demuestren que para cualesquiera números reales a, b tales que $a^2+b^2=1$ se verifica la desigualdad $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$.

4.35. Demuestren que para cualesquiera números reales a, b, c son válidas las desigualdades:

1) $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$.
2) $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$.
3) $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant |a|+|b|+|c|$.
4) $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac)$.
5) $(ab+bc+ac)^2 \geqslant 3(a+b+c)\,abc$.
6) $(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2 \geqslant ab+bc+$ $+ac$.

4.36. Demuestren que para cualesquiera a, b, c positivos son válidas las desigualdades:

1) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geqslant a+b+c$.
2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$.
3) $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$.
4) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$.
5) $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$.
6) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

4.37. Demuestren que para cualesquiera números no negativos a, b, c son válidas las desigualdades:

1) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\,abc$.
2) $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$.
3) $(a+b+c)(ab+bc+ac) \geqslant 9abc$.
4) $(ab+bc+ac)^3 \geqslant 27abc$.
5) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc$.

6) $(a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+bc+ac)+9abc\geqslant 0$.
7) $3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(ab+ac+bc)$.
8) $a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$.

4.38. Demuestren que para todo $n\geqslant 3$ natural se verifican las desigualdades:

1) $n^{n+1}>(n+1)^n$.
2) $(n!)>n^n$.

4.39. Demuestren que para todo $n\in\mathbb{N}$ son válidas las desigualdades:

1) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$.

2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$.

3) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$. 4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<2$.

4.40. Demuestren que para todo $n\geqslant 2$ natural son válidas las desigualdades:

1) $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$. 2) $1<\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$.

3) $\sqrt{n}\leqslant\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}$.

4.41. Demuestren la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}>1.$$

4.42. Sea $a>0$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant n$. Demuestren que

$$(1+a)^n>1+C_n^k a^k.$$

4.43. Demuestren que si $x>0$, son válidas las desigualdades

$$1+\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}.$$

4.44. Demuestren que si $|x|<1$ y $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, entonces

$$(1-x)^n+(1+x)^n<2^n.$$

4.45 Sean $a>0$, $n\in\mathbb{N}$. Demuestren que

$$a+a^2+\ldots+a^{2n-1}\leqslant n(1+a^{2n})-a^n.$$

4.46. Sea $a>0$, $n\in\mathbb{N}$, $m\subset\mathbb{N}$, $m\leqslant n$. Demuestren que

$$a^m+\frac{1}{a^m}\leqslant a^n+\frac{1}{a^n}.$$

4.47. Demuestren que si A es el menor y B el mayor de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, es válida la desigualdad

$$A \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant B.$$

4.48. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales, A el menor y B el mayor de los números $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$. Demuestren que

$$A \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \leqslant B.$$

4.49. Demuestren que para cualesquiera números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es válida la desigualdad

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \leqslant n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).$$

4.50. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números positivos, M la mayor y m, la menor de las fracciones $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$. Demuestren que

$$m \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leqslant M.$$

4.51. Demuestren que para cualesquiera números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ que satisfacen las condiciones

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$$

es válida la desigualdad

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant 1.$$

4.52. Demustren que para cualesquiera números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es válida la desigualdad

$$(a_1+a_2+\ldots a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

4.53. Demustren que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son tales números positivos que $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, entonces

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

4.54. Sea $a_i > -1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y que los números a_i tienen un mismo signo. Demuestren que la desigualdad

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 1+a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

4.55. Sean $x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales tomados al azar, $\alpha > 0$. Demuestren que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

4.56. Demuestren que para cualesquiera números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son válidas las desigualdades

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}},$$

que ligan la media armónica, la media proporcional, la media aritmética y la media cuadrática de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

4.57. Demuestren que si

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n,\quad b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n,$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,\frac{b_1+b_2+\ldots b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}.$$

4.58. Sean los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ términos consecutivos de una progresión aritmética. Demuestren que

$$\sqrt{a_1a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_n}{2}.$$

4.59. Demuestren que si A es el menor, B, el mayor de los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, son válidas las desigualdades:

1) $A \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant B.$

2) $A \leqslant \sqrt{\frac{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m}{n}} \leqslant B.$

3) $A \leqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant B.$

4.60. Demuestren que para cualesquiera números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2 \ldots b_n$ son válidas las desigualdades:

1) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$

2) $\left|\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$

3) $\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k^2+b_k^2)^{1/2}.$

4.61. Demuestren que si $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, ..., $a_n \geqslant 0$ y $p \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{\sum_{h=1}^{n} a_h}{n}\right)^p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} a_h^p.$$

§ 5. Números complejos

1. Definición de números complejos. Propiedades de las operaciones. Reciben el nombre de *números complejos* las expresiones de la forma $a + bi$ (a y b son números reales, i, cierto símbolo) para las cuales las nociones de igualdad y operaciones de adición y multiplicación se introducen del siguiente modo:

a) dos números complejos $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ son iguales si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$;

b) se llama *suma* de los números $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ el número

$$a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\, i;$$

c) se llama *producto* de los números $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ el número

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

Así, pues, la adición y multiplicación de números complejos se efectúa de acuerdo con las fórmulas

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\, i, \qquad (1)$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \qquad (2)$$

El conjunto de todos los números complejos se designa con $\mathbb{C}$. Los elementos del conjunto $\mathbb{C}$ (números complejos) se designan con frecuencia mediante una letra, con la particularidad de que, por regla, para ello se emplean las letras z, w, en ocasiones con índices, p. ej., z_1, z_2, w_0. La igualdad $z = a + bi$ significa que el número complejo $a + bi$ está designado con la letra z.

Las operaciones de adición (1) y multiplicación (2) poseen las siguientes propiedades:

1) conmutatividad de la suma

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

2) asociatividad de la suma

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$$

3) para cualesquiera números complejos z_1 y z_2 existe tal número complejo z que $z_1 + z = z_2$. Este número se llama *diferencia* de los números z_2 y z_1 y se designa con $z_2 - z_1$. La diferencia de los nú-

meros complejos $z_2 = a_2 + b_2i$ y $z_1 = a_1 + b_1i$ se halla con la fórmula

$$z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i; \quad (3)$$

4. conmutatividad de la multiplicación

$$z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

5. asociatividad de la multiplicación

$$(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2 z_3);$$

6. para cualesquiera números complejos $z_1 \neq 0 + 0i$ y z_2 existe tal número z que $z_1 z = z_2$. Este número se denomina *cociente* de los números complejos z_2 y z_1 y se designa con $\frac{z_2}{z_1}$ o bien z_2/z_1. La división por el número complejo $0 + 0i$, llamado cero, es imposible. El cociente z_2/z_1 de dos números complejos $z_2 = a_2 + b_2i$ y $z_1 = a_1 + b_1i$, a condición de que el divisor sea distinto de cero, puede ser hallado con la fórmula

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1^2 + b_1^2}\, i; \quad (4)$$

7. distributividad

$$z_1\,(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

El número complejo de la forma $a + 0i$ se identifica con el número real a, es decir, se considera que $a + 0 \cdot i = a$. P. ej.,

$$0 + 0 \cdot i = 0, \quad 1 + 0 \cdot i = 1, \quad -1 + 0 \cdot i = -1.$$

Así, pues, un conjunto de números reales es subconjunto de un conjunto de números complejos, o sea, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

El número $0 + bi$ lleva el nombre de *número puramente imaginario* y se designa con bi. P. ej., $0 - 2i = -2i$, $0 + 1 \cdot i = i$. El número real a se denomina parte *real* del número complejo $a + bi$. El número real b recibe el nombre de *parte imaginaria* del número complejo $a + bi$. Los números $a + bi$ y $a - bi$, o sea, aquellos que sólo se diferencian por el signo de la parte imaginaria, llevan el nombre de números complejos *conjugados*. El número conjugado a z se designa con $\bar{z}$. El número complejo i se suele denominar *unidad imaginaria*. Para ella es válida la fórmula

$$i^2 = -1. \quad (5)$$

La fórmula (2) de multiplicación de números complejos no hay que retenerla en la memoria, ya que ella se obtiene si multiplicamos de modo formal los binomios $a_1 + b_1i$ y $a_2 + b_2i$ según la regla habitual de multiplicación de binomios y, a continuación, de acuerdo con la fórmula (5), sustituimos i^2 por -1.

Ejemplo 1. Hallen la suma y la multiplicación de los números complejos

$$z_1 = -2 + 3i, \; z_2 = 7 - 8i.$$

△ Según la fórmula (1), hallamos

$$z_1 + z_2 = (-2 + 7) + (3 - 8)\, i = 5 - 5i.$$

El producto se halla multiplicando de modo formal los binomios $(-2 + 3i)$ y $(7 - 8i)$:

$$z_1 z_2 = (-2 + 3i)(7 - 8i) = -14 + 16i + 21i - 24i^2 =$$
$$= 10 + 37i. \; ▲$$

Ejemplo 2. Hallen la suma y el producto de números complejos conjugados.

△ Sea $z = x + yi$, entonces $\bar{z} = x - yi$.
La suma la hallamos con la fórmula (1):

$$z_1 + z_2 = (x + yi) + (x - yi) = 2x.$$

El producto se halla según la regla de multiplicación de binomios:

$$z_1 z_2 = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Así, pues, la suma de números complejos conjugados siempre es un número real, en tanto que el producto también es un número real, más aún, no negativo. ▲

Ejemplo 3. Se dan los números complejos $z_1 = -1 + 6i$ y $z_2 = 2 + 5i$. Hallen la diferencia $z_2 - z_1$ y el cociente z_2/z_1.

△ De acuerdo con la fórmula (3) hallamos

$$z_2 - z_1 = (2 + 5i) - (-1 + 6i) = 3 - i.$$

El cociente se halla con la fórmula (4):

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+5i}{-1+6i} = \frac{(-1)\cdot 2 + 6\cdot 5}{(-1)^2 + 6^2} + \frac{(-1)\cdot 5 - 2\cdot 6}{(-1)^2 + 6^2}\, i = \frac{28}{37} - \frac{17}{37}\, i. \; ▲$$

Ejemplo 4. Verifiquen las operaciones

$$\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}.$$

△ Después de multiplicar los números en el denominador, obtenemos

$$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \frac{3+i}{1-2i+i+2} = \frac{3+i}{3-i}.$$

A continuación, tenemos la posibilidad de hacer uso de la fórmula (4), pero es más cómodo operar de otro modo. Multipliquemos el nume-

rador y denominador de la fracción por el número conjugado al denominador, entonces

$$z=\frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{9+6i-1}{9+1}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i. \ \blacktriangle$$

5.1. Demuestren las propiedades 1—7 de las operaciones de adición y multiplicación de números complejos.

5.2. Demuestren la fórmula (5): $i^2=-1$.

5.3. Hallen la suma y el producto de los números complejos z_1 y z_2 si:

1) $z_1=4+5i$, $z_2=3-2i$.
2) $z_1=0,5-3,2i$, $z_2=1,5-0,8i$.
3) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

5.4. Hallen la diferencia z_2-z_1 y el cociente z_2/z_1 si:

1) $z_1=3+4i$, $z_2=0,4-0,2i$.
2) $z_1=1-2i$, $z_2=0,6$.
3) $z_1=\sqrt{5}-i$, $z_2=\sqrt{5}-2i$.

5.5. Hallen la parte imaginaria z si:

1) $z=(2-i)^3(2+11i)$. 2) $z=\dfrac{2-3i}{1+4i}+i^6$.

3) $z=\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}$.

5.6. Verifiquen las operaciones:

1) $i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20}$. 2) $2i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

3) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$. 4) $\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$.

5) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

5.7. Determinen con qué valores reales de x e y los números complejos

$$z_1=y^2-7y+9xi \text{ y } z_2=-12+20i+x^2i$$

son iguales.

5.8. Determinen con qué valores reales de x e y los números complejos

$$z_1=8x^2-20i^9 \text{ y } z_2=9x^2-4+10yi^3$$

son conjugados.

5.9. Resuelvan las ecuaciones:

1) $(1+2i)(z-i)+(4i-3)(1-iz)+1+7i=0$.

2) $z^2+\bar{z}=0$.

5.10. Resuelvan el sistema

$$\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i. \end{cases}$$

5.11. Demuestren las igualdades:

1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$. 2) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$.

3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$. 4) $\overline{(z_1/z_2)}=\bar{z}_1/\bar{z}_2$, $z_2\neq 0$.

5) $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$, $n\in\mathbb{N}$.

---

2. Representación gráfica de números complejos. Módulo y argumentos del número complejo. A cada número complejo $a+bi$ se puede poner en correspondencia el punto M $(a; b)$ del plano de coordenadas y, a la inversa, a cada punto M $(a; b)$ del plano, el número complejo $a+bi$. La correspondencia establecida de semejante forma es biunívoca. Ella proporciona la posibilidad de considerar los números complejos como puntos del plano de coordenadas. Éste recibe el nombre de plano complejo. El eje de abscisas lleva el nombre de *eje real* (en él se disponen los puntos que corresponden a los números reales), el de ordenadas, *eje imaginario* (en él yacen los puntos correspondientes a los números imaginarios).

Con frecuencia, es cómodo interpretar el número complejo $a+bi$ como el vector $\overrightarrow{OM}$ (fig. 6). A cada vector del plano con ori-

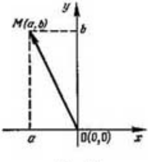


Fig. 6

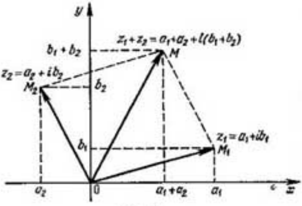


Fig. 7

gen en el punto O (0; 0) y extremo en el punto M $(a; b)$ corresponde el número complejo $a+bi$ y viceversa. Al punto O (0; 0) le corresponde el vector nulo.

La correspondencia establecida entre un conjunto de números complejos, por un lado, y los conjuntos de puntos o vectores del plano, por otro, permite denominar los números complejos puntos o vectores y, p. ej., hablar del vector $a + bi$ o del punto $a + bi$.

La representación de los números complejos con vectores permite dar una sencilla interpretación geométrica de las operaciones con ellos. P. ej., la suma de números complejos puede ser entendida geométricamente como un vector igual a la suma de los vectores correspondientes a los números complejos sumandos (fig. 7).

Lleva el nombre de *módulo del número complejo* la longitud del vector que corresponde a dicho número. Para el módulo del número z se emplea la designación $|z|$. El módulo del número complejo $z = a + bi$ puede calcularse con la fórmula

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (6)$$

Recibe el nombre de *argumento del número complejo* $z \neq 0$ el ángulo entre el sentido positivo del eje real y el vector z, con la particularidad de que dicho ángulo se considera positivo si contamos en sentido antihorario y negativo, si contamos en sentido horario. Para el número $z = 0$ argumento no se determina.

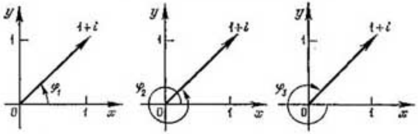


Fig. 8

A diferencia del módulo, el argumento del número complejo se determina no unívocamente. P. ej., (fig.8), los argumentos del número $z = 1 + i$ son los siguientes ángulos: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$; en general, cada uno de los ángulos $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, donde k es un número entero tomado al azar.

Cualesquiera dos argumentos de un número complejo se distinguen entre sí por un número múltiplo de 2π. Para designar el conjunto de todos los argumentos del número $z = a + bi$ se hace uso del

símbolo arg z o bien arg $(a + bi)$. Si se trata de cualquiera de los argumentos, éste, por regla, se designa con la letra φ.

Las partes real e imaginaria del número complejo $z = a + bi$ se expresan con su módulo $|z| = r$ y su argumento φ del modo siguiente (fig. 9):

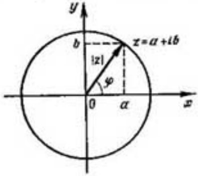


Fig. 9

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\,\mathrm{sen}\,\varphi. \end{cases} \qquad (7)$$

Así, pues, los argumentos φ del número complejo pueden ser hallados del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \mathrm{sen}\,\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \qquad (8)$$

Los argumentos del número complejo $z = a + bi$ $(a \neq 0)$ se pueden determinar de la ecuación

$$\mathrm{tg}\,\varphi = b/a, \qquad (9)$$

que es el corolario del sistema (8). Esta ecuación no es equivalente al sistema (8), ella tiene mayor cantidad de raíces, pero la selección de las raíces necesarias (argumentos del número complejo) no presenta dificultades, ya que de la forma algebraica de anotación del número complejo siempre se advierte en qué cuadrante del plano complejo se encuentra él.

Ejemplo 5. Hallen los módulos de los números complejos

$$z_1 = 2 - i, \quad z_2 = 2\sqrt{6} + 5i, \quad z_3 = i.$$

△ Con la fórmula (6) hallamos

$$|z_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \quad |z_2| = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 5^2} = 7.$$

Para calcular el módulo de z_3 no es necesario emplear la fórmula (6). La longitud del vector $z_3 = i$ es, evidentemente, igual a uno, por ello, $|z_3| = 1$.▲

Ejemplo 6. Hallen los argumentos de los números complejos

$$z_1 = -i, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -1 + i.$$

△ Habiendo construido los vectores z_1, z_2, z_3 hallamos uno de los argumentos de cada número: $\varphi_1 = -\pi/2$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 3\pi/4$. Por consiguiente,

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \arg z_2 = 2\pi k, \ \arg z_3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$$

donde k es un número entero tomado al azar. ▲

Ejemplo 7. Hallen los argumentos del número complejo $z = -1-\sqrt{3}i$.

△ En este caso $a = -1$, $b = -\sqrt{3}$. El sistema (8) tiene la forma

$$\begin{cases} \cos\varphi = -1/2, \\ \operatorname{sen}\varphi = -\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallamos $\varphi_k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$\arg z = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \ ▲$$

Ejemplo 8. Hallen los argumentos del número complejo $z = -\sqrt{3}+i$.

△ Cada uno de los argumentos φ del número $z = -\sqrt{3}+i$ satisface la ecuación

$$\operatorname{tg}\varphi = -1/\sqrt{3}.$$

De esta ecuación se desprende que

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Como el número $z = -\sqrt{3}+i$ está situado en el segundo cuadrante del plano complejo, sus argumentos serán los números φ_k con lo- valores impares de k, de modo que

$$\arg(-\sqrt{3}+i) = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n+1) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}. \ ▲$$

5.12. En el plano complejo se dan los puntos z_1, z_2, z_3 que son los vértices de un triángulo. Hallen el punto de intersección de sus medianas.

5.13. En los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ del plano complejo yacen los puntos materiales con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente. Hallen el centro de gravedad del sistema de puntos materiales.

5.14. En el plano complejo se dan los puntos z_1, z_2, z_3 que son los tres vértices consecutivos de cierto paralelogramo. Hallen el cuarto vértice de la figura.

5.15. En el plano complejo están dados los puntos $z_1 = 6+8i$, $z_2 = 4-3i$. Hallen los números complejos que corresponden a los puntos en la bisectriz del ángulo formado con los vectores z_1 y z_2.

5.16. Hallen el módulo del número complejo z:
1) $z = -4$. 2) $z = -i$. 3) $z = -5 - 2\sqrt{6}\,i$.
4) $z = 1 + \cos(8\pi/7) + i \operatorname{sen}(8\pi/7)$.
5.17. Resuelvan la ecuación:
1) $z^2 + 3|z| = 0$. 2) $z^2 + 2|z| = 1$.
3) $z^2 + |z|^2 = 0$. 4) $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$.
5.18. Demuestren las igualdades:
1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. 2) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, $z_2 \neq 0$.
5.19. Demuestren las desigualdades

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

5.20. Demuestren que $|z_1 - z_2|$, es decir, el módulo de la diferencia de los números complejos z_1 y z_2, es igual a la distancia entre los puntos z_1 y z_2 en el plano complejo.
5.21. Hallen el conjunto de puntos del plano complejo prefijado con la condición:
1) $|z + 1| = 1$. 2) $|z - i| < |z + i|$.
3) $|z + 2i - 1| \leqslant 2$. 4) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$.
5) $|z - 2| + |z + 2| = 26$. 6) $\operatorname{sen}|z| > 0$.
7) $\log|z - 10i| < 1$. 8) $|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0$.
5.22. Resuelvan el sistema de ecuaciones:
1) $|z + 1 - i| = |3 + 2i - z| = |z + i|$.
2. $\begin{cases} |z+1| = |z+2|, \\ |3z+9| = |5z + 10i|. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (1-i)\bar{z} = (1+i)z, \\ |z^2 + 51i| = 1. \end{cases}$
5.23. Demuestren que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} |z + 1 - i| = \sqrt{2}, \\ |z| = 3 \end{cases}$$

no tiene soluciones.
5.24. Hallen los argumentos del número complejo:
1) $z = i$. 2) $z = -1$. 3) $z = 8$. 4) $z = 2 - 2i$.
5) $z = \operatorname{sen}(\pi/9) - i\cos(\pi/9)$. 6) $z = 1 + \cos(\pi/7) + i \operatorname{sen}(\pi/7)$.
5.25. ¿Qué conjunto de puntos del plano complejo se prefija con la condición:
1) uno de los argumentos del número z es igual a cero.
2) uno de los argumentos es igual a $5\pi/2$.
3) uno de los argumentos φ satisface las desigualdades $2\pi < \varphi < 3\pi$.
4) uno de los argumentos φ satisface las desigualdades $0 \leqslant \varphi < 2\pi$?
5.26. ¿Qué conjunto de puntos del plano complejo se prefija con la condición:
1) $\arg z = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2) $\pi(8k + 1)/4 < \arg(z + i) < \pi(4k + 1)/2$, $k \in \mathbb{Z}$?
5.27. Entre los números complejos z que satisfacen la condición:

1) $|z + 1 - i| = 1$, 2) $|z + 3 - \sqrt{3}i| \leqslant \sqrt{3}$, hallen el número que tenga el argumento positivo menor.

5.28. ¿Dónde se halla el punto z^2, si el punto z pertenece a la recta $\operatorname{Im} z = 1$?

5.29. ¿Dónde se halla el punto z del plano complejo si el punto z^2 pertenece al eje imaginario?

5.30. Sea $z \neq \pm 1$. Demuestren que el punto $(z - 1)/(z + 1)$ pertenece al eje imaginario si y sólo si el punto z pertenece a la circunferencia de radio $R = 1$ con centro en el punto $z = 0$.

5.31. ¿Puede el punto $z = 0$ pertenecer a cierto polígono cuyos vértices se hallan en los puntos

$$z_k = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{k-1},\ |z| < 1?$$

3. Forma trigonométrica del número comlejo. Multiplicación y división de números complejos escritos en forma trigonométrica Cada número complejo $z = a + bi$, distinto de cero, puede ser representado en la forma

$$z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi),$$

donde r es el módulo del número, φ, uno (cualquiera) de sus argumentos. Esta representación del número lleva el nombre de *forma trigonométrica del número complejo*. La anotación del número en forma $z = a + bi$ recibe el nombre de *forma algebraica del número complejo*.

Con el fin de pasar de la forma algebraica del número a la trigonométrica es suficiente hallar el módulo del número complejo y uno de sus agrumentos.

Dos números complejos escritos en forma trigonométrica

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1) \text{ y } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2)$$

son iguales si y sólo si

$$r_1 = r_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\quad k \in \mathbb{Z},$$

es decir, cuando los módulos de los números son iguales y los argumentos se diferencian en $2\pi k$, donde k es cierto número entero.

La anotación de los números complejos en forma trigonométrica se emplea para la multiplicación y división de números. Sean

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1) \text{ y } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2)$$

dos números escritos en forma trigonométrica. Entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{10}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{11}$$

Por consiguiente,

$$|z_1z_2| = r_1r_2, \ \arg(z_1z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}, \ \arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Así, pues, el módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de los módulos de dichos números, la suma de los argumentos de los factores es el argumento del producto; el módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los módulos de dichos números, la diferencia de los argumentos del dividendo y el divisor es el argumento del cociente.

Ejemplo 9. Escriban los números $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$ en forma trigonométrica.

△ Como $|z_1| = \sqrt{2}$ y $\varphi_1 = -3\pi/4$, entonces

$$z_1 = \sqrt{2}\,(\cos(-3\pi/4) + i\,\mathrm{sen}\,(-3\pi/4)).$$

El módulo de z_2 es igual a 2, y uno de los argumentos de z_2 es el ángulo $\varphi_2 = \pi$, por ello

$$z_2 = 2\,(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi).$$

Tomando en consideración que $|z_3| = 1$ y $\varphi_2 = \pi/2$ es uno de los argumentos de z_3, obtenemos

$$z_3 = \cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}\,(\pi/2).▲$$

Ejemplo 10. Escriban los números

$$z_1 = 2\cos(7\pi/4) - 2i\,\mathrm{sen}\,(\pi/4), \quad z_2 = -\cos(\pi/17) + i\,\mathrm{sen}\,(\pi/17)$$

en forma trigonométrica.

△ Para escribir z_1 y z_2 en forma trigométrica no hay necesidad de hallar previamente sus módulos y argumentos (aunque hacerlo no presenta ninguna dificultad). Hagamos uso de que

$$\cos(7\pi/4) = \cos(-\pi/4), \text{ en tanto que}$$
$$-\mathrm{sen}\,(\pi/4) = \mathrm{sen}\,(-\pi/4)$$

y obtenemos de inmediato la forma trigonométrica del primer número

$$z_1 = 2\,(\cos(-\pi/4) + i\,\mathrm{sen}\,(-\pi/4)).$$

Por analogía, teniendo en cuenta que

$$-\cos\frac{\pi}{17} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \cos\frac{16\pi}{17},$$

en tanto que

$$\operatorname{sen} \pi/17 = \operatorname{sen} (\pi - \pi/17) = \operatorname{sen} 16\pi/17,$$

obtenemos

$$z_2 = \cos (16\pi/17) + i \operatorname{sen} (16\pi/17).\blacktriangle$$

Ejemplo 11. Hallen el producto de los números $z_1 = \sqrt{2} (\cos (11\pi/4) + i \operatorname{sen} (11\pi/4))$ y $z_2 =$

$$= \sqrt{8} (\cos (3\pi/8) + i \operatorname{sen} (3\pi/8)).$$

△ Como $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{8}$, entonces $|z_1z_2| = 4$. El argumento del producto z_1z_2 será la suma

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 11\pi/4 + 3\pi/8 = 25\pi/8.$$

Por consiguiente,

$$z_1z_2 = 4 (\cos (25\pi/8) + i \operatorname{sen} (25\pi/8)),$$

o bien

$$z_1z_2 = 4 (\cos (9\pi/8) + i \operatorname{sen} (9\pi/8)).\blacktriangle$$

Ejemplo 12. Escriban en forma trigonométrica el número complejo

$$z = \frac{(\cos (\pi/3) - i \operatorname{sen} (\pi/3)) (\sqrt{3} + i)}{i - 1}.$$

△ El número $z_1 = \cos (\pi/3) - i \operatorname{sen} (\pi/3)$ tiene módulo igual a 1 y argumento $\varphi_1 = -\pi/3$; el número $z_2 = \sqrt{3} + i$ tiene módulo 2 y argumento $\varphi_2 = \pi/6$; el número $z_3 = i - 1$ tiene módulo $\sqrt{2}$ y argumento $\varphi_3 = 3\pi/4$. Por ello,

$$|z| = \frac{|z_1|\ |z_2|}{|z_3|} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

y el argumento

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11}{12}\pi.$$

Por lo tanto,

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{11}{12}\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{11}{12}\pi \right) \right). \blacktriangle$$

4. Elevación a una potencia. La potencia del número complejo z con el exponente $n \in \mathbb{N}$ se determina con la fórmula

$$z^n = zz \ldots z,$$

en la que el segundo miembro contiene n factores.

Sea $z = r\ (\cos\varphi + i\ \mathrm{sen}\ \varphi)$, entonces

$$(r\ (\cos\varphi + i\ \mathrm{sen}\ \varphi))^n = r^n\ (\cos n\varphi + i\ \mathrm{sen}\ n\varphi), \qquad (12)$$

es decir, al elevar un número complejo a una potencia con exponente natural, su módulo se eleva a la potencia con el mismo exponente, en tanto que el argumento se multiplica por el exponente de la potencia.

Ejemplo 13. Eleven a la novena potencia el número complejo

$$z = \sqrt{3} - i.$$

△ El módulo de z es igual a 2 y uno de los argumentos es el ángulo $\varphi = -\pi/6$, por lo que el módulo del número z^9 es igual a 2^9 y el argumento del número z, a $9\varphi = -3\pi/2$. Por lo tanto,
$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9\ (\cos(-3\pi/2) + i\ \mathrm{sen}\ (-3\pi/2)) = 512i$. ▲

5. Radicación. El número w se llama raíz del orden n del número z (se designa $\sqrt[n]{z}$), si $w^n = z$.

P. ej., los números $w_1 = i$ y $w_2 = -i$ son las raíces del orden 2 (raíces cuadradas) del número $z = -1$, ya que $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = -1$.

De la definición se desprende que cada solución de la ecuación $w^n = z$ es la raíz del orden n del número z. Con otras palabras, para extraer una raíz de orden n del número z es suficiente resolver la ecuación $w^n = z$.

Sea $z = r\ (\cos\varphi + i\ \mathrm{sen}\ \varphi)$, entonces la ecuación $w^n = z$ tiene n soluciones (raíces del orden n de z), que pueden ser halladas con la fórmula

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\ \mathrm{sen}\ \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right), \qquad (13)$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

De esta fórmula se deduce que todas las raíces de orden n del número z tienen un mismo módulo $\sqrt[n]{r}$, pero diferentes argumentos que difieren entre sí por los sumandos múltiplos del número $2\pi/n$. De aquí se desprende que los números complejos, raíces del orden n del número complejo z, corresponden a los puntos en el plano complejo situados en los vértices de un n-ágono regular inscrito en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en el punto $z = 0$ (véase el ejemplo 14).

Señalemos que el símbolo $\sqrt[n]{z}$ no tiene un sentido unívoco. Por ello, al emplearlo hay que comprender claramente lo que se entiende por él. P. ej., empleando la anotación $\sqrt{-1}$ hay que poner atención, para que esté claro, si por este símbolo se entiende un par de

números complejos i e $-i$ o bien uno y, si es así, cuál de ellos precisamente.

Ejemplo 14. Hallen todos los valores de $\sqrt[4]{-16}$.

△ Escribamos el número $z = -16$ en forma trigonométrica

$$z = -16 = 16 (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi).$$

De acuerdo con la fórmula (13), obtenemos

$$w_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)\right) (k=0, 1, 2, 3).$$

Por consiguiente,

$$w_0 = 2(\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$
$$w_1 = 2(\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$
$$w_2 = 2(\cos(5\pi/4) + i \operatorname{sen}(5\pi/4)) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$
$$w_3 = 2(\cos(7\pi/4) + i \operatorname{sen}(7\pi/4)) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

En la fig. 10 están representados los cuatro valores de $\sqrt[4]{-16}$. Los puntos correspondientes a los números w_0, w_1, w_2, w_3 se hallan

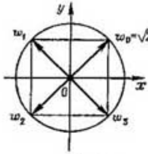


Fig. 10

en los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio $R = 2$ con centro en el punto $z = 0$.▲

Ejemplo 15. Escriban el número $\dfrac{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}$ en forma algebraica a condición de que las partes reales de las raíces $\sqrt{5+12i}$ y $\sqrt{5-12i}$ son negativas.

△ Para extraer la raíz cuadrada del número $5 + 12i$ hagamos $\sqrt{5 + 12i} = x + iy$, entonces

$$5 + 12i = x^2 + 2xyi - y^2$$

y, por lo tanto, x e y satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Después de resolverlo, obtenemos dos soluciones (3; 2) y (—3; —2). De acuerdo con el planteamiento, la parte real de $\sqrt{5+12i}$ es negativa y, por ello, $\sqrt{5+12i}=-3-2i$. De forma análoga, hallamos $\sqrt{5-12i}=-3+2i$. Así, pues,

$$z=\frac{-3-2i-(-3+2i)}{-3-2i+(-3+2i)}=\frac{2}{3}i. \ \blacktriangle$$

5.32. Representen el número complejo z en forma trigonométrica:

1) $z=-\sqrt{3}+i$. 2) $z=-1$. 3) $z=-\cos\frac{\pi}{12}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

4) $z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\operatorname{sen}\frac{10\pi}{9}$. 5) $z=\operatorname{tg}1-i$.

5.33. Escriban el número complejo z en las formas algebraica y trigonométrica:

1) $z=\dfrac{i(\cos(5\pi/3)+i\operatorname{sen}(5\pi/3))}{\cos(\pi/6)+i\operatorname{sen}(\pi/6)}$.

2) $z=\dfrac{1}{\cos(4\pi/3)-i\operatorname{sen}(4\pi/3)}$. 3) $z=\dfrac{i}{(1+i)^2}$.

4) $z=\dfrac{-\cos(5\pi/12)+i\operatorname{sen}(5\pi/12)}{\cos(13\pi/12)-i\operatorname{sen}(13\pi/12)}$.

5) $z=\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}$.

5.34. Representar en forma trigonométrica el número complejo z:

1) $z=\dfrac{5(\cos 100^\circ+i\operatorname{sen}100^\circ)i}{3(\cos 40^\circ-i\operatorname{sen}40^\circ)}$.

2) $z=\dfrac{\operatorname{sen}(2\pi/5)+i(1-\cos(2\pi/5))}{i-1}$.

5.35. El vector $z_1=2+5i$, después de girarlo a un ángulo $\pi/2$ en sentido horario y alargar doblemente, se convierte en el vector z_2. Hallen el número complejo que corresponde al vector z_2.

5.36. El vector $z=-2+3i$ está girado a 180° y alargado 1,5 veces. Hallen el número complejo que corresponde al vector obtenido.

5.37. Hallen el número complejo z en forma algebraica:

1) $z=\left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$. 2) $z=(\cos 31^\circ+i \operatorname{sen} 31^\circ)^{-10}$.

3) $z=\left(\frac{i^9+\sqrt{3}\, i^6}{4}\right)^5$. 4) $z=\frac{(2i)^7}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}$.

5) $z=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

5.38. Escriban el número complejo z en forma trigonométrica:

1) $z=(\sqrt{3}-i)^{100}$. 2) $z=\left(\frac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^6$.

3) $z=\frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n\in \mathbb{N}$. 4) $z=(\operatorname{tg} 2-i)^4$.

5) $z=\left(\operatorname{sen}\frac{6\pi}{5}+i\left(1+\cos\frac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

5.39. ¿Con qué valores enteros de n es válida la igualdad

$$(1+i)^n=(1-i)^n?$$

5.40. Hallen todos los valores de $\sqrt[n]{z}$ si:

1) $z=-1$, $n=3$. 2) $z=8i$, $n=3$.
3) $z=1$, $n=5$. 4) $z=1+i$, $n=8$.

5.41. Resuelvan las ecuaciones:

1) $z^3=1+i$. 2) $z^4+1=0$. 3) $z^5=1+\sqrt{3}i$.
4) $z^6+64=0$. 5) $z^2=\bar{z}^3$. 6) $z^n=\bar{z}$, $n\in \mathbb{N}$.

5.42. Sean A_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ los vértices de un n-ágono regular inscrito en una circunferencia de radio unitario. Hallen:

1) $|A_1A_2|^2+|A_1A_3|^2+\ldots+|A_1A_n|^2$.
2) $|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\ldots|A_1A_n|$.

---

6. Potencia compleja del número e. La operación de elevación del número e a la potencia compleja $z=x+yi$ se determina con la fórmula

$$e^z=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y). \qquad (14)$$

P. ej.,

$$e^{1+i}=e(\cos 1+i\operatorname{sen} 1),$$
$$e^{\pi i/2}=\cos(\pi/2)+i\operatorname{sen}(\pi/2)=i,$$
$$e^{\pi i}=\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi=-1.$$

Propiedades fundamentales de la potencia compleja del número e: 1) a) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, b) $e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$,

es decir, para e^z se conservan las propiedades habituales de la potencia.

2) Para los valores reales de $z = x + 0 \cdot i$

$$e^z = e^{x+0i} = e^x,$$

es decir, la potencia compleja del número e se transforma, en este caso, en una potencia con exponente real.

3) Para todo número complejo z es válida la igualdad

$$e^{z+2\pi ni} = e^z, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{15}$$

en particular, $e^{2\pi ni} = 1$.

De la fórmula (14), con $z = i\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, se obtiene una importante fórmula

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi \tag{16}$$

llamada *fórmula de Euler*.

Cada número complejo $z \neq 0$ se puede representar en la forma

$$z = re^{i\varphi}, \tag{17}$$

donde r es el módulo del número z, φ, uno (cualquiera) de los argumentos. Esta representación de z lleva el nombre de *forma exponencial del número complejo*. Para los números complejos escritos en forma exponencial las fórmulas de multiplicación, división, elevación a una potencia natural, extracción de la raíz, toman la siguiente forma compleja:

a) si $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, entonces

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{18}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \tag{19}$$

b) si $z = re^{i\varphi}$, entonces

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \tag{20}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right) i} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{21}$$

Ejemplo 16. Representen en forma exponencial el número complejo

$$z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8} i.$$

△ Hallamos el módulo del número

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

y uno de sus argumentos

$$\operatorname{tg}\varphi = -1/\sqrt{3},\quad \varphi = -\pi/6$$

(ya que z se encuentra en el cuarto cuadrante). Por consiguiente,

$$z = \frac{1}{4}e^{-\pi i/6}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 17. Escriban en forma exponencial el número complejo

$$z = \frac{(-\sqrt{3}+i)(\cos(\pi/12) - i\operatorname{sen}(\pi/12))}{1-i}.$$

△ Representemos cada uno de los números $-\sqrt{3}+i$, $\cos(\pi/12) - i\operatorname{sen}(\pi/12)$, $1-i$ en forma exponencial

$$-\sqrt{3}+i = 2e^{5\pi i/6},$$

$$\cos(\pi/12) - i\operatorname{sen}(\pi/12) = \cos(-\pi/12) + i\operatorname{sen}(-\pi/12) = e^{-\pi i/12},$$

$$1-i = \sqrt{2}e^{-\pi i/4}.$$

Empleando las fórmulas (18) y (19), obtenemos

$$z = \frac{2e^{5\pi i/6}e^{-\pi i/12}}{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}} = \sqrt{2}\,e^{\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\pi}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 18. Representemos en forma exponencial el número complejo $z = (-1+i)^5$.

△ Escribamos en forma exponencial la base de la potencia y apliquemos la fórmula (20):

$$(-1+i)^5 = (\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4})^5 = 4\sqrt{2}\,e^{15\pi i/4} = 4\sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 19. Escriban todos los valores de la raíz $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ en forma exponencial.

△ Representamos el número $\sqrt{3}+i$ en forma exponencial y aplicamos la fórmula (21):

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[4]{2e^{\pi i/6}} = \sqrt[4]{2}e^{\pi i(12k+1)/24} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \ \blacktriangle$$

5.43. Demuestren las propiedades 1) — 3) de la potencia compleja del número e.

5.44. Sea $z = x + iy$; hallen el módulo y los argumentos del número e^z.

5.45. Representen z en forma algebraica:

1) $z = e^{2-i}$. 2) $z = e^{-\frac{3}{2}\pi i + 12\pi i}$. 3) $z = e^{3i+7+3\pi i - \frac{\pi}{2}i}$.

5.46. Representen en forma exponencial el número complejo: 1) $z = -\sqrt{12} - 2i$. 2) $z = -\cos(\pi/7) + i\operatorname{sen}(\pi/7)$.

5.47. Escriban en las formas exponencial y algebraica el número complejo:

1) $z = 5e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot 0.2e^{\frac{\pi i}{6}} (\cos(5\pi/12) - i \operatorname{sen}(5\pi/12))$.

2) $z = \left(\frac{1}{2} e^{\pi i/12}\right)^{-3}$. 3) $z = (\sqrt{3} - i)^6$.

4) $z = \frac{1}{(\cos 12^\circ + i \operatorname{sen} 12^\circ)^5}$. 5) $z = \frac{e^{-\pi i/3}(1 + \sqrt{3}i)^7}{i}$.

5.48. Demuestren la fórmula

$$(1 + \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^{2n} = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} e^{in\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

5.49. Empleando la fórmula (21) escriban en forma exponencial todos los valores de $\sqrt[n]{z}$:

1) $z = 1$, $n = 3$. 2) $z = -1$, $n = 5$.
3) $z = -4 + \sqrt{48}i$, $n = 3$. 4) $z = -1 - \sqrt{3}i$, $n = 4$.

5.50. Hallen las sumas:

1) $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi}$. 2) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\varphi$, $\varphi \neq 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$.

3) $\sum_{k=0}^{n} \cos k\varphi$, $\varphi \neq 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$.

§ 6. Polinomios. Ecuaciones algebraicas. Fracciones racionales

1. Polinomios. Ecuaciones algebraicas. Llevan el nombre de *polinomios* con relación a la variable z las expresiones de la forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{1}$$

donde n es número entero no negativo, a_k ($k = 0, 1, \ldots, n$), ciertos números.

Suelen decir que el polinomio (1) está dado sobre el conjunto de números complejos si $a_k \in \mathbb{C}$ y sobre un conjunto de números reales si $a_k \in \mathbb{R}$.

Los números a_k se denominan *coeficientes* del polinomio; el coeficiente a_0 se llama *término independiente*, a_n, *coeficiente de mayor grado*. Si $a_n = 1$ el polinomio lleva el nombre de *reducido*.

Si $a_n \neq 0$, el número n se llama *grado* del polinomio.

Para la anotación abreviada de los polinomios se emplean, por regla, las designaciones $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, ..., si la variable $z \in \mathbb{C}$ y $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, etc, si la variable $z = x \in \mathbb{R}$. Cuando se quiere remarcar que el polinomio $P(z)$ tiene el grado n, se escribe $P_n(z)$.

Los polinomios $P_0(z) = a_0$, $a_0 \neq 0$, es decir, los polinomios de grado nulo, son números complejos no iguales a cero. El número 0 también se considera polinomio y se denomina nulo. El polinomio nulo es el único que no tiene grado.

Los polinomios $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ se consideran *iguales* (se escribe $P_n(z) = Q_m(z)$) si son iguales los coeficientes con iguales potencias de z. Para la igualdad de los polinomios es evidente la necesidad de la igualdad de sus grados.

Para los polinomios se determinan las operaciones de adición y multiplicación. Cada una de ellas se somete a las leyes conmutativa y asociativa. Las mencionadas operaciones están ligadas entre sí con la ley distributiva.

La suma $P_n(z) + Q_m(z)$ de los polinomios

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$
$$Q_m(z) = b_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0$$

es un polinomio cuyos coeficientes, con cada potencia de z, son iguales a la suma de los coeficientes con esa misma potencia de z de los polinomios $P_n(z)$ y $Q_m(z)$.

P. ej., si $P_5(z) = z^5 + 3iz^3 - 1$ y $Q_3(z) = iz^3 + z + 1$, entonces

$$P_5(z) + Q_3(z) = z^5 + 4iz^3 + z.$$

La suma de los polinomios $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ es un polinomio cuyo grado no supera el mayor de los números n y m, o bien no existe.

Se denomina *producto* $P_n(z) Q_m(z)$ de los polinomios

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$
$$Q_m(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0$$

el polinomio

$$S_{n+m}(z) = c_{m+n} z^{n+m} + \ldots + c_k z^k + \ldots + c_1 z + c_0,$$

en el que el coeficiente c_k $(0 \leqslant k \leqslant n + m)$ es igual a la suma de todos los posibles productos $a_i b_j$, donde $i + j = k$.

Con el fin de hallar el producto de los polinomios $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ es suficiente multiplicar cada término $a_k z^k$ del polinomio $P_n(z)$ por cada término $b_l z^l$ de $Q_m(z)$ y escribir la suma de todos los productos obtenidos $a_k b_l z^{k+l}$.

P. ej., si $P_4(z) = z^4 - 1$ y $Q_3(z) = 2z^3 + z$, entonces

$$P_4(z) Q_3(z) = (z^4 - 1)(2z^3 + z) = 2z^7 + z^5 - 2z^3 - z.$$

Si $N(z)$ es un polinomio nulo, para cualquier polinomio $P(z)$, por definición, se supone que

$$P(z) + N(z) = P(z), \quad P(z)\,N(z) = N(z).$$

Decimos que la *diferencia* de $P(z) - Q(z)$ de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ es tal polinomio $R(z)$ que

$$P(z) = Q(z) + R(z).$$

La diferencia existe para cualesquiera dos polinomios y se determina unívocamente.

Para cualesquiera dos polinomios $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ existen tales polinomios $T(z)$ y $R(z)$ que

$$P_n(z) = Q_m(z)\,T(z) + R(z), \tag{2}$$

con la particularidad de que bien el grado de $R(z)$ es menor que m, o bien $R(z) = 0$ (es decir, $R(z)$ es el polinomio nulo). Los polinomios $T(z)$ y $R(z)$ se determinan unívocamente; $T(z)$ se denomina *cociente* y $R(z)$, *resto* de la división del polinomio $P_n(z)$ entre el polinomio $Q_m(z)$.

Si $R(z) = 0$, decimos que $P_n(z)$ se divide entre $Q_m(z)$. En semejante caso, $Q_m(z)$ lleva el nombre de *divisor* del polinomio $P_n(z)$.

Con el fin de determinar el cociente y el resto de la división de dos polinomios existen diversos procedimientos. Con la mayor frecuencia se hace uso de la «división bajo ángulo» o bien del método de los «coeficientes indeterminados».

P. ej., la «división bajo ángulo» del polinomio $2z^4 - 5z^3 + 2z$ entre el polinomio $z^2 - 1$ se realiza así:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-\,2z^4 & -5z^3 & & +2z & & z^2-1 \\
2z^4 & & -2z^2 & & & \overline{2z^2-5z+2} \\
\hline
- & -5z^3 & +2z^2 & +2z & & \\
 & -5z^3 & & +5z & & \\
\hline
 & & -\,2z^2 & -3z & & \\
 & & 2z^2 & & -2 & \\
\hline
 & & & -3z & +2 &
\end{array}$$

Por esto,

$$2z^4 - 5z^3 + 2z = (z^2 - 1)(2z^2 - 5z + 2) + (-3z + 2),$$

es decir, el polinomio $T(z) = 2z^2 - 5z + 2$ es el cociente, en tanto que $R(z) = -3z + 2$, el resto.

Con el fin de hallar el cociente y el resto de la división de esos mismos polinomios según el método de los «coeficientes indeterminados se opera del modo siguiente. Como el primer polinomio es del grado 4 y segundo, del 2, el cociente se busca en la forma $T(z) = az^2 + bz +$

$+ c$ y el resto, en la forma $R(z) = b_1z + c_1$. Se escribe la igualdad (2):

$$2z^4 - 5z^3 + 2z = (z^2 - 1)(az^2 + bz + c) + b_1z + c_1.$$

Si los polinomios son iguales, también lo serán sus coeficientes con las mismas potencias de z, o sea, los coeficientes de los polinomios $T(z)$ y $R(z)$ satisfacen al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2 = a, \\ -5 = b, \\ 0 = c - a, \\ 2 = -b + b_1, \\ 0 = -c + c_1. \end{cases}$$

De este sistema hallamos $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$, $b_1 = -3$, $c_1 = 2$.

Es de particular interés la división del polinomio $P_n(z)$ entre el polinomio reducido de primer grado $z - z_0$. La igualdad (2) toma, en este caso, la forma

$$P_n(z) = (z - z_0)\, T_{n-1}(z) + w_0,$$

donde w_0 es cierto número complejo.

Si en la indicada igualdad hacemos $z = z_0$, obtendremos $P_n(z_0) = w_0$.

El número $w_0 = P_n(z_0)$ se denomina *valor de polinomio* $P_n(z)$ *con* $z = z_0$.

Así, pues, el resto de la división del polinomio $P_n(z)$ entre $z - z_0$ es igual al valor de éste con $z = z_0$ (*teorema de Bezout*).

Si $w_0 = P_n(z_0) = 0$, el polinomio $P_n(z)$ se divide entre el binomio lineal $z - z_0$, es decir, $z - z_0$ es el divisor del polinomio $P_n(z)$.

Si el valor del polinomio $P_n(z)$ con $z = z_0$ es igual a cero, es decir, $P_n(z_0) = 0$, al número z_0 se le da el nombre de *raíz del polinomio* $P_n(z)$. En tal caso, también se dice que el número z_0 es la *raíz* (o bien *solución*) *de la ecuación*

$$a_nz^n + \ldots + a_1z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0. \tag{3}$$

La ecuación (3) lleva el nombre de *ecuación algebraica* de *n-ésimo grado*. Resolver la ecuación (3) significa hallar todas sus raíces o bien hallar todas las raíces del polinomio $P_n(z)$, lo que es lo mismo.

Si el polinomio $P_n(z)$ se divide entre el polinomio $(z - z_0)^k$, $k \in \mathbb{N}$, pero no se divide entre el polinomio $(z - z_0)^{k+1}$, la raíz z_0 se llama raíz de *k-ésimo grado de multiplicidad* del polinomio $P_n(z)$ y raíz de k-ésimo grado de multiplicidad de la ecuación (3). La raíz de primer grado de multiplicidad se denomina con frecuencia *sim-*

ple, la raíz de k-ésimo grado de multiplicidad, con $k > 1$, recibe el nombre de *múltiple*. El polinomio

$$P'_n(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \ldots + 2a_2 z + a_1$$

se llama *derivada* del polinomio $P_n(z)$. Al determinar la multiplicidad de la raíz de un polinomio, muy a menudo se utiliza la siguiente afirmación: la raíz múltiple del polinomio $P_n(z)$ es también la raíz del polinomio $P'_n(z)$.

La ecuación algebraica de grado nulo no debe tener raíces.

La ecuación algebraica de primer grado

$$az + b = 0$$

tiene una raíz

$$z = -b/a.$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado (raíces de la ecuación cuadrática)

$$az^2 + bz + c = 0$$

se hallan con ayuda de la fórmula

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4}$$

El número $D = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* de la ecuación cuadrática, mientras que por $\sqrt{D}$ se entiende cierto valor de la raíz. Si $D = 0$, la ecuación cuadrática tiene una sola raíz de segundo orden de multiplicidad; si $D \neq 0$, dos raíces simples.

Las raíces de la ecuación algebraica de dos términos

$$az^n + b = 0$$

se hallan con la fórmula

$$z = \sqrt[n]{-b/a}. \tag{5}$$

Si $b \neq 0$, semejante ecuación tiene n raíces simples (de primer grado de multiplicidad) que pueden ser halladas según la fórmula (13) del § 5.

En el caso general, no existen fórmulas (semejantes a las (4), (5)) que permitan expresar las raíces de una ecuación algebraica, con ayuda de sus coeficientes. Claro está, que la falta de un método general para resolver las ecuaciones algebraicas, no impide que en casos particulares se emplee uno u otro rasgo específico de la ecuación para hallar sus raíces. Ademas, al resolver muchos problemas se requiere hallar no todas las raíces de la ecuación, sino sólo aquellas que pertenecen a cierto conjunto, p. ej., al conjunto de los números reales o bien al de números enteros. Para resolver las ecuaciones

con coeficientes enteros resulta ser con frecuencia útil el siguiente teorema.

Teorema. Las raíces enteras de una ecuación algebraica con coeficientes enteros son los divisores del término independiente.

La existencia de las raíces de las ecuaciones algebraicas se establece con ayuda del teorema fundamental de álgebra de los números complejos, es decir, *el teorema de Gauss.*

Teorema. La ecuación algebraica de grado n en un conjunto de números complejos tiene n raíces a condición de que cada raíz de k-ésimo grado de multiplicidad se cuenta k veces.

Del teorema de Gauss se desprende que cada polinomio $P_n(z)$ permite la representación de la forma

$$P_n(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_l)^{k_l}, \tag{6}$$

donde $z_1, z_2, \ldots, z_l$ son diferentes raíces del polinomio, mientras que $k_1, k_2, \ldots, k_l$, sus correspondientes multiplicidades, con ello

$$k_1+k_2+\ldots+k_l=n.$$

Cada polinomio $P_n(x)$ con coeficientes reales permite la representación en la forma

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{r_m}, \tag{7}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_l$ son diferentes raíces reales del polinomio; $k_1, k_2, \ldots, k_l$ sus correspondientes multiplicidades; $p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m$, diferentes pares de números reales que satisfacen las desigualdades

$$p_1^2-4q_1<0, \ \ldots, \ p_m^2-4q_m<0;$$

$r_1, r_2, \ldots, r_m$ son números naturales, con ello

$$k_1+k_2+\ldots+k_l+2(r_1+r_2+\ldots+r_m)=n.$$

Ejemplo 1. Resuelvan la ecuación

$$z^2+3z+3=0.$$

△ Con la fórmula (4), hallamos

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{9-12}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-3\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}. \ ▲$$

Ejemplo 2. Resuelvan la ecuación

$$z^2-(2+i)z-1+7i=0.$$

△ Con la fórmula para las raíces de una ecuación cuadrática, tenemos

$$z=\frac{2+i\pm\sqrt{(2+i)^2+4(1-7i)}}{2}=\frac{2+i\pm\sqrt{7-24i}}{2}.$$

Con el fin de determinar cualquier valor de $\sqrt{7-24i}$ hacemos

$$\sqrt{7-24i}=x+iy.$$

Entonces

$$7-24i=x^2+2xyi-y^2$$

y, por lo tanto, x e y satisfacen el sistema

$$\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ xy=-12, \end{cases}$$

con la particularidad de que x e y son números reales. El sistema tiene la solución $x=4$, $y=-3$. Por ello,

$$z_1=\frac{2+i+4-3i}{2}=3-i,$$

$$z_2=\frac{2+i-4+3i}{2}=-1+2i. \ ▲$$

Ejemplo 3. Resuelvan la ecuación

$$z^3-6z-9=0.$$

△ Al analizar los divisores del término independiente nos cercioramos de que sólo $z=3$ es la raíz entera de la ecuación. Dividimos el primer miembro de la ecuación entre $z-3$:

$$\begin{array}{r|l} z^3 \qquad -6z-9 & z-3 \\ \underline{-\ z^3-3z^2 \qquad\qquad} & \overline{z^2+3z+3} \\ 3z^2-6z-9 & \\ \underline{-\ 3z^2-9z \qquad} & \\ 3z-9 & \\ \underline{-\ 3z-9} & \\ 0 & \end{array}$$

Así, pues,

$$z^3-6z-9=(z-3)(z^2+3z+3)$$

y, después de resolver la ecuación cuadrática

$$z^2+3z+3=0,$$

obtenemos las restantes raíces. De modo que

$$z_1=3, \quad z_2=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}. \ ▲$$

Ejemplo 4. Aclaren si existen o no raíces enteras de la ecuación

$$2z^3 - 5z^2 - 2z + 2 = 0.$$

△ Sólo pueden ser raíces enteras de la ecuación los números ± 1, ± 2. Al ponerlos en la ecuación vemos que ninguno de estos cuatro números la satisface. Es decir, la ecuación dada no tiene raíces enteras.▲

Ejemplo 5. Resuelvan la ecuación

$$z^5 - 2z^4 - 13z^3 + 26z^2 + 36z - 72 = 0.$$

△ Probando los divisores del término independiente, hallamos que $z = \pm 2$ son las raíces de la ecuación. Dividiendo el primer miembro de ésta entre $z^2 - 4$, llegamos a la ecuación

$$z^3 - 2z^2 - 9z + 18 = 0,$$

cuya raíz es $z = 2$. Habiendo dividido el primer miembro de la ecuación obtenida entre $z - 2$, hallamos $z^2 - 9$. Así, pues, la ecuación se puede escribir en la forma

$$(z + 3)(z + 2)(z - 2)^2(z - 3) = 0,$$

es decir, tiene tres raíces de primer grado de multiplicidad (simples) $z = -3$, $z = -2$, $z = 3$ y una raíz de segundo grado de multiplicidad $z = 2$.▲

Ejemplo 6. Representen el polinomio

$$P(z) = z^7 + z^6 + 64z + 64$$

en forma del producto: a) de los factores lineales, b) de los factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

△ Hallemos todas las raíces del polinomio. Ya que

$$z^7 + z^6 + 64z + 64 = (z + 1)(z^6 + 64),$$

$z_1 = -1$ y con el fin de hallar las restantes raíces hay que extraer la raíz de sexto grado del número -64. Según la fórmula (13) del § 5, obtenemos

$$z_2 = \sqrt{3} + i, \quad z_3 = \sqrt{3} - i, \quad z_4 = -\sqrt{3} + i,$$
$$z_5 = -\sqrt{3} - i, \quad z_6 = 2i, \quad z_7 = -2i.$$

Por esta razón, representemos el polinomio dado en forma del producto de los siete factores lineales:

$$P(z) = (z+1)(z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i)(z + \sqrt{3} - i) \times$$
$$\times (z + \sqrt{3} + i)(z - 2i)(z + 2i).$$

Multiplicando a pares los binomios lineales correspondientes a las raíces complejamente conjugadas obtenemos la descomposición del polinomio en factores con coeficientes reales:

$$P(z) = (z+1)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 + 4).$$

También podríamos haber obtenido tal descomposición mediante las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} z^7 + z^6 + 64z + 64 &= (z+1)(z^6 + 64) = \\ &= (z+1)(z^2+4)(z^4 - 4z^2 + 16) = \\ &= (z+1)(z^2+4)(z^4 + 8z^2 + 16 - 12z^2) = \\ &= (z+1)(z^2+4)(z^2 + 4 - 2\sqrt{3}z)(z^2 + 4 + 2\sqrt{3}z). \blacktriangle \end{aligned}$$

2. Fracciones racionales. La expresión $\frac{P(z)}{Q(z)}$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios, con la particularidad de que $Q(z)$ es un polinomio no nulo, lleva el nombre de *fracción racional*. El polinomio $P(z)$ se denomina numerador y $Q(z)$, denominador de la fracción racional. Por lo visto, cada polinomio $T(z)$ es una fracción racional (en tal caso, $P(z) = T(z)$, $Q(z) = 1$).

Las fracciones racionales $\frac{P(z)}{Q(z)}$ y $\frac{R(z)}{S(z)}$ se consideran iguales si

$$P(z)\,S(z) = R(z)\,Q(z).$$

De aquí sigue que dos fracciones racionales con iguales denominadores son iguales si y sólo si son iguales sus numeradores.

La suma $\frac{P(z)}{Q(z)} + \frac{R(z)}{S(z)}$ de las fracciones racionales $\frac{P(z)}{Q(z)}$ y $\frac{R(z)}{S(z)}$ se denomina la fracción racional $\frac{P(z)\,S(z) + R(z)\,Q(z)}{Q(z)\,S(z)}$ y su producto $\frac{P(z)}{Q(z)}\,\frac{R(z)}{S(z)}$, la fracción racional $\frac{P(z)\,R(z)}{Q(z)\,S(z)}$.

La diferencia y el cociente de dos fracciones racionales se determina como el resultado de las operaciones inversas a la adición y multiplicación.

Las operaciones de adición y multiplicación de fracciones racionales son conmutativas y asociativas; están ligadas entre sí mediante la ley distributiva.

La fracción racional $\frac{P(z)}{Q(z)}$ lleva el nombre de *propia* si el grado del polinomio $P(z)$ es menor que el de $Q(z)$. Si el grado de $P(z)$ es mayor o igual que el de $Q(z)$, la fracción racional $\frac{P(z)}{Q(z)}$ se llama *impropia*.

Cada fracción racional impropia $\frac{P(z)}{Q(z)}$ puede representarse en forma de un polinomio o bien de la suma del polinomio y cierta fracción racional propia. En efecto, si $T(z)$ es el cociente y $R(z)$ el resto de la división del polinomio $P(z)$ entre $Q(z)$, es válida la igualdad

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=T(z)+\frac{R(z)}{Q(z)}, \tag{8}$$

donde bien la fracción $\frac{R(z)}{Q(z)}$ es propia, o bien $R(z)=0$.

La representación de una fracción impropia en la forma (8) recibe el nombre de *formación de la parte entera* de una fracción racional impropia.

Ejemplo 7. Representen la fracción racional $\frac{z^6-z^2+1}{z^3+1}$ en forma de la suma de un polinomio y una fracción propia.

△ Dividiendo el polinomio $P(z)=z^6-z^2+1$ entre el polinomio $Q(z)=z^3+1$, obtenemos el cociente $T(z)=z^3-1$ y el resto $R(z)=-z^2+2$. Por consiguiente,

$$z^6-z^2+1=(z^3+1)(z^3-1)-z^2+2,$$

de donde

$$\frac{z^6-z^2+1}{z^3+1}=z^3-1+\frac{2-z^2}{z^3+1}. \quad ▲$$

3. Descomposición de una fracción racional propia en un conjunto de números complejos en fracciones elementales. Sea $\frac{P(z)}{Q(z)}$ una fracción racional propia y supongamos que la descomposición del polinomio $Q(z)$ en los factores lineales tiene la forma (6).

Entonces existen las constantes

$$A_j^{(k)} (j=1, 2, \ldots, l;\ k=1, 2, \ldots, k_j),$$

con las que es válida la igualdad

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_j^{(k)}}{(z-z_j)^k}. \tag{9}$$

Los sumandos (no iguales a cero) del segundo miembro de la fórmula (9) se llaman *fracciones racionales elementales* (*simples*) en un conjunto de números complejos. El segundo miembro de la fórmula (9) recibe el nombre de *descomposición de una fracción racional en la suma de las fracciones racionales elementales.* Los coeficientes de la descomposición se definen de modo unívoco. Así, pues, cada fracción racional propia en un conjunto de números complejos puede ser

representada, además del único modo, en forma de la suma de fracciones racionales elementales. La forma de esta suma se define plenamente con las raíces y la multiplicidad del denominador de la fracción racional. Si las raíces del denominador de semejante fracción son conocidas, los coeficientes se pueden hallar con diferentes procedimientos. Con la mayor frecuencia se calculan con ayuda del método de los «coeficientes indeterminados».

Ejemplo 8. Descompongan la fracción racional $\frac{z^2+1}{z^3-z}$ en un conjunto de números complejos en la suma de fracciones elementales.

△ El denominador de la fracción racional tiene las raíces $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$. Por esto, existen tales constantes A, B, C que es válida la igualdad

$$\frac{z^2+1}{z^3-z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-1}.$$

Con el fin de determinar los coeficientes A, B y C sumemos las fracciones en el segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{z^2+1}{z^3-z} = \frac{A(z^2-1) + Bz(z-1) + Cz(z+1)}{z^3-z}.$$

Las fracciones racionales con iguales denominadores son iguales entre sí si y sólo si son iguales sus numeradores. Por ello,

$$z^2 + 1 = A(z^2-1) + Bz(z-1) + Cz(z+1). \qquad (10)$$

Si dos polinomios son iguales, sus valores, con iguales valores de z, también lo son. Haciendo consecutivamente en la igualdad (10) $z = 0$, $z = -1$, $z = 1$, obtenemos $1 = -A$, $2 = 2B$, $2 = 2C$, es decir, $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$. La descomposición buscada tiene la forma

$$\frac{z^2+1}{z^3-z} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}. \quad ▲$$

Ejemplo 9. Descompongan la fracción racional $\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)}$ en un conjunto de números complejos en una suma de fracciones elementales.

△ El denominador de la fracción racional tiene las raíces $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$. Por ello, la descomposición buscada tiene la forma

$$\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}.$$

De esta igualdad de fracciones racionales se desprende la igualdad de los polinomios

$$z+3=A(z^2+1)+B(z-1)(z+i)+C(z-1)(z-i).$$

Haciendo consecutivamente z igual a 1, i e $-i$, obtenemos

$$4=2A,\quad i+3=B(i-1)\,2i,\quad -i+3=C(-i-1)(-2i),$$

es decir,

$$A=2,\quad B=-1+\frac{i}{2},\quad C=-1-\frac{i}{2}.$$

Así, pues,

$$\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)}=\frac{2}{z-1}+\frac{-1+\frac{i}{2}}{z-i}+\frac{-1-\frac{i}{2}}{z+i}.\ \blacktriangle$$

4. Descomposición de una fracción racional propia en un conjunto de números reales en fracciones elementales. Sean $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una fracción racional propia, $P(x)$ y $Q(x)$, polinomios con coeficientes reales, con la particularidad de que la descomposición del polinomio $Q(x)$ en los factores lineales y cuadráticos tiene la forma (7). Entonces existen las constantes reales

$$A_i^{(k)}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ k_i),$$
$$M_j^{(r)}\ \text{y}\ N_j^{(r)}\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ r=1,\ 2,\ \ldots,\ r_j),$$

con las que es válida la igualdad

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_j^{(k)}}{(x-x_j)^k}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r_j}\frac{M_j^{(k)}x+N_j^{(k)}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}. \tag{11}$$

Los sumandos (no iguales a cero) en el segundo miembro de la fórmula (11) se llaman fracciones racionales elementales (simples) en un conjunto de números reales. El segundo miembro de la fórmula (11) denomínase descomposición de la fracción racional en la suma de fracciones racionales elementales. Los coeficientes de la descomposición se determinan unívocamente. De este modo, cada fracción racional propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en un conjunto de números reales puede ser representada, además de la única forma, en forma de la suma de fracciones elementales. Remarquemos que el tipo de la descomposición (11) se predetermina con raíces y la multiplicidad del denominador de la fracción racional. Los procedimentos para hallar los coeficientes de la descomposición serán mostrados en los ejemplos.

Ejemplo 10. Indiquen el tipo de descomposición en la suma de fracciones elementales en un conjunto de números reales para las fracciones racionales:

$$1)\ \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x-2)}. \quad 2)\ \frac{x^7+x^3-13}{x^8+x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3}.$$

△ Cada una de las fracciones racionales dadas es propia y, por ello, las descomposiciones buscadas existen. El denominador de la primera fracción tiene una raíz simple $x = 2$ y una raíz de segundo grado de multiplicadad $x = -1$. Por esta razón, para la primera fracción la descomposición tiene la forma

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-2} + \frac{A_2^{(1)}}{x+1} + \frac{A_2^{(2)}}{(x+1)^2}.$$

El denominador de la segunda fracción se descompone en factores lineales y cuadráticos del modo siguiente:

$$x^8 + x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 = (x + 1)x^3(x^2 + 1)^2.$$

Por ello, para la segunda fracción la descomposición tiene la forma

$$\frac{x^7+x^3-13}{x^8+x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3} =$$
$$= \frac{A_1^{(1)}}{x+1} + \frac{A_2^{(1)}}{x} + \frac{A_2^{(2)}}{x^2} + \frac{A_2^{(3)}}{x^3} + \frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+1} + \frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+1)^2}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 11. Descompongan en un conjunto de números reales en fracciones elementales:

$$1)\ \frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)}. \quad 2)\ \frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2}. \quad 3)\ \frac{2x+1}{x^2(1+x^2)^2}.$$

$$4)\ \frac{x^3+3}{(x+3)^{100}}. \quad 5)\ \frac{6+3x^3}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

△ 1) El denominador de la fracción racional tiene raíces simples $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, por lo que la descomposición buscada se escribe en la forma

$$\frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-3}.$$

De la igualdad de las fracciones racionales (por definición) se desprende la igualdad de los polinomios

$$1/2 = A_1(x-2)(x-3) + A_2(x-1)(x-3) + $$
$$+ A_3(x-1)(x-2). \qquad (12)$$

Si los polinomios son iguales, también lo son sus valores con iguales valores de x. Haciendo consecutivamente en la igualdad (12) $x = 1$,

$x = 2$, $x = 3$, hallamos $1/2 = 2A_1$, $1/2 = -A_2$, $1/2 = 2A_3$, es decir,

$$A_1 = 1/4, \quad A_2 = -1/2, \quad A_3 = 1/4.$$

Así, pues,

$$\frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/2}{x-2} + \frac{1/4}{x-3}.$$

2) El denominador de la fracción racional ya está descompuesto en un producto de factores lineales y cuadráticos. La descomposición en una suma de fracciones elementales tiene, en nuestro caso, la siguiente forma:

$$\frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

De la igualdad de las fracciones racionales sigue la igualdad de los polinomios

$$x^3 + 7x + 32 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)x(x^2+4) + (Dx+E)x.$$

De la igualdad de los polinimios se deduce la de sus coeficientes con iguales potencias de x. Igualando los coeficientes con iguales potencias, obtenemos un sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ 1 = C, \\ 0 = 8A + 4B + D, \\ 7 = 4C + E, \\ 32 = 16A. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallamos $A = 2$, $B = -2$, $C = 1$, $D = -8$, $E = 3$. Por lo tanto,

$$\frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2} = \frac{2}{x} - \frac{2x-1}{x^2+4} - \frac{8x-3}{(x^2+4)^2}.$$

3) En este caso es posible obtener la descomposición buscada sin aplicar el método de los «coeficientes indeterminados». Transformemos la fracción racional del modo siguiente:

$$\frac{2x+1}{x^2(1+x^2)^2} = (2x+1)\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)^2} =$$
$$= (2x+1)\left(\frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right) = (2x+1)\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} -$$
$$- \frac{2x+1}{(1+x^2)^2} = (2x+1)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{2x+1}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

La descomposición obtenida es la de la fracción racional dada en la suma de fracciones elementales.

4) Aquí, como en el anterior caso, la descomposición buscada puede ser hallada con ayuda de sencillas transformaciones. Haciendo $x + 3 = t$, reescribamos la fracción racional del modo siguiente:

$$\frac{x^3+3}{(x+3)^{100}} = \frac{(t-3)^3+3}{t^{100}} = \frac{t^3-9t^2+27t-24}{t^{100}} =$$
$$= \frac{1}{t^{97}} - \frac{9}{t^{98}} + \frac{27}{t^{99}} - \frac{24}{t^{100}} =$$
$$= \frac{1}{(x+3)^{97}} - \frac{9}{(x+3)^{98}} + \frac{27}{(x+3)^{99}} - \frac{24}{(x+3)^{100}}.$$

La descomposición obtenida es la buscada.

5) La descomposición en fracciones elementales tiene la forma

$$\frac{6+3x^3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

De la igualdad de las fracciones se deduce la de los polinomios

$$6 + 3x^3 = (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1).$$

Haciendo aquí consecutivamente $x = i$ y $x = 2i$, obtenemos

$$\begin{cases} 6-3i = 3(Ai+B), \\ 6-24i = -3(2Ci+D). \end{cases}$$

De este sistema hallamos $A = -1$, $B = 2$, $C = 4$, $D = -2$. Por lo tanto,

$$\frac{6+3x^3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{2-x}{x^2+1} + \frac{4x-2}{x^2+4}. \quad \blacktriangle$$

6.1. ¿Con qué valores de A, B, C, D son iguales los polinomios

$$P(z) = (Az + B)(z^2 - z + 1) + (Cz + D)(z^2 + 3)$$

y

$$Q(z) = 2z^3 + z^2 + 5z + 1?$$

6.2. Elijan los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ del menor grado de forma que se verifique la igualdad
$(z^4 - 2z^3 - 4z^2 + 6z + 1)\,P(z) + (z^3 - 5z - 3)\,Q(z) = z^4$.

6.3. ¿Con qué valores de A, B, C, D es válida para los polinomios

$$P(z) = z^4 + Az^3 + Bz^2 - 8z + 4 \text{ y } Q(z) = z^2 + Cz + D$$

la igualdad $P(z) = Q^2(z)$?

6.4. Hallen el grado del polinomio:

1) $P(z) = z^2(z^4 - 1) + (1 - z)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.

2) $$Q(z) = 1 - \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} - \frac{(z - z_2)(z - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} - \frac{(z - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_1)},$$

z_1, z_2, z_3, son números complejos distintos a pares.

6.5. Hallen el cociente $T(z)$ y el resto $R(z)$ de la división del polinomio $P(z)$ entre el polinomio $Q(z)$:

1) $P(z) = z^3 + 5z^2 - 7z - 3$, $Q(z) = z^2 - 8z + 16$.
2) $P(z) = z^5 + 3z^2 + 7iz = 1$, $Q(z) = z - i$.
3) $P(z) = z^5 - z^3 + 1$, $Q(z) = (z - i)^3$.
4) $P(z) = z^2 - 1$, $Q(z) = 2z^4 - 5z^3 + 2z$.
5) $P(z) = z^{30} - 1$, $Q(z) = z^5 + 1$.

6.6. Determinen si el polinomio $Q(z)$ es el divisor del polinomio $P(z)$:

1) $P(z) = z^{100} - 3z^2 + 2$, $Q(z) = z^2 - 1$.
2) $P(z) = z^{100} - 3z + 2$, $Q(z) = z^2 - 1$.
3) $P(z) = 6z^5 + 11z^4 + 5z^3 + 5z^2 - z - 6$, $Q(z) = z^2 + 1$.

6.7. ¿Con qué valores de a y b el polinomio $Q(z)$ es el divisor del polinomio $P(z)$:

1) $Q(z) = (z - 1)^2$, $P(z) = az^4 + bz^3 + 1$.
2) $Q(z) = z^2 - (1 + i)z + i$, $P(z) = z^{1982} + az + b$.
3) $Q(z) = z^2 + az + b$, $P(z) = z^4 - 1$?

6.8. ¿Con qué valores naturales de n y m ($n \geqslant m$) el polinomio $Q(z)$ es el divisor del polinomio $P(z)$:

1) $Q(z) = z^m - a^m$, $\quad P(z) = z^n - a^n$, $\quad a \neq 0$.
2) $Q(z) = z^m + a^m$, $\quad P(z) = z^n + a^n$, $\quad a \neq 0$.
3) $Q(z) = z^m + a^m$, $\quad P(z) = z^n - a^n$, $\quad a \neq 0$.
4) $Q(z) = z^2 + z + 1$, $\quad P(z) = z^{3n+1} + z^{3m} + z^2$.
5) $Q(z) = z^4 + z^2 + 1$, $\quad P(z) = z^{3n+1} + z^{3m} + z^5$?

6.9. Hallen el polinomio de máximo grado que sea el divisor de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$:

1) $P(z) = (z^3 - 1)(z^2 - 2z + 1)$, $Q(z) = (z^2 - 1)^3$.
2) $P(z) = z^{210} - 1$, $Q(z) = z^{90} - 1$.
3) $P(z) = z^{75} - z^{45} - z^{30} + 1$, $Q(z) = 75z^{74} - 45z^{44} - 30z^{29}$.

6.10. Al dividir el polinomio $P(z)$ por $z - 1$ en el resto se obtiene 3, mientras que al dividirlo entre $z-2$, el resto será 4. Hallen el resto de la división $P(z)$ por $z^2 - 3z + 2$.

6.11. Al dividir el polinomio $P(z)$ entre $z - i$ en el resto se obtiene i, en tanto que al dividirlo entre $z + i$, el resto será $1 + i$. Hallen el resto de la división de $P(z)$ entre $z^2 + 1$.

6.12. Hallen el resto de la división del polinomio $P(z) = z^{1983} - 1$ entre el polinomio $Q(z) = (z^2 + 1)(z^2 + z + 1)$.

6.13. Resuelvan las ecuaciones:
1) $z^2 - 2z + 5 = 0$. 2) $z^2 - 2iz - 5 = 0$.
3) $z^2 - 20z + 92 + 6i = 0$.
4) $z^2 - 8z - 3iz + 13 + 13i = 0$.
5) $(3 - i)z^2 - (8 - i)z + 4 + 7i = 0$.

6.14. Resuelvan las ecuaciones:
1) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$. 2) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
3) $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^4 = i$. 4) $(z-i)z(z+i)(z+2i) = 24$.

6.15. Hallen las raíces de las ecuaciones, cuya parte real es negativa:
1) $z^6 - z^3 - 2 = 0$, 1) $z^{10} - z^5 - 992 = 0$.

6.16. Demuestren que las raíces enteras de una ecuación algebraica con coeficientes enteros son los divisores del término independiente.

6.17. Hallen las raíces enteras de las ecuaciones:
1) $z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$. 2) $z^3 - 6z^2 + 15z - 14 = 0$.
3) $2z^3 - 5z^2 - 2z - 2 = 0$.
4) $z^4 + 4z^3 - 25z^2 - 16z + 84 = 0$.
5) $z^6 - 6z^5 + 11z^4 - z^3 - 18z^2 + 20z - 8 = 0$.

6.18. Demuestren que cada raíz racional de una ecuación algebraica con coeficientes enteros se representa en la forma p/q, donde p es cierto divisor del término independente y q, cierto divisor del coeficiente de mayor grado de la ecuación.

6.19. Hallen las raíces racionales de las ecuaciones:
1) $3z^3 + z^2 + z + 35 = 0$. 2) $2z^4 + 3z^3 - 46z^2 + 6z + 8 = 0$.

6.20. Resuelvan las ecuaciones:
1) $2z^3 + 12z^2 + 13z + 15 = 0$.
2) $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$.
3) $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$.
4) $z^5 - 2z^4 - 13z^3 + 26z^2 + 36z - 72 = 0$.

6.21. Demuestren que si la ecuación

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

con coeficientes reales tiene una raíz z_0, el número $\bar{z}_0$ es asimismo raíz de dicha ecuación.

6.22. Demuestren que si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz $z_0 = a + bi$, el polinomio $(z - a)^2 + b^2$ es su divisor.

6.23. Cerciórense de que el número z_0 es la raíz de las ecuaciones
1) $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$, $z_0 = 1 + i$.
2) $z^6 + z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 1 = 0$. $z_0 = i$
y hallen las restantes raíces.

6.24. Demuestren que cada polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

6.25. ¿Con qué valores racionales de a y b el número $1+\sqrt{2}$ es la raíz de la ecuación

$$z^5 + az^3 + bz^2 + 5z + 2 = 0?$$

Hallen las restantes raíces de la ecuación con los valores hallados de a y b.

6.26. Hallen las raíces comunes de las ecuaciones:

1) $z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$, $z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 4 = 0$.

2) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$, $z^{1982} + z^{100} + 1 = 0$.

6.27. Determinen la multiplicidad de la raíz z_0 para las ecuaciones:

1) $3z^4 - 4z^3 + 1 = 0$, $z_0 = 1$.

2) $z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$, $z_0 = 2$.

3) $z^{2n} - nz^{n+1} + nz^{n-1} - 1 = 0$, $n > 1$, $z_0 = 1$.

6.28. ¿Con qué valores de a y b la ecuación

$$z^5 + 10az^3 + 5bz - 24\sqrt{3} = 0$$

tiene una raíz de multiplicidad 3?

6.29. Demuestren que la ecuación

$$\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + z + 1 = 0$$

no tiene raíces múltiples.

6.30. Hallen el polinomio $P(x)$ de mínimo grado que tiene la raíz $x = 0$ del décimo orden y tal que el polinomio $P(x) - 1$ tiene la raíz $x = 1$ de quinto orden.

6.31. Hallen el polinomio reducido de mínimo grado con coeficientes reales, cuyas raíces son: 1) $z_1 = 3$ y $z_2 = 2 - i$, 2) $z_1 = i$ (raíz de multiplicidad 2) y $z_2 = -1 - i$.

6.32. Hallen el polinomio reducido de mínimo grado con coeficientes racionales, cuya raíz es $z_0 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$.

6.33. Demuestren que las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de la ecuación

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

están ligadas con sus coeficientes mediante las fórmulas de Viète:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = -a_{n-1},$$
$$z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n = a_{n-2},$$
$$z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + \ldots + z_{n-2}z_{n-1}z_n = -a_{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_1z_2z_3 \ldots z_n = (-1)^n a_0.$$

6.34. La ecuación $2z^3 + az^2 + bz + 12 = 0$ tiene las raíces $z_1 = 1$, $z_2 = -2$. Hallen la tercera raíz de esta ecuación.

6.35. Sean z_1, z_2, z_3 las raíces de la ecuación $z^3 - z^2 - 1 = 0$. Confeccionen una ecuación cuyas raíces fuesen los números $z_2 + z_3$, $z_3 + z_1$, $z_1 + z_2$.

6.36. ¿Con qué valores de c las raíces de la ecuación

$$z^3 + z^2 + 2z + c = 0$$

forman una progresión geométrica? Hallen las raíces con esta condición.

6.37. Hallen la suma de los cuadrados y la de los cubos de las raíces de la ecuación

$$8z^4 - 5z^2 + 2z + 1 = 0.$$

6.38. Hallen la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0 = 0.$$

6.39. Hallen la suma de los coeficientes del polinomio:

1) $(4z-5)^{16}$. 2) $\left(3\sqrt{2}z - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^8$.

3) $(4z^2-2z-1)^{13}(5z^2-7)^4$.

6.40. Representen el polinomio en forma del producto de los factores lineales:

1) $z^3 + 1$. 2) $z^3 - 6z^2 + 11z - 6$.
3) $6z^4 - 11z^3 - z^2 - 4$.
4) $z^5 - 4z^4 - 6z^3 + 16z^2 + 29z + 12$.
5) $z^3 + (1 - i)z^2 + (1 - 2i)z - 1 - i$.

6.41. Representen el polinomio en forma del producto de los factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales:

1) $x^4 + 4$. 2) $x^6 + 27$.
3) $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$.
4) $x^2 + (x + 1)^2 + (x^2 + x)^2$.
5) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$.
6) $x^4 - 2x^3 - 27x^2 - 44x + 7$.
7) $x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

6.42. ¿Existe un polinomio cuyo cuadrado fuese igual al polinomio

$$z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1?$$

6.43. Hallen el polinomio $P(z)$ de grado mínimo que satisfaga la condición:

1) $P(-3) = 13$, $P(4) = 13$, $P(5) = 21$.
2) $P(-1) = 4$, $P(0) = 3$, $P(1) = 0$, $P(2) = 7$.
3) $P(-1) = -1$, $P(1) = 0$, $P(3) = 1$, $P(5) = 2$.

6.44. ¿Hay un polinomio $P(z)$ con coeficientes enteros que satisfaga las condiciones $P(7) = 5$ y $P(15) = 9$?

6.45. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$ números diferentes a pares. Hallen el polinomio $P_n(z)$ que tenga las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_n$ y que satisfaga la condición $P_n(z_{n+1}) = 1$.

6.46. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$ números diferentes a pares tomados al azar y $w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}$, números arbitrarios. Demuestren que existe uno y sólo un polinomio $P_n(z)$ que satisface las condiciones

$$P_n(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

6.47. Separen la parte entera de la función racional:

1) $\frac{z^3+3z^2+5z+7}{z^2+2}$. 2) $\frac{z^6-7z^4+8z^3-7z+7}{z^3+1}$.

3) $\frac{z^6-z^2+1}{(z-1)^5}$. 4) $\frac{(z^2+1)^{10}}{z^4+4}$.

6.48. Indiquen el tipo de la descomposición de una fracción racional en elementales en un conjunto: 1) de números complejos, b) de números reales:

1) $\frac{z^3}{z^4+18z^2+81}$. 2) $\frac{z+1}{2(z+1)^4-32}$. 3) $\frac{1}{z^6+2z^3+1}$.

6.49. Descompongan la fracción racional en fracciones elementales en un conjunto de números complejos:

1) $\frac{z}{4z^2-2z+1}$. 2) $\frac{i}{z^2+(5-2i)z+5-5i}$.

3) $\frac{z^4+1}{z^5+z^3}$. 4) $\frac{8z^2}{z^4-1}$.

5) $\frac{1}{z^4+1}$. 6) $\frac{1}{z^n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

6.50. Descompongan la fracción racional en fracciones elementales en un conjunto de números reales:

1) $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$. 2) $\frac{6}{x^3-1}$.

3) $\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}$. 4) $\frac{3}{x^3-x^5}$.

5) $\frac{5x^2+6x-23}{(x-2)(x+1)^2(x-1)^3}$. 6) $\frac{16x^3-32x+2}{\left(\frac{x}{2}\right)^4-2\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$.

7) $\frac{2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$. 8) $\frac{1-2x}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

9) $\frac{101x}{x^{101}-1}$. 10) $\frac{3x^2-3}{x^3-3x+1}$.

§ 7. Funciones numéricas. Sucesiones

1. Noción de función numérica. Sea dado el conjunto numérice $X \subset \mathbb{R}$ y, además, supongamos que a cada $x \in X$ se ha puesto en correspondencia el número $y \in \mathbb{R}$, entonces se dice que en el conjunto X se ha definido una *función numérica*. La regla que establece la correspondencia se designa con cierto símbolo, p. ej., f y se escribe

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

En esta anotación x se denomina *argumento* o bien variable independiente, los números del conjunto X se llaman valores del argumento, el conjunto X es llamado *campo de definición* de la función, también se designa con $D(f)$. El número y_0, que corresponde al valor del argumento x_0, lleva el nombre de *valor de la función* con $x = x_0$ (o bien valor de la función en el punto x_0) y se designa $f(x_0)$ o bien $f(x)\,|_{x=x_0}$. En ciertas ocasiones, el conjunto de los valores de la función se designa $E(f)$.

A veces, para indicar la función se utiliza sólo el símbolo con el que está designada la ley de correspondencia, p. ej., f.

Las funciones f y g reciben el nombre de *iguales* si $D(f) = D(g)$ y la igualdad $f(x) = g(x)$ es cierta para todo valor del argumento. Si dicha igualdad sólo es cierta en el conjunto $A \subset D(f) \cap D(g)$, las funciones f y g se llaman *iguales en el conjunto A*.

P. ej., las funciones $y = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (se toma el valor aritmético de la raíz) e $y = x$, $x \in \mathbb{R}$ son iguales en el conjunto $A = [0; +\infty)$. Si $x < 0$, $\sqrt{x^2} \neq x$. La indicada función $y = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, es igual a la función $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, ya que sus campos de definición también coinciden para toda $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \text{ con } x \geqslant 0, \\ -x \text{ con } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Sean dadas las funciones $y = f(x)$ y $z = F(y)$ y sea que el campo de valores de la función f está contenido en el campo de definición de la función F. La función

$$z = F(f(x)), \quad x \in D(f)$$

recibe el nombre de *función compuesta* o bien *composición* (superposición) de las funciones f y F y se designa con $F \circ f$.

P. ej., la función

$$z = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1; 1],$$

es la composición de las funciones

$$y = 1 - x^2, \quad x \in [-1; 1], \text{ y } z = \sqrt{y}, \quad y \in [0; +\infty).$$

2. Funciones elementales. *A las funciones elementales fundamentales* se refieren las funciones constante, potencial, exponencial, logarítmica trigonométricas y trigonométricas inversas.

Recibe el nombre de *función elemental* aquella que puede ser prefijada con ayuda de un número finito de operaciones aritméticas y composiciones de funciones elementales fundamentales. P. ej., son elementales las funciones:

la función lineal

$$y = ax + b, \quad x \in \mathbb{R},$$

aquí $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

la función cuadrática

$$y = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

aquí $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; las funciones

$$z = \sqrt{1 - x^2}, \ x \in [-1; 1], \ y = x \operatorname{sen}(1/x), \ x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0, \text{ etc.}$$

Lleva el nombre de *polinomio* la función elemental de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

aquí $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Si $a_n \neq 0$, $P(x)$ se denomina polinomio de grado n, con frecuencia se designa con $P_n(x)$, en tanto que el número n se llama grado del polinomio. Si todos los coeficientes del polinomio son nulos, él recibe el nombre de polinomio nulo. Tiene lugar el teorema: dos polinomios no nulos son iguales si y sólo si sus grados son los mismos y los coeficientes con iguales potencias de x coinciden.

Damos el nombre de *racional* a una *función* elemental que puede ser dada en la forma

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ es un polinomio, $Q(x)$, un polinomio no nulo. Esta función esta definida para todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$.

Llamamos *irracional* a una función elemental que no es racional y puede ser prefijada con ayuda de la composición de un número finito de funciones racionales, funciones potenciales con exponentes racionales y operaciones matemáticas. Las funciones dadas a continuación son ejemplos de funciones irracionales

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1; 1], \quad y = \sqrt[3]{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y = \frac{x - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^{2/3} + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Las funciones elementales que no son racionales o irracionales se denominan *transcendentes*. Las funciones exponencial, logarítmica, trigonométricas y trigonométricas inversas son transcendentes.

Por función prefijada con una fórmula se entiende tal función cuyo campo de definición son todos los valores del argumento para los que dicha fórmula tiene sentido y para los que el resultado de cada una de las operaciones indicadas en la fórmula es un número real.

Ejemplo 1. Hallen el campo de definición de la función prefijada con la fórmula

$$y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}}.$$

△ Los valores de $\sqrt{x}$ están sólo determinados con $x\geqslant 0$. Con $x=0$ y $x=1$ el denominador $x^2-\sqrt{x}$ es igual a cero y, por ello, hay que considerar que $x\neq 0$, $x\neq 1$. Los valores de $\sqrt[3]{a}$ están determinados para todo número real a y con toda $x>0$, $x\neq 1$, $a=\frac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}$ es un número real. Por esta razón, el campo de definición de la función que consideramos es el conjunto de todas $x>0$, $x\neq 1$. ▲

Hallen los campos de definición de las funciones dadas con fórmulas (7.1)—72):

7.1. 1) $y=\frac{x}{x+1}$. 2) $y=\frac{x+1}{x^2-1}$, 3) $y=\frac{x^3-1}{x^2-6x+8}$.
4) $y=\frac{(x+2)^2}{x^3-4x}$. 5) $y=\frac{1}{x+|x|}$. 6) $y=\frac{x^2}{2|x|-3}$.
7) $y=\frac{|x+2|+1-2x-2x^2}{|2x+2|-1}$.

7.2. 1) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$. 2) $y=\sqrt{-x^2}$. 3) $y=\sqrt[4]{2-x}$.
4) $y=\sqrt{2-x-x^2}$. 5) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 6) $y=\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{x}$.
7) $y=\frac{x}{(9-x^2)^{2/3}}$. 8) $y=\sqrt{x^2(x-2)}$. 9) $y=\sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}$.

7.3. Hallen la función lineal $y=ax+b$ y diseñen su gráfico si:
1) $y(1)=0$, $y(0)=-2$. 2) $y(-1)=2$, $y(1)=-1$.
3) $y(5)=3$, $y(-2)=1$. 4) $y(-1,5)=1{,}5$, $y(2{,}5)=-0{,}5$.
5) $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$.

7.4. Hallen la función cuadrática f y diseñen su gráfico si:
1) $f(-1)=0$, $f(0)=5$, $f(6)=-7$.
2) $f(-2)=2$, $f(1)=-1$, $f(3)=7$.
3) $f(-6)=7$, $f(-3)=-8$, $f(2)=7$.
4) $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3$, $x_i\neq x_j$, $i, j=1, 2, 3$.

7.5. Hallen el polinomio $P(x)$ de un grado no mayor que tres que satisfaga las condiciones:

1) $P(-2) = 1$, $P(-1) = 6$, $P(0) = 5$, $P(1) = 10$.

2) $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $P(x_3) = y_3$, $P(x_4) = y_4$, $x_i \neq x_j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

7.6. Hallen el polinomio $P(x)$ de un grado no mayor que n que satisfaga las condiciones:

$$P(x_1) = y_1,\ P(x_2) = y_2,\ \ldots,\ P(x_n) = y_n,\ P(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

si $x_i \neq x_j$ con $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$. Semejante polinomio se llama *interpolador*.

7.7. Hallen los campos de definición de las funciones f_1, f_2, $f_1 + f_2$ si f_1 y f_2 están prefijadas con las fórmulas:

1) $f_1(x) = \sqrt[4]{3-x}$, $f_2(x) = \sqrt{x+1}$.

2) $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f_2(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}}$.

3) $f_1(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-3}$, $f_2(x) = \log(x^2-4)$.

4) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5x-x^2}}$, $f_2(x) = \operatorname{tg} x$.

5) $f_1(x) = \log(16-x^2)$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}$.

6) $f_1(x) = x + \sqrt{x-1}$, $f_2(x) = x - \sqrt{x-1}$.

7.8. Hallen el campo de definición de las funciones f y $1/f$ si f está dada con la fórmula:

1) $f(x) = x^2 - x + 1$. 2) $f(x) = |x| - 2$.

2) $f(x) = \log(1-x^2)$. 4) $f(x) = x + \sqrt{x+2}$.

5) $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$.

6) $f(x) = 5^x - 2^{x+1}$. 7) $f(x) = 3 - 2\cos x$.

8) $f(x) = \sqrt{2} - 2\operatorname{sen} x$. 9) $f(x) = 1 - \operatorname{ctg} x$.

7.9. Hallen $f(3)$, $f(a) + f(-a)$, $f(b) - 1$, $f(b-1)$, $f(1/p)$, $1/f(p)$ si:

1) $f(x) = x/(x-2)$. 2) $f(x) = (1+x)^4 - (1-x)^4$.

7.10. Hallen $f(-4)$, $f(-1)$, $f(-0{,}5)$, $f(1)$, $f(1984)$ si:

1) $f(x) = \begin{cases} 2-|x| & \text{con } -1 < x < 2, \\ 1 & \text{con } x \leqslant -1, \\ 0 & \text{con } x \geqslant 2. \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 2x-|x| & \text{con } x > -1, \\ 2^{x+1} & \text{con } x \leqslant -1. \end{cases}$

7.11. Para la función

$$f(x) = 5x^m + ax^n + bx^{-m} + 2x^{-n},$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

hallen a y b de modo que $f(x) = f(1/x)$ para toda $x \neq 0$.

7.12. Hallen $f(a) + f(-a)$ si $f(x) = x^3 + 3x - 1$.

7.13. Hallen $f(1 + b) - f(1 - b)$ si $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

7.14. Hallen todos los valores de a con los que la función:

1) $y = ax^2 + (a + 3)x + 4a$, $x \in \mathbb{R}$ sólo tiene valores positivos.

2) $y = (a - 1)x^2 + (a + 1)x + a + 1$, $x \in \mathbb{R}$ sólo tiene valores negativos.

7.15. Hallen $y\left(a + \frac{1}{a}\right)$ si $y = \sqrt{x^2 - 4}$ y

1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$; 3) $-1 < a < 0$; 4) $a < -1$.

7.16. Hallen el conjunto de los valores de la función:

1) $f(x) = 2x - 5$, $x \in [-2; 2]$.

2) $f(x) = |x - 1|$, $x \in [0; 5]$.

3) $f(x) = x + \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$.

4) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

5) $f(x) = -2x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

6) $f(x) = 5 - 12x - 2x^2$, $x \in [-4; 1]$.

7) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$.

8) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$, $x \in (-\infty; 0)$.

9) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

7.17. Hallen el conjunto de los valores de la función prefijada con la fórmula:

1) $y = \sqrt{x^2+1}$. 2) $y = \sqrt[4]{x^2-1}$. 3) $y = \sqrt{x(4-x)}$.

4) $y = \sqrt{\frac{9x^2+1}{x}}$. 5) $y = ax + \frac{b}{x}$, donde $ab > 0$.

6) $y = ax + \frac{b}{x}$, donde $ab < 0$. 7) $y = \frac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}$.

7.18. ¿Con qué valores de a la función prefijada con la fórmula

$$y = \frac{x^3 + ax^2 + 2x}{2x - 1}$$

coincide en su campo de definición con una función cuadrática?

7.19. ¿Con cuáles a y b la función

$$y=\frac{x^3+ax^2+bx+2b}{x^2+x+1}$$

es lineal?

7.20. Los valores $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$ de la función cuadrática $y(x)$ son números enteros. Demuestren que con cualquier x entera el valor de $y(x)$ es un número entero.

7.21. Sean x_1 el cero de la función $y=x^2+px+q$, x_2, el de la función $y=-x^2+px+q$. Demuestren que entre x_1 y x_2 se hallará el cero de las funciones:

1) $y=\frac{1}{9}x^2+px+q$. 2) $y=\frac{1}{2}x^2-px-q$.

7.22. Hallen las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$ e indiquen su campo de definición para las funciones prefijadas con las fórmulas:

1) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$. 2) $f(x)=g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

3) $f(x)=10^x$, $g(x)=\log x$. 4) $f(x)=x^5$, $g(x)=x+5$.

5) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;\ +\infty),\\ 0, & x\in(-\infty;\ 0),\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0;\ +\infty),\\ x^2, & x\in(-\infty;\ 0).\end{cases}$

6) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=\operatorname{sen} x$.

7.23. Escriban las fórmulas que prefijan las composiciones:

1) $u\circ v\circ w\circ y\circ z$, 2) $z\circ y\circ w\circ v\circ u$,

3) $w\circ y\circ v\circ z\circ u$, 4) $y\circ v\circ z\circ u\circ w$,

si $u=\operatorname{sen} x$, $v=\log_2 x$, $w=1+x$, $y=1/x$, $z=\sqrt{x}$.

7.24. Demuestren la *asociatividad* de la composición, es decir, que

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h).$$

7.25. Hallen cierta función f que satisfaga la condición:

1) $f(x-2)=\frac{1}{x+1}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq-1$.

2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq0$.

3) $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq-1$.

4) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^4+1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq0$.

5) $f(x^2)=1-|x|^3$, $x\in\mathbb{R}$.

7.26. ¿Existe tal función $f(x)$, $x\in[0;\ +\infty)$ que satisfaga la igualdad $f(x^2)=1+x$, con cualquier $x\in\mathbb{R}$?

7.27. Sean $f(x)=\frac{x}{ax+b}$, $g(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Hallen:

1) $f\circ f\circ f(x)$. 2) $g\circ g\circ g(x)$.

3) $f\circ f\circ\ldots\circ f(x)$ (n composiciones).

4) $g\circ g\circ\ldots\circ g(x)$ (n composiciones).

7.28. Sea $P(x)$ un polinomio y $P(x) = 0$ para toda $x \neq 0$. Demuestren que $P(0) = 0$.

7.29. Demuestren que si un polinomio es igual a cero con todo valor del argumento, todos sus coeficientes son nulos.

---

3. **Gráfico de una función.** Recibe el nombre de *gráfico de la función* $y = f(x)$, $x \in D(f)$ en el sistema de coordenadas cartesianas Oxy el conjunto de todos los puntos del plano con coordenadas $(x; f(x))$, $x \in D(f)$.

Pero no todo conjunto de puntos del plano de coordenadas es el gráfico de una función. Con el fin de que el conjunto dado sea el gráfico de la función, es necesario y suficiente que cada recta paralela al eje de ordenadas corte este conjunto en no más de un punto.

La función $y = f(x)$, definida en el conjunto X simétrico con relación a cero, se llama *par* si para toda $x \in X$ es cierta la igualdad

$$f(-x) = f(x);$$

impar si para toda $x \in X$ es cierta la igualdad

$$f(-x) = -f(x).$$

El gráfico de una función par es simétrico con relación al eje de ordenadas, mientras que el de una función impar es simétrico res-

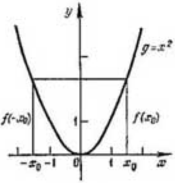


Fig. 11

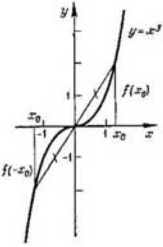


Fig. 12

pecto al origen de coordenadas. Ejemplos de gráficos de funciones par e impar se ofrecen en las figs. 11, 12.

En una serie de casos el gráfico de la función $y = g(x)$ se puede obtener transformando el gráfico conocido de otra función $y = f(x)$. En la tabla 1 se muestra uno de tales casos de mayor sencillez.

En lugar de la transformación del gráfico de la función $y = f(x)$ es posible hacer uso de la transformación del sistema de coordenadas. P. ej., el gráfico de la función $y = f(x) + c$ se obtiene si, no variando el gráfico de la función $y = f(x)$ (como conjunto de puntos en el plano), tomamos un nuevo sistema de coordenadas desplazado a $-c$ a lo largo del anterior eje de ordenadas, etc.

Tabla 1

Función $y = g(x)$	Transformación del gráfico de la función $y = f(x)$
$y = f(x) + c$	desplazamiento a lo largo del eje de ordenadas a c
$y = f(x - c)$	desplazamiento a lo largo del eje de abscisas a c
$y = f(-x)$	simetría con relación al eje de ordenadas
$y = -f(x)$	simetría con relación al eje de abscisas
$y = af(x)$	multiplicación de cada ordenada por a
$y = f(ax)$	división de cada abscisa entre a

Ejemplo 2. Según el gráfico conocido de la función $y = x^2$ (fig. 11) construyan el gráfico de la función $y = x^2 - 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

△ Como $y = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$, el gráfico buscado se obtiene desplazando la parábola $y = x^2$ (fig. 11) a 2 unidades a la derecha y, a continuación, a 2 unidades hacia abajo (fig. 13). Obtendremos ese mismo resultado si el sistema de coordenadas, en el que está construida la parábola $y = x^2$ (fig. 11), se desplaza hacia arriba a 2 unidades y a la izquierda a 2 unidades, sin tocar la parábola.

De modo análogo, del gráfico de la parábola $y = x^2$ es posible obtener el de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ después de escribirla en la forma

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Los puntos característicos de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ son el vértice con coordenadas $x_0 = -b/2a$, $y_0 = (4ac - b^2)/4a$, el punto $(0; c)$ de intersección con el eje de ordenadas y los puntos de intersección con el eje de abscisas (si ellos existen). ▲

Ejemplo 3. Según el gráfico conocido de la función $y = 1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ (hipérbola, fig. 14), construyan el gráfico de la función

$$y = \frac{x}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1.$$

△ Tenemos

$$y = \frac{x}{1-x} = -\frac{1 + (x-1)}{x-1} = -\frac{1}{x-1} - 1. \qquad (2)$$

La simetría con relación al eje de abscisas de la hipérbola $y = 1/x$ la proporciona el gráfico de la función $y = -1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ (fig. 14). Tomemos un nuevo sistema de coordenadas que se obtiene del

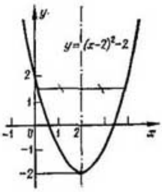


Fig. 13

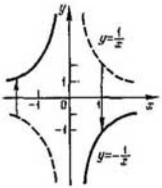


Fig. 14

anterior, en correspondencia con (2), con el desplazamiento a la izquierda a lo largo del eje de abscisas a una unidad y, a continuación, a una unidad hacia arriba por el eje de ordenadas (fig. 15).

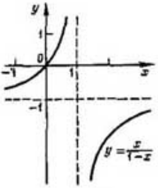


Fig. 15

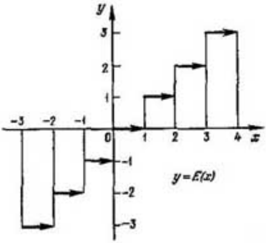


Fig. 16

La curva representada en el gráfico de la función $y = -1/x$ será en el nuevo sistema de coordenadas el gráfico de la función $y = x/(1 - x)$. ▲

Ejemplo 4. Construyan el gráfico de la función

$$y = E(x),\ x \in \mathbb{R}\ (\textit{parte entera de } x),$$

donde $E(x)$ es el número entero mayor que no sobrepasa x *).

△ En cada intervalo $[n;\ n+1)$, donde $n \in \mathbb{Z}$, la función dada es constante e igual a n. De acuerdo con esto se ha representado su gráfico en la fig. 16. En él, la flecha nos indica que el punto en su punta no pertenece al gráfico. ▲

7.30. ¿Cuáles de las indicadas funciones son pares, cuáles impares y, por fin, cuáles de ellas no son ni lo uno ni lo otro:

1) $y = |x|,\quad x \in \mathbb{R}$. 2) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1},\quad x \in \mathbb{R}$.

3) $y = \dfrac{1}{1-x^5},\quad x \in (-1;\ 1)$. 4) $y = \dfrac{1}{1-x^4},\quad x \in (-1;\ 1)$.

5) $y = \begin{cases} x^4, & x > 0, \\ x^2, & x \leqslant 0. \end{cases}$ 6) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1},\quad x \in (-\infty;\ 1]$.

7) $y = |x+1|,\ x \in \mathbb{R}$. 8) $y = |x+1| + |x-1|,\ x \in \mathbb{R}$.
9) $y = |10 - x| - |10 + x|,\ x \in \mathbb{R}$?

7.31. Demuestren que el producto de dos funciones pares o dos impares es una función par, mientras que el producto de una función par por una impar es una función impar.

7.32. Construyan los gráficos de las funciones:
1) $y = 2x^2 - 4x + 5$. 2) $y = 2x - x^2 - 2$.
3) $y = x^2 - 2x + c$, donde a) $c = 2$; b) $c = 1$; c) $c = 0$; d) $c = -3$.
4) $y = \sqrt{x-2} + x + \sqrt{2-x}$.

7.33. En un sistema de coordenadas construyan el gráfico de las funciones:
1) $y = x$; $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^4$.
2) $y = \dfrac{1}{x}$; $y = \dfrac{1}{x^2}$; $y = \dfrac{1}{x^3}$.
3) $y = x$; $y = x^{1/2}$; $y = x^{1/3}$; $y = x^{1/4}$.
4) $y = \dfrac{1}{x}$; $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Construyan los gráficos de las funciones (**7.34**—**7.37**):

7.34. 1) $y = \sqrt{4-x^2}$. 2) $y = -\sqrt{9-x^2}$.
3) $y = 3 - \sqrt{1-x^2}$. 4) $y = \sqrt{2x-x^2} - 1$.

7.35. $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ (se lee: «signo x»).

---

*) En ocasiones esta función se designa con $y = [x]$.

7.36. 1) $y = \{x\}$, donde $\{x\} = x - E(x)$ es la *parte fraccional de* x. 2) $y = E(1/x)$.

7.37. 1) $y = |x - 1|$. 2) $y = |x + 2|$. 3) $y = |x + 1| + |x - 1|$.

4) $y = (|x + 1| - |x - 1|)/2$.

5) $y = \operatorname{sign} x - (|x + 1| - |x - 1|)/2$.

6) $y = \operatorname{sign} x^2$. 7) $y = \operatorname{sign}(x^2 - 1)$.

8) $y = \operatorname{sign} \frac{2-x}{+x}$. 9) $y = \operatorname{sign}(x^3 - 4x)$.

7.38. Construyan los gráficos de las funciones $f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $-f(-x)$, $f(x) - 3$, $f(x - 3)$ si:

1) $f(x) = 2x + 6$. 2) $f(x) = 4x - x^2$.

3) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. 4) $f(x) = 1/x$.

7.39. Construyan los gráficos de las funciones:

1) $y = \frac{2x-1}{x}$. 2) $y = \frac{1}{x+1}$. 3) $y = \frac{3x}{x-2}$.

4) $y = \frac{x-1}{x+2}$.

7.40. Construyan los gráficos de las funciones $f(x)$, $|f(x)|$ y $f(|x|)$ si:

1) $f(x) = 3x - 8$. 2) $f(x) = 3 - 2x$. 3) $f(x) = x^2 - x - 2$.

4) $f(x) = 6x - x^2 - 5$. 5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$. 6) $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$.

7.41 Continúen la función $y = f(x)$, $x \in (0; a)$ en $(-a; 0]$ de modo que la función obtenida en $(-a; a)$ sea: a) par, b) impar:

1) $y = x$, $x \in (0; +\infty)$. 2) $y = x^2$, $x \in (0; +\infty)$.

3) $y = \sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$. 4) $y = x + 5$, $x \in (0; +\infty)$.

5) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (0; 1)$. 6) $y = x^2 - 4x + 3$, $x \in (0; +\infty)$.

7) $y = \frac{1}{x(x+1)}$, $x \in (0; +\infty)$.

Prefijen la continuación de la fórmula y construyan el gráfico de la función obtenida.

7.42. Construyan en un sistema de coordenadas los gráficos de las funciones $f(x)$ y $1/f(x)$ si:

1) $f(x) = 3x - 2$. 2) $f(x) = x^2 + 1$.

3) $f(x) = x^2 - 1$. 4) $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$.

7.43. Construyan en un sistema de coordenadas los gráficos de las funciones f_1, f_2 y $f_1 + f_2$ si:

1) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x$. 2) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -\frac{1}{x^2}$.

3) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$. 4) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$.

7.44. Construyan en un sistema de coordenadas los gráficos de las funciones f_1, f_2 y $f_1 - f_2$ si:

1) $f_1(x) = \sqrt{4-x^2}$, $f_2(x) = x^2$. 2) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$.

3) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 4x$.

4) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 1/x^2$.

---

4. Función inversa. Sea la función $y = f(x)$, $x \in D(f)$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2, \in D(f)$, de $x_1 \neq x_2$ se desprende que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Entonces, para cada $y \in E(f)$ se hallará sólo un valor de $x \in D(f)$ tal que $f(x) = y$.

La función definida en $E(f)$ y que contrapone al valor de $y \in E(f)$ tal $x \in D(f)$ que $f(x) = y$ recibe el nombre de *inversa* a la función f y se designa con f^{-1}, es decir,

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in E(f).$$

De acuerdo con la definición $D(f^{-1}) = E(f)$, $E(f^{-1}) = D(f)$, es decir, los conjuntos de definiciones y valores de las funciones inicial e inversa intercambian su puesto.

La función que tiene inversa se denomina *invertible*.

Cada recta $y = y_0$, donde $y_0 \in E(f)$, corta el gráfico de la función invertible en un sólo punto $(x_0; y_0)$, donde $f(x_0) = y_0$.

Designando, como se hace habitualmente, el argumento de la función inversa con x y su valor con y, se escribe en la forma

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

De la definición de la función inversa se desprende que

$$\forall\, x \in E(f)\ f(f^{-1}(x)) = x, \tag{3}$$

$$\forall\, x \in D(f)\ f^{-1}(f(x)) = x. \tag{4}$$

El gráfico de la función inversa $y = f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1})$ es simétrico al gráfico de la función $y = f(x)$, $x \in D(f)$ con relación a la recta $y = x$. En la fig. 17 está representado el gráfico de las funciones mutuamente inversas $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 5. Demuestren que la función prefijada con la fórmula

$$y = x^2 - 4x + 2: \tag{5}$$

a) en $\mathbb{R}$ es ininvertible;

b) en $(-\infty; 2]$ es invertible.

En el caso b) construyan el gráfico de la función inversa.

△ a) La ecuación

$$x^2 - 4x + 2 = y_0 \tag{6}$$

tiene las raíces

$$x_1 = 2 + \sqrt{y_0 + 2} \quad \text{y} \quad x_2 = 2 - \sqrt{y_0 + 2}$$

para toda $y_0 \geqslant -2$. Con $y_0 > -2$ estas raíces son diferentes, es decir, para $y_0 > -2$ hay dos valores diferentes del argumento x_1 y x_2 tales que $y(x_1) = y(x_2)$ (cada recta $y = y_0$, $y_0 > -2$, corta el gráfico de la función en dos puntos (véase la fig. 13)). Esto significa que la función definida con la fórmula (5) por todo $\mathbb{R}$ es ininvertible.

b) Para cualquier $y_0 \geqslant -2$, la ecuación (6) sólo tiene la solución

$$x = 2 - \sqrt{y_0 + 2} \tag{7}$$

del intervalo $(-\infty; 2]$. Esto quiere decir que la función definida con la fórmula (5) en $(-\infty; 2]$ es invertible. El gráfico de esta función es la parte izquierda, respecto de la recta $x = 2$, de la pará-

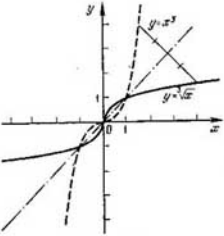


Fig. 17

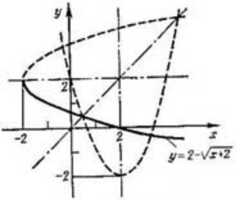


Fig. 18

bola en la fig. 18, cada recta $y = y_0$, $y_0 \geqslant -2$ corta el gráfico sólo por un punto. El campo de los valores de la función dada, es decir, el intervalo $[-2; +\infty)$, es el campo de definición de la función inversa que, de acuerdo con (7), se prefija con la fórmula

$$y = 2 - \sqrt{x + 2}. \tag{8}$$

Con el fin de obtener el gráfico de la función inversa efectuemos la simetría de la parábola $y = x^2 - 4x + 2$ (véase la fig. 13) con relación a la recta $y = x$ (fig. 18). La parte de la parábola obtenida por debajo de la recta $y = 2$ será el gráfico de la función (8). ▲

7.45. Demuestren que las funciones f y g son funciones mutuamente inversas:

1) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $g(x)=\frac{x}{1-x}$.

2) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$, $g(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$.

7.46. Demuestren que el gráfico de la función f es simétrico con relación a la recta $y=x$:

1) $f(x)=\frac{a}{x}\ (a\neq 0)$. 2) $f(x)=\sqrt[7]{2-x^7}$.

7.47. ¿Son mutuamente inversas las funciones dadas con las fórmulas:

1) $y=\frac{x+1}{x-1}$, $y=\frac{x+1}{x-1}$. 2) $y=1-\sqrt[3]{x}$, $y=(1-x)^3$.

3) $y=1+\sqrt{x}$, $y=(x-1)^2$.

4) $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$?

7.48. Entre las funciones indiquen las invertibles:

1) $y=2x-1$. 2) $y=|x|$. 3) $y=1/x^3$.

4) $y=x^2+2x-3$. 5) $y=\sqrt[3]{x^5}$. 6) $y=\sqrt{x-1}$.

7) $y=\operatorname{sign} x$. 8) $y=x^2\operatorname{sign} x$.

Prefijen las funciones inversas con fórmulas y construyan sus gráficos.

7.49. 1) ¿Con qué a y b la función $y=ax+b$ tiene inversa y coincide con ella?

2) ¿Con cuáles $\alpha\in\mathbb{R}$ la función $y=x^\alpha$, $x>0$, coincide con su inversa?

---

5. Funciones acotadas y no acotadas. La función f recibe el nombre de *acotada superiormente sobre el conjunto* $X\in D(f)$ si existe un número C tal que para cualquiera $x\in X$ es cierta la desigualdad

$$f(x)\leqslant C.$$

Empleando los símbolos $\exists$ y $\forall$ esta definición se escribe de la siguiente forma:

$$\exists C\forall x\ ((x\in X)\Rightarrow(f(x)\leqslant C)). \tag{9}$$

Por analogía, la función f *es acotada inferiormente sobre el conjunto* $X\subset D(f)$ si

$$\exists C\forall x\ ((x\in X)\Rightarrow(f(x)\geqslant C)). \tag{10}$$

La función acotada tanto superior como inferiormente sobre el conjunto X lleva el nombre de *acotada sobre el conjunto* X. Esta defi-

nición es equivalente a la siguiente: la función f es acotada sobre el conjunto $X \subset D(f)$ si existe un número $C > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ es cierta la desigualdad $|f(x)| \leqslant C$; para abreviar

$$\exists C > 0 \forall x \,((x \in X) \Rightarrow (|f(x)| \leqslant C)). \tag{11}$$

Si en estas definiciones $X = D(f)$, la función se denomina *superiormente acotada, inferiormente acotada, acotada,* respectivamente.

P. ej., la función $y = 1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ es acotada superiormente sobre el conjunto $X = (-\infty; 0)$, ya que $1/x < 0$ con $x < 0$, es decir, (9) se cumple para $C = 0$. Esta misma función es acotada inferiormente sobre $(0; +\infty)$, ya que (10) se verifica con $C = 0$. La función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$ es acotada inferiormente con $a > 0$, ya que para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{12}$$

y, por consiguiente, $ax^2 + bx + c \geqslant (4ac - b^2)/4a$, es decir (10) es cumplida con $C = (4ac - b^2)/4a$. Con $a < 0$ la función cuadrática es acotada superiormente, ya que de (12) se deduce que para toda $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad

$$ax^2 + bx + c \leqslant (4ac - b^2)/4a.$$

Ejemplo 6. Demuestren que la función

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

es acotada.

$\triangle$ De la desigualdad para la media proporcional y la aritmética se desprende que $|x| \leqslant (x^2 + 1)/2$. De aquí obtenemos

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{|x|}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

para toda $x \in \mathbb{R}$, es decir, (11) se verifica con $C = 1/2$ y, por lo tanto, la función dada es acotada. $\blacktriangle$

La negación de la definición de función acotada (véase (11)) tiene la forma: la función f es *no acotada* si para cualquier $C > 0$ hay tal $x \in D(f)$ que $|f(x)| > C$; para abreviar

$$\forall C > 0 \,\exists x \,((x \in D(f)) \Rightarrow (|f(x)| > C)). \tag{13}$$

De modo análogo se enuncian las negaciones de las definiciones de función acotada superiormente (inferiormente).

Ejemplo 7. Demuestren que la función $y = 1/x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, es no acotada y construyan su gráfico.

$\triangle$ Sea C un número arbitrario positivo. La desigualdad $1/x^2 > C$ es equivalente a la desigualdad $|x| < 1/\sqrt{C}$ con $x \neq 0$. P. ej., si tomamos $x = 1/(2\sqrt{C})$ obtenemos que $1/x^2 = 4C > C$, lo que en

correspondencia con (13), precisamente, significa que la función dada es no acotada.

El gráfico de la función se ofrece en la fig. 19. El es simétrico con relación al eje de ordenadas, ya que la función dada es par y se encuentra sobre el eje de abscisas en virtud de que $1/x^2 > 0$ para toda $x \neq 0$. ▲

7.50. Demuestren que las funciones son acotadas:

1) $y = x^2 - x - 1$, $x \in [-1; 5]$. 2) $y = \frac{1}{x-10}$, $x \in [0; 5]$.

3) $y = \frac{x^3}{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$, 4) $y = \frac{\sqrt[3]{x^4+10}}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

5) $y = \frac{x^2-1}{|x^3-1|}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. 6) $y = \frac{3x^2+6x+10}{\sqrt{0,1x^4+1}}$.

7.51. Enunciar y escribir, haciendo uso de los símbolos $\exists$, $\forall$, las definiciones de que la función: 1) no es acotada superiormente, 2) no es acotada inferiormente.

7.52. Demuestren que la función $y = 1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$: 1) no es acotada superiormente, 2) no es acotada inferiormente.

7.53. Demuestren que la función $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;\ 1)$ es acotada inferiormente y no acotada superiormente.

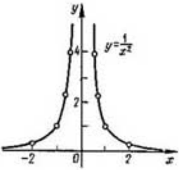


Fig. 19

7.54. Demuestren que la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$: 1) no es acotada superiormente con $a > 0$, 2) no es acotada inferiormente con $a < 0$.

7.55. Demuestren que 1) la suma, 2) la multiplicación de funciones acotadas es una función acotada.

---

6. Cotas superior e inferior, valores máximo y mínimo de la función. Funciones monótonas. La cota superior (inferior) del conjunto de todos los valores de la función $y = f(x)$, $x \in D(f)$ recibe el nombre de *cota superior* (*inferior*) *de la función* y se designa

$$\sup f, \ \sup f(x), \quad (\inf f, \ \inf f(x)).$$

Si en esta definición se consideran los valores de la función sólo sobre el conjunto $X \subset D(f)$, entonces se habla de la cota *superior* (*inferior*) *de la función sobre el conjunto* X y se escribe

$$\sup_X f, \ \sup_{x\in X} f(x) \quad (\inf_X f, \ \inf_{x\in X} f(x)).$$

El valor $f(x_0)$, donde $x_0 \in X \subset D(f)$, de la función se llama

máximo (mínimo) sobre el conjunto X si para toda $x \in X$ es cierta la desigualdad $f(x) \leqslant f(x_0)$ (correspondientemente $f(x) \geqslant f(x_0)$). En este caso el número $f(x_0)$ se designa

$$\max_X f, \ \max_{x \in X} f(x) \ \text{(en correspondencia } \min_X f, \ \min_{x \in X} f(x)).$$

Si $X = D(f)$, se habla con brevedad del *valor máximo (mínimo)* de la función y se designa con

$$\max f, \quad \max f(x) \quad (\min f, \ \min f(x)).$$

Si existe $\max\limits_X f$, entonces $\sup\limits_X f = \max\limits_X f$; si existe $\min\limits_X f$, entonces $\inf\limits_X f = \min\limits_X f$.

De la existencia del $\sup\limits_X f$ ($\inf\limits_X f$) finito no se deduce, hablando en general, la existencia de los valores máximo (mínimo) de la función. P. ej., la función para la que en la fig. 20 está representado su gráfico, no tiene valor máximo, pero, al mismo tiempo $\sup f = 1$.

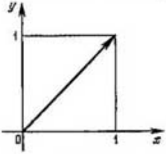


Fig. 20

La función f se denomina *creciente (no decreciente) sobre el conjunto* $X \subset D(f)$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ de la desigualdad $x_1 < x_2$ se desprende la desigualdad $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Esta definición puede escribirse de modo abreviado:

$$\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 \in X, \ x_2 \in X, \ x_1 < x_2) \Rightarrow \Rightarrow (f(x_1) \leqslant f(x_2))).$$

La función f se llama *decreciente (no creciente) sobre el conjunto* $X \subset D(f)$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce la desigualdad $f(x_1) \geqslant f(x_2)$; para abreviar

$$\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 \in X, \ x_2 \in X, \ x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geqslant f(x_2))).$$

Si en estas definiciones de la desigualdad $x_1 < x_2$ se desprende la desigualdad estricta $f(x_1) < f(x_2)$ (correspondientemente $f(x_1) > f(x_2)$), la función recibe el nombre de *estrictamente creciente* (en correspondencia, *estrictamente decreciente*) *sobre el conjunto* X.

Las funciones crecientes y decrecientes se unen en la denominación *monótonas*, las estrictamente crecientes y decrecientes, en *estrictamente monótonas*.

Si $X = D(f)$, la indicación del conjunto X se omite.

Un ejemplo de función estrictamente creciente es $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ (véase la fig. 12). La función $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ (véase la fig. 11), decrece estrictamente sobre $(-\infty; 0)$ y crece estrictamente sobre $(0; +\infty)$, por todo su campo de definición $\mathbb{R}$ ella no es monótona.

7.56. Hallen $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$ si:

1) $f(x) = x^2 - 4x - 5$, $X = [0;\ 5]$.
2) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$, $X = [0;\ 4]$.

3) $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $X = [-10;\ -3]$.

4) $f(x) = \frac{4-x^2}{4+x^2}$, $X = [-1;\ 3]$.

5) $f(x) = \frac{x^4+4}{x^2}$, $X = [1;\ 2]$.

6) $f(x) = \frac{x^3}{x^4+9}$, $X = \mathbb{R}$.

7.57. Demuestren que si la función f es de signo constante sobre el conjunto X, entonces

$$\max_X \frac{1}{f} = \min_X f, \quad \min_X \frac{1}{f} = \max_X f.$$

7.58. Demuestren que $\max f$ y $\min f$ no existen si:

1) $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

2) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \in (-1;\ +\infty)$. 3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

7.59. Demuestren que existe $\min f$, pero no existe $\max f$. Hallen $\min f$ si:

1) $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. 2) $f(x) = x^3 + \frac{8}{x^3}$, $x \in (0;\ +\infty)$.

3) $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. 4) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$, $x \in [1;\ 2)$.

7.60. Demuestren que existe $\max f$, pero no existe $\min f$; hallen $\max f$, si:

1) $f(x) = 4x - x^2 - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x \in (-8;\ 0)$.

3) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $x \in \mathbb{R}$. 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $x \in [0;\ 1)$.

7.61. Hallen $\sup\limits_X f$, $\inf\limits_X f$, así como $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$ si los dos últimos existen:

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $X = (0;\ +\infty)$.

2) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $X = (-\infty;\ 0)$.

3) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $X=\mathbb{R}$.
4) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$, $X=\{x\in[-2; 3], x\neq 2\}$.
5) $f(x) = x - E(x)$, $X = \mathbb{R}$.

7.62. 1) Demuestren que si existe $\max\limits_X f$, entonces

$$\sup_X f = \max_X f.$$

2) Demuestren que si existe $\min\limits_X f$,

$$\inf_X f = \min_X f.$$

7.63. Demuestren que

$$\inf_{x\in X}(-f(x)) = -\sup_{x\in X} f(x).$$

7.64. Demuestren que la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$; 1) con $a > 0$ estrictamente decrece sobre $(-\infty; -b/2a]$ y estrictamente crece sobre $[-b/2a; +\infty)$; 2) con $a < 0$ estrictamente crece sobre $(-\infty; -b/2a]$ y estrictamente decrece sobre $[-b/2a; +\infty)$.

7.65. Demuestren que la función $y = x^3 + x$ crece.

7.66. Demuestren que la función $y = (1 - x^2)/x$ decrece en cualquier intervalo que no contiene cero.

7.67. Demuestren que la función $y = (1 + x^2)/x$: 1) estrictamente crece sobre $(-\infty; -1]$ y sobre $[1; +\infty)$; 2) estrictamente decrece sobre $[-1; 0)$ y sobre $(0; 1]$.

7.68. Hallen los máximos intervalos sobre los que la función $y = x^4 - 2x^2 - 2$: 1) crece, 2) decrece.

7.69. 1) Demuestren que la función estrictamente monótona es biunívoca.

2) Aduzcan un ejemplo de una función biunívoca no monótona.

---

7) Funciones exponencial y logarítmica. Sea a el número positivo dado, $a \neq 1$. La *función exponencial*

$$y = a^x \tag{14}$$

está definida en $\mathbb{R}$, el intervalo $(0; +\infty)$ es el conjunto de sus valores. Con $a > 1$ la función estrictamente crece, con $0 < a < 1$, estrictamente decrece (fig. 21).

La función exponencial $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ es invertible. La función inversa recibe el nombre de *logarítmica* y se designa con

$$y = \log_a x, \tag{15}$$

ella está definida en el intervalo $(0; +\infty)$, el conjunto $\mathbb{R}$ es el conjunto de sus valores. Con $a > 1$ la función logarítmica estricta-

mente crece, con $0 < a < 1$ estrictamente decrece. Los gráficos de las funciones $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $y = \log_a x$, $x \in (0; +\infty)$ son simétricos entre sí con relación a la recta $y = x$ (fig. 22, 23).

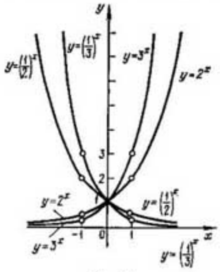


Fig. 21

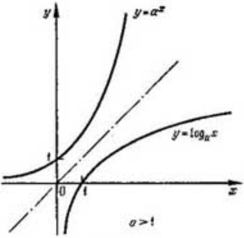


Fig. 22

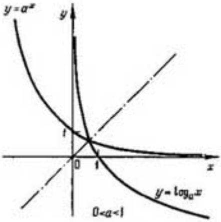


Fig. 23

Lo que las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ sean recíprocamente inversas significa que

$$\forall x \in (0; +\infty) \quad a^{\log_a x} = x, \tag{16}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log_a a^x = x. \tag{17}$$

Ejemplo 8. Construyan el gráfico de la función prefijada con la fórmula

$$y=\frac{1}{2^x-1}.$$

△ La función está definida para todas las $x \in \mathbb{R}$ tales que $2^x \neq 1$, es decir, $x \neq 0$. Al construir su gráfico es posible emplear el de la función $y = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ (fig. 24). Esta función estrictamente

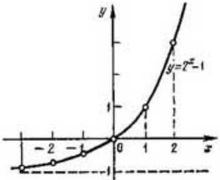


Fig. 24

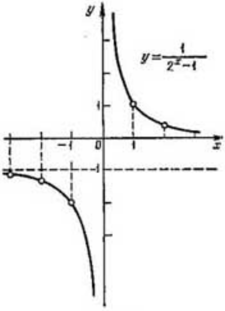


Fig. 25

crece desde -1 hasta $+\infty$. Los valores de la función dada son inversos a los de la función $y = 2^x - 1$. Sobre $(-\infty; 0)$ la función dada decrece desde -1 hasta $-\infty$ y sobre $(0; +\infty)$ decrece desde $+\infty$ hasta 0 (fig. 25). ▲

Ejemplo 9. Construyan el gráfico de la función prefijada con la fórmula

$$y = \log_3 (x^2 - 1).$$

△ La función está definida para todas las x tales que $|x| > 1$, es decir, en la unión de los intervalos $(-\infty; -1)$ y $(1; +\infty)$. La función es par, su gráfico es simétrico con relación al eje de ordenadas.

La función dada es la composición de las funciones $y = x^2 - 1$ (su gráfico se ofrece en la fig. 26) y la función logarítmica $y = \log_3 x$.

Sobre el intervalo $(1;\ +\infty)$ los valores de x^2-1 estrictamente crecen desde 0 hasta $+\infty$, por lo que los valores de $\log_3(x^2-1)$ estrictamente crecen desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El gráfico corta el eje de abscisas con $x=\sqrt{2}$ y $x=-\sqrt{2}$ (fig. 27). ▲

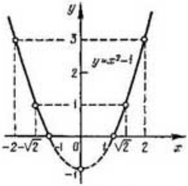


Fig. 26

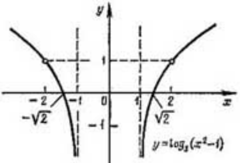


Fig. 27

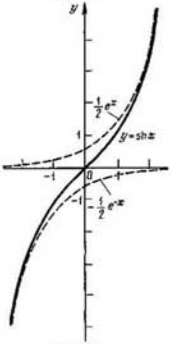


Fig. 28

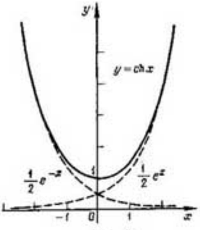


Fig. 29

8. Funciones hiperbólicas. El *seno y coseno hiperbólicos* se definen en $\mathbb{R}$ respectivamente con las fórmulas

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}. \tag{18}$$

La función $y = \operatorname{sh} x$ es impar, estrictamente creciente. La función $y = \operatorname{ch} x$ es par, estrictamente decreciente sobre $(-\infty; 0]$ y estric-

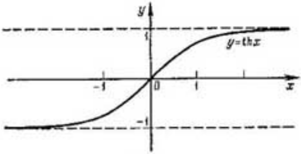


Fig. 30

tamente creciente sobre $[0; +\infty)$. Los gráficos de estas funciones están representados en las figs. 28, 29.

La tangente y cotangente hiperbólicas se definen con las fórmulas

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (19)$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0. \qquad (20)$$

Las dos funciones son impares y sus gráficos se dan en las figs. 30, 31.

Las funciones $y = \operatorname{sh} x$ e $y = \operatorname{th} x$, $x \in \mathbb{R}$ son invertibles, sus funciones inversas se designan, respectivamente,

$$y = \operatorname{arsh} x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (21)$$

(se lee: *seno-area hiperbólico*),

$$y = \operatorname{arth} x, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (22)$$

(se lee: *tangente-área hiperbólica*).

Ejemplo 10. Demuestren que la función inversa a la función

$$y = \operatorname{ch} x, \quad x \in [0; +\infty),$$

es elemental y construyan su gráfico.

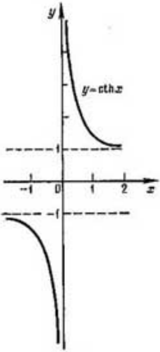


Fig. 31

△ Sobre $[0; +\infty)$ la función $y = \operatorname{ch} x$ estrictamente crece y, por ello, es invertible. El campo de definición de la función inversa será el intervalo $[1; +\infty)$ que es el conjunto de los valores de la función

inicial. Para toda $y \in [1; +\infty)$ la ecuación ch $x = y$, o sea,

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

se reduce a la ecuación cuadrática con relación a e^x

$$(e^x)^2 - 2\,ye^x + 1 = 0.$$

De aquí hallamos $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, $x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$. Sólo la raíz $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ satisface la condición $x \geqslant 0$. Así, pues, la función inversa se prefija con la fórmula

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \in [1; +\infty). \quad (23)$$

Vemos que esta función se obtiene con ayuda de un número finito de operaciones aritméticas y composiciones de funciones potenciales y logarítmicas, es decir, es elemental.

El gráfico de la función inversa se obtiene con la simetría respecto de la recta $y = x$ del gráfico de la función $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0; +\infty)$ (fig. 32). ▲

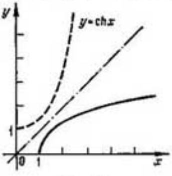


Fig. 32

7.70. Hallen el campo de definición de las funciones:

1) $y = \frac{1}{16^{x^2} - 2^x}$. 2) $y = \sqrt{2^x - 3^x}$.

3) $y = \log_2 x^2$ e $y = 2\log_2 x$.
4) $y = \log_x 5$. 5) $y = (\log(100 - x))^{-1}$.
6) $y = \ln x + \ln(x - 1)$ e $y = \ln x(x - 1)$.
7) $y = \log_{3+x}(x^2 - 1)$. 8) $y = \log_3 \log_{0,5} x$.

7.71. Hallen el conjunto de los valores de las funciones:

1) $y = 10^{-x^2}$. 2) $y = \frac{1}{1 - 2^{-x}}$. 3) $y = 4^x - 2^x + 1$.

4) $y = \log(x^2 + 10)$. 5) $y = \log_2(4 - x^4)$.
6) $y = \log_3 x + \log_x 3$.

7.72. ¿Cuáles de las funciones son pares, cuáles impares, cuáles no son ni pares ni impares:

1) $y = x \cdot 2^{-x}$. 2) $y = |\log x|$. 3) $y = \ln e^x$.

4) $y = 10^{\log x}$. 5) $y = 10^x + 10^{-x}$.

6) $y = \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3^{-x}}$. 7) $y = \operatorname{th} x - \sqrt{x}$.

8) $y = \ln(1 - x^2)$. 8) $y = \ln \operatorname{cth} x$?

7.73. Demuestren que:
1) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.
2) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
3) $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.
4) $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
5) $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = (\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))/2$.
6) $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = (\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))/2$.
7) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = (\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))/2$.

7.74. Demuestren que las siguientes funciones son acotadas:

1) $y = 10^{-|x|}$. 2) $y = 0{,}3^{x^2-1}$. 3) $y = \dfrac{1}{\log(2+x^4)}$

4) $y = \log_4(x^2+5) - \log_2(1+|x|)$.

5) $y = (\log x + \log_x 10)^{-1}$.

7.75. Demuestren que las siguientes funciones son no acotadas:
1) $y = 0{,}4^x$, $x \in \mathbb{R}$. 2) $y = \log_{0,1} x$, $x \in (1;\ +\infty)$.
3) $y = x^x$, $x \in (0;\ +\infty)$. 4) $y = \log_x 2$, $x \in (1;\ +\infty)$.

7.76. Demuestren que con $a > 1$:

1) $\sup\limits_{(0;\ +\infty)} a^{1/x} = +\infty$, $\inf\limits_{(0;\ +\infty)} a^{1/x} = 1$.

2) $\sup\limits_{(-\infty;\ 0)} a^{1/x} = 1$, $\inf\limits_{(-\infty;\ 0)} a^{1/x} = 0$.

7.77. Hallen $\inf f$, $\sup f$, así como $\max f$, $\min f$ si ellos existen:

1) $f(x) = 2^{-|x+2|}$. 2) $f(x) = (\sqrt{2}-1)^{1-x^2}$.

3) $f(x) = 1 - 2^{1/(x-1)}$. 4) $f(x) = 8 - 2^{x+1} - 4^x$.

5) $f(x) = \log(x^2+x-2)$. 6) $f(x) = \log_{0,1}(4x-3-x^2)$.

7) $f(x) = (\log_2(2/x))\log_2 8x$.

7.78. Demuestren que la función $y = 2^{1/x}$ decrece sobre cada intervalo que no contiene cero.

7.79. Demuestren que la función $y = \log_3(x^2-2x)$ decrece sobre $(-\infty;\ 0)$ y crece sobre $(2;\ +\infty)$.

7.80. Investigar la monotonía de las funciones:

1) $y = (2/3)^{1/x}$. 2) $x = 3^{|x|}$.

3) $y = 2^{1-x} - 2^{x-1}$. 4) $y = \log(1+x^3)$.

5) $y = \log_x 10$. 6) $y = \ln(4x-x^2)$.

7) $y = \log_{0,5}\dfrac{x}{x+1}$.

Construyan los gráficos de las funciones (7.81—7.82):

7.81. 1) $y = 3^{-|x+2|}$. 2) $y = 2^{1/x}$.

3) $y = \dfrac{2^x}{2^{x+1}-1}$. 4) $y = \log_4|x+1|$.

5) $y=1-2\log_{1/3}|x|$. 6) $y=|\log_{0.5}x|-1$.

7) $y=\log x^2$. 8) $=\log_{0.2}5^x$. 9) $y=8^{\log_8(x-3)}$.

7.82. 1) $y=(1{,}5)^{x^2-1}$. 2) $y=2^{(x+1)/x}$.
3) $y=\log_2(x^2+x-2)$. 4) $y=\log_{0.1}(4x-3-x^2)$.
5) $y=\log_3((x+2)/x)$. 6) $y=\log_x 3$.

7.83. La función dada sobre $(0;+\infty)$ ha de continuarse prefijando la fórmula sobre $(-\infty;0]$: a) de forma par, b) de forma impar; construyan el gráfico de la función que se obtiene:

1) $y=-3\cdot 2^{x-1}$. 2) $y=1-2\log x$.

3) $y=\log_{x+2}x$. 4) $y=\text{th}\,(x-1)$.

7.84. Hallen la función inversa a la dada, indiquen su campo de definición y construyan su gráfico:

1) $y=3^{1-x}$. 2) $y=1+\log(x+2)$.

3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$. 4) $y=\log_x 10$.

5) $y=2^{x-1}-2^{-x}$. 6) $y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$.

7.85. Para la función indicada prefijen la función inversa con la fórmula y construyan su gráfico:
1) $y=\text{ch}\,x$, $x\in(-\infty;0)$. 2) $y=\text{sh}\,x$, $x\in\mathbb{R}$.
3) $y=\text{th}\,x$, $x\in\mathbb{R}$. 4) $y=\text{cth}\,x$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.

7.86. Demuestren que el gráfico de la función $y=\ln(1-e^x)$ es simétrico con relación a la recta $y=x$.

---

9. Funciones periódicas. Funciones trigonométricas. El número $T\neq 0$ recibe el nombre de *período de la función* f si para cualquier $x\in D(f)$ se verifica

$$x+T\in D(f),\quad x-T\in D(f)\ \text{y}\ f(x+T)=f(x).$$

La función que tiene período se denomina *periódica*.

Si T es el período de una función, para toda $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$, el número nT es asimismo el período de la mencionada función.

Al desplazar T por el eje de abscisas, el gráfico de una función periódica con período T pasa a sí mismo.

Las funciones trigonométricas $y=\text{sen}\,x$ e $y=\cos x$ son periódicas con período positivo mínimo 2π, en tanto que $y=\text{tg}\,x$ e $y=\text{ctg}\,x$, periódicas con el período positivo mínimo π.

Las funciones $y=\text{sen}\,x$ e $y=\cos x$ están definidas en $\mathbb{R}$. La función $y=\text{tg}\,x$ está definida para toda $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. La función $y=\text{ctg}\,x$ está definida para toda $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Los gráficos de las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{tg} x$, que de modo evidente muestran sus propiedades, se ofrecen en las figs. 33, 34.

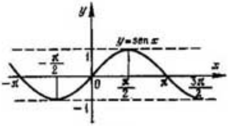


Fig. 33

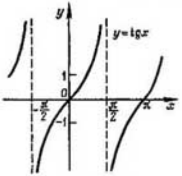


Fig. 34

De las fórmulas de reducción

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

se deduce que el gráfico de la función $y = \cos x$ se obtiene desplazando el gráfico de la función $y = \operatorname{sen} x$ a $\pi/2$ a la izquierda por el eje de abscisas (fig. 35). De la fórmula

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

se desprende que el gráfico de la función $y = \operatorname{ctg} x$ se obtiene del gráfico de la función $y = \operatorname{tg} x$ desplazándolo a $\pi/2$ a la derecha por

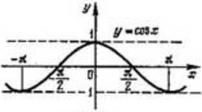


Fig. 35

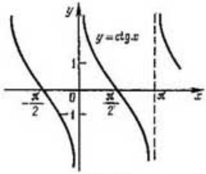


Fig. 36

el eje de abscisas y con simetría con relación a dicho eje (fig. 36). Las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ son impares, sus gráficos son simétricos respecto del origen de coordenadas. La función $y = \cos x$ es par, su gráfico, simétrico al eje de coordenadas.

Ejemplo 11. Construyan el gráfico de la función prefijada con la fórmula

$$y = \cos^2 x.$$

△ La función está definida sobre $\mathbb{R}$, es par, periódica con período π. Ya que,

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2,$$

su gráfico se obtiene del de la función $y = \cos x$ mediante su doble contracción a lo largo del eje Ox, desplazándolo a una unidad hacia arriba por el eje Oy y la doble contracción a lo largo del eje Oy. De acuerdo con esto el gráfico está representado en la fig. 37. ▲

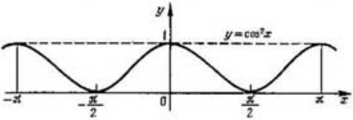


Fig. 37

Ejemplo 12. Construyan el gráfico de la función dada con la fórmula

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

△ El campo de definición de la función es el conjunto de toda $x \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{sen} x \neq 0$, es decir, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. La función es impar, periódica con período 2π. Construyamos el gráfico en el intervalo $(0; \pi)$ y, a continuación, continuémoslo en $(-\pi; 0)$ simétricamente al origen de coordenadas y, más adelante, continuémoslo periódicamente con período 2π.

Si $x \in (0; \pi)$, $0 < \operatorname{sen} x < 1$ y, por lo tanto,

$$1 \leqslant \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

con la particularidad de que

$$\min \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\Big|_{x=\pi/2} = 1.$$

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, el gráfico es simétrico con relación a la recta $x = \pi/2$. Al aumentar x desde 0 hasta $\pi/2$ los valores de $\operatorname{sen} x$ estrictamente crecen desde 0 hasta 1 y, por ello,

los valores de $1/\operatorname{sen} x$ estrictamente decrecen desde $+\infty$ hasta 1 (fig. 38). ▲

Las funciones prefijadas con las fórmulas

$$y=\frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad y=\frac{1}{\cos x},$$

llevan el nombre de *cosecante* y *secante*, respectivamente, y se designan

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x=\frac{1}{\cos x}. \tag{24}$$

Ejemplo 13. Construyan el gráfico de la función $y = x \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

△ La función es impar, por lo que construimos su gráfico con $x \geqslant 0$ y, después, verificamos la simetría respecto del origen de

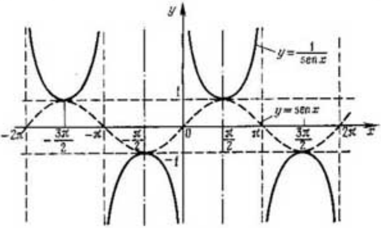


Fig. 38

coordenadas. Al construir el gráfico vamos a guiarnos del hecho de que las ordenadas de sus puntos se obtienen multiplicando las ordenadas de los puntos de los gráficos de las funciones $y = x$ e $y = \cos x$ (fig. 39).

El gráfico pasa por el origen de coordenadas, corta el eje Ox con $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (donde $\cos x = 0$). Como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, con $x \geqslant 0$, tenemos

$$-x \leqslant x \cos x \leqslant x,$$

es decir, el gráfico yace entre las rectas $y = x$ e $y = -x$. Con $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (donde $\cos x = 1$) el gráfico tiene puntos comunes con la recta $y = x$, mientras que con $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (donde $\cos x = -1$), puntos comunes con la recta $y = -x$.

Si $0 < x < 1$, $0 < x \cos x < \cos x$ y $x \cos x < x$, o sea, el gráfico yace más abajo de los gráficos $y = \cos x$ e $y = x$. Con $x = 1$ los gráficos $y = x \cos x$ e $y = \cos x$ se intersecan y, con ello, $y = \cos 1 \approx 0{,}54$. Si $x > 1$, entonces $|x \cos x| > |\cos x|$ si $\cos x \neq 0$, o sea, los puntos del gráfico $y = x \cos x$ yacen más lejos del

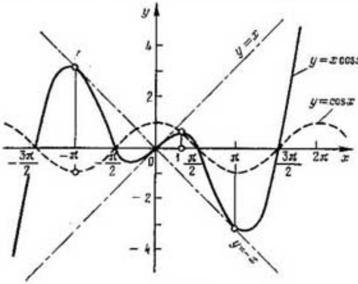


Fig. 39

eje Ox que los correspondientes puntos del gráfico $y = \cos x$. De acuerdo con esto, después de calcular y marcar varios puntos intermedios, representamos el gráfico (fig. 39). Él es una curva que oscila entre las rectas $y = x$ e $y = -x$. ▲

Ejemplo 14. Demuestren que la función $y = \operatorname{sen} x^2$, $x \in \mathbb{R}$, no es periódica.

△ Es suficiente demostrar que la función no tiene período positivo, ya que si el número $T < 0$ fuera el período, el número $-T$ sería un período positivo. Realicemos la demostración partiendo de lo contrario.

Supongamos que el número $T > 0$ es el período de la función, es decir, para toda $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen} (x + T)^2 = \operatorname{sen} x^2.$$

Con $x = 0$ de aquí se desprende que $\operatorname{sen} T^2 = 0$, o sea, $T^2 = \pi n$, en tanto que $T = \sqrt{\pi n}$ con cierta $n \in \mathbb{N}$. Si $0 < x < \sqrt{\pi}$, $\operatorname{sen} x^2 \neq 0$ y, como $\sqrt{\pi n}$ es el período, entonces, también $\operatorname{sen} (x + \sqrt{\pi n})^2 \neq 0$. Pero si $x = \sqrt{\pi}$, $\operatorname{sen} (\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi n})^2 = \operatorname{sen} (\sqrt{\pi})^2 = 0$. Esto quiere decir que el número $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi n}$ es el más próximo por la

derecha a $\sqrt{\pi n}$ con el que sen $x^2 = 0$. De aquí sigue que $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi n} \leqslant \sqrt{\pi(n+1)}$, ya que $\sqrt{\pi(n+1)} > \sqrt{\pi n}$ y sen $(\sqrt{\pi(n+1)})^2 = 0$. Pero la desigualdad $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi n} \leqslant \sqrt{\pi(n+1)}$ equivalente a la desigualdad $1 \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, no es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$, ya que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1.$$

Esto significa que tampoco es cierta la suposición de la periodicidad de la función sen x^2, es decir, dicha función no es periódica. ▲

10. Funciones trigonométricas inversas. La función periódica no es invertible, en particular, tampoco son invertibles las funciones trigonométricas. Pero sobre ciertos subconjuntos de su campo de definición éstas funciones son invertibles.

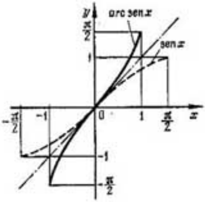


Fig. 40

La función sen x en el segmento $[-\pi/2;\ \pi/2]$ tiene su inversa que se designa

$$y = \operatorname{arcsen} x, \quad x \in [-1;\ 1]. \tag{25}$$

El conjunto de los valores de esta función es el segmento $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Con relación a la recta $y = x$ su gráfico es simétrico al de la función $y = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\pi/2;\ \pi/2]$ (fig. 40). La función $y = \operatorname{arcsen} x$ es impar.

La función $y = \cos x$, $x \in [0;\ \pi]$ tiene la función inversa

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1;\ 1], \tag{26}$$

para la que el conjunto de sus valores es el segmento $[0;\ \pi]$. El gráfico de esta función se ofrece en la fig. 41. El es simétrico con relación al punto $(0;\ \pi/2)$. La función $y = \arccos x$ no es ni par ni impar.

La función $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2;\ \pi/2)$ tiene la función inversa

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

para la que el conjunto de sus valores es el intervalo $(-\pi/2;\ \pi/2)$. La función $y = \operatorname{arctg} x$ es impar. Su gráfico se muestra en la fig. 42.

La función $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0;\ \pi)$ tiene la función inversa

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

para la que el conjunto de sus valores es el intervalo $(0; \pi)$. Esta función no es ni par ni impar. Su gráfico se muestra en la fig. 43. El es simétrico con relación al punto $(0; \pi/2)$.

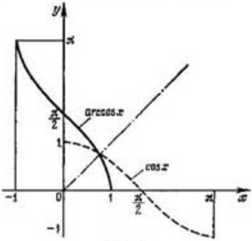


Fig. 41

Ejemplo 15. Demuestren que

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2, \quad x \in [-1; 1].$$

△ Las funciones sen x, $x \in [-\pi/2; \pi/2)$ y arcsen x, $x \in [-1; 1]$ son recíprocamente inversas, por lo que (véase (3)) para toda $x \in$ $\in [-1; 1]$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x.$$

De aquí y de la fórmula $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ se deduce que

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x\right), \quad x \in [-1; 1]. \tag{29}$$

Las funciones $\cos t$, $t \in [0; \pi]$ y $\arccos t$, $t \in [-1; 1]$ son recíprocamente inversas y, por lo tanto, (véase (4)), para toda $t \in [0; \pi]$

$$\arccos(\cos t) = t.$$

En particular esto es asimismo cierto para $t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x$, ya que $\frac{\pi}{\alpha} - \operatorname{arcsen} x \in [0; \pi]$. De aquí y de la fórmula (29), obtenemos que $\arccos x = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x$, es decir, $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \pi/2$ para toda $x \in [-1; 1]$. ▲

Ejemplo 16. Construyan los gráficos de las funciones prefijadas con las fórmulas:

1) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$; 2) $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

△ 1) Esta función está definida sobre $[-1; 1]$. La función sen x, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ es inversa para arcsen x, $x \in [-1; 1]$, por lo que (véase (3)) para toda $x \in [-1; 1]$ es cierta la igualdad

$$\text{sen}\ (\text{arcsen}\ x) = x.$$

De aquí se desprende que $y = x$, $x \in [-1; 1]$, es decir, el gráfico de semejante función es el segmento de la recta $y = x$ (fig. 44).

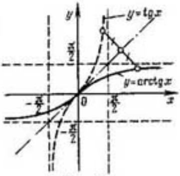


Fig. 42

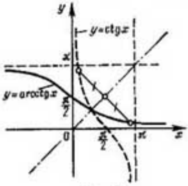


Fig. 43

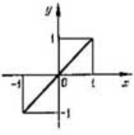


Fig. 44

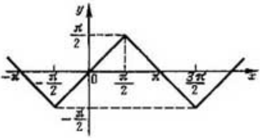


Fig. 45

2) Esta función definida sobre $\mathbb{R}$ es periódica con período 2π, ya que sen $(x + 2\pi)$ = sen x y, por consiguiente,

$$\text{arcsen}\ (\text{sen}\ (x + 2\pi)) = \text{arcsen}\ (\text{sen}\ x).$$

En virtud de que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ se deduce que

$$\text{arcsen}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\text{arcsen}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right),$$

por lo que el gráfico de la función dada es simétrico con relación a la recta $x = \pi/2$. Construyamos el gráfico en el segmento $[-\pi/2; \pi/2]$, continuémoslo simétricamente a la recta $x = \pi/2$ en el seg-

mento $[\pi/2; 3\pi/2]$ y, a continuación, a partir del segmento $[-\pi/2; 3\pi/2]$ continuemos de forma periódica con período 2π.

La función arcsen x, $x \in [-1; 1]$ es inversa respecto a la función sen x, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, por lo que para toda $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ tenemos

$$\text{arcsen}\ (\text{sen}\ x) = x.$$

Así, pues, en el segmento $[-\pi/2; \pi/2]$ el gráfico de la función dada coincide con la recta $y = x$ (fig. 45). De la simetría del gráfico con relación a la recta $x = \pi/2$ se desprende que en el segmento $[\pi/2; 3\pi/2]$ él coincide con la recta $y = \pi - x$, es decir,

$$\text{arcsen}\ (\text{sen}\ x) = \pi - x, \quad x \in [\pi/2; 3\pi/2].$$

En este segmento la función $y = \text{arcsen}\, x$, $x \in [-1; 1]$ no es inversa a la función $y = \text{sen}\ x$. ▲

Ejemplo 17. Construyan el gráfico de la función prefijada con la fórmula

$$y = \text{arctg}\ \frac{1}{x^2}.$$

△ Esta función es la composición de las funciones $z = 1/x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, con el conjunto de valores $(0; +\infty)$, e $y = \text{arctg}\ z$, $z \in \mathbb{R}$. El campo de definición de la función dada son todos los valores de $x \neq 0$. La función es par, su gráfico es simétrico con relación al eje de ordenadas.

De las propiedades de las funciones $z = 1/x^2$ (fig. 19) e $y = \text{arctg}\ z$ (fig. 42) se deduce que al crecer x desde 0 hasta $+\infty$ los valores de $1/x^2$ decrecen desde $+\infty$ hasta 0, mientras que los valores de arctg $(1/x^2)$ decrecen desde $\pi/2$ hasta 0. Después de calcular y marcar varios puntos intermedios trazamos el gráfico (fig. 46). El punto $(0; \pi/2)$ no entra en el gráfico. ▲

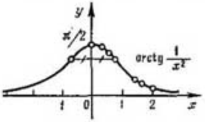


Fig. 46

7.87. Demuestren que la función

$$y = x - E(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

es periódica y hallen su período positivo mínimo.

7.88. Demuestren que la función de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es periódica y que cualquier número racional no nulo es su período, pero que ningún número irracional no lo es.

7.89. Hallen el período positivo mínimo de las funciones:
1) $y = \text{sen } 3x$. 2) $y = 6 \cos (3\pi x/4)$.
3) $y = \text{tg } (3x + 5)$. 4) $y = \text{sen}^2 (x - 1)$.
5) $y = | \text{tg } x + \text{ctg } 2x |$. 6) $y = \text{sen } x + \cos 2x$.
7) $y = \cos 2x \cos 6x$.

7.90. Demuestren que las siguientes funciones no son periódicas:
1) $y = \text{sen } | x |$. 2) $y = \cos (1/x)$.
3) $y = \cos x \cos \sqrt{3}x$.

7.91. Demuestren que si la función $y = f(x)$ es periódica con período T, la función $y = f(ax + b)$, $a \neq 0$ es periódica con período T/a.

7.92. Hallen el campo de definición de las funciones:

1) $y = \dfrac{\text{ctg } 2x}{\text{sen } (x/3)}$. 2) $y = \sqrt{\cos x}$.

3) $y = (\text{sen } x - 2 \text{ sen}^2 x)^{-3/4}$. 4) $y = \arccos (3 - x)$.

5) $y = \arcsin (0,5x - 1) + \arccos (1 - 0,5x)$.

6) $y = \ln \cos x$. 7) $y = \sqrt{\ln \text{sen } x}$.

7.93. Hallen el conjunto de los valores de las funciones:

1) $y = 1 - 2 | \cos x |$. 2) $y = \text{sen } x + \text{sen} \left(x + \dfrac{\pi}{3} \right)$.

3) $y = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$. 4) $y = \dfrac{1 + \text{sen } x}{\text{sen } x}$.

5) $y = \arccos | x |$. 6) $y = \pi - | \text{arctg } x |$.

7) $y = \cos \arcsin x$. 8) $y = \text{arctg } \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

¿Cuáles de las funciones son pares, cuáles impares y cuáles ni pares ni impares (**7.94—7.95**)?:

7.94. 1) $y = x + \text{sen } x$. 2) $y = x^2 - \cos x$.
3) $y = \text{sen } x \text{ tg } x$. 4) $y = (1 - x^2) \cos x$.
5) $y = (1 + \cos x) \text{ ctg } x$. 6) $y = \dfrac{1 + \text{sen } x}{\text{sen } x}$.
7) $y = \cos (x + 1)$. 8) $y = \text{sen } 5x + \cos 3x$.

7.95. 1) $y = \arcsin x^2$; 2) $y = 2 \arccos (-x)$.
3) $y = \arccos | x |$. 4) $y = | \text{arctg } x |$.
5) $y = \arccos (\cos x)$. 6) $y = \cos (\arccos x)$.
7) $y = \arcsin x + \arccos x$.

7.96. Demuestren:
1) $\arccos (-x) = \pi - \arccos x$, $| x | \leqslant 1$.
2) $\text{arctg } x + \text{arcctg } x = \pi/2$, $x \in \mathbb{R}$.
3) $\text{arcctg } (-x) = \pi - \text{arcctg } x$, $x \in \mathbb{R}$.

7.97. Utilizando las desigualdades:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x, \quad x \in (0;\ \pi/2)$$

demuestren las desigualdades:
1) $\operatorname{sen} x \geqslant x,\ x \leqslant 0$. 2) $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|,\ x \in \mathbb{R}$.

3) $\operatorname{ctg} x < 1/x,\ x \in (0;\ \pi/2)$. 4) $\cos x < \frac{\pi}{2} - x,\quad x \in (0;\ \pi/2)$.

5) $\operatorname{ctg} x > \frac{\pi}{2} - x,\quad x \in (0;\ \pi/2)$.

6) $\operatorname{tg} x < \frac{2}{\pi - 2x},\quad x \in (0;\ \pi/2)$.

7) $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2},\quad x \in \mathbb{R}$.

8) $\operatorname{sen} x \geqslant x - \frac{x^3}{2},\quad x \in (0;\ +\infty)$.

9) $\operatorname{arcsen} x > x,\ x \in (0;\ 1)$.
10) $|\operatorname{arctg} x| \leqslant |x|,\ x \in \mathbb{R}$.

7.98. Demuestren que las siguientes funciones son acotadas:

1) $y = \frac{\cos x}{1{,}5 - \operatorname{sen} x}$. 2) $y = \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

3) $y = \operatorname{ctg} x \operatorname{sen} 2x$. 4) $y = \cos 2x \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

5) $y = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$.

7.98a. Demuestren que las siguentes funciones no son acotadas:
1) $y = x \operatorname{sen} x$. 2) $y = 1/\cos x$.

3) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{0{,}5 + \operatorname{sen} x}$. 4) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

7.99. Hallen sup f, inf f, así como máx f y mín f si ellos existen:

1) $y = 4 \operatorname{sen}^2 x - 12 \operatorname{sen} x + 5$. 2) $y = \sqrt{\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x}$.

3) $y = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$. 4) $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

5) $y = \cos x \operatorname{tg} x$. 6) $y = \operatorname{arctg}\ (1/x)$.
7) $y = \operatorname{arcctg} |x|$.

7.100. Investiguen la monotonía de la función:
1) $y = 1/\cos x,\ x \in [-\pi;\ \pi],\ |x| \neq \pi/2$.
2) $y = \operatorname{sen}\ (1/x),\ x \geqslant 2/(3\pi)$. 3) $y = \operatorname{arctg}\ (1/x)$.

4) $y = \arccos |x|$. 5) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

6) $y = \cos \frac{x^2}{1 + x^2}$. 7) $y = \operatorname{arctg} x - x$.

Construir el gráfico de las funciones (7.101—7.103):

7.101. 1) $y = \cos 3x$. 2) $y = 2 \operatorname{sen} (2x - 3)$.

3) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$. 4) $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x$.

5) $y = |\operatorname{sen} x|$. 6) $y = \operatorname{sen} |x|$. 7) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

8) $y = \cos x$ e $y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$. 9) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

7.102. 1) $y = \sec x$. 2) $y = \operatorname{sen} (\cos x)$. 3) $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$.
4) $y = 2^{\cos x}$. 5) $y = \log_2 \operatorname{sen} x$.

7.103. 1) $y = \operatorname{arcsen} (1 - x)$. 2) $y = \operatorname{arctg} |x|$.
3) $y = \operatorname{arcctg} (1/x)$. 4) $y = \cos \arccos x$.
5) $y = \arccos \cos x$. 6) $y = x - \operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} x)$.

7.104. La función prefijada mediante una fórmula con $x > 0$ ha de continuarse (prefijándola con una fórmula) para los valores de $x \leqslant 0$: a) en forma par; b) en forma impar; construyan el gráfico de la función obtenida:

1) $y = 1 + \operatorname{sen} x$. 2) $y = \operatorname{ctg} x$. 3) $= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$.

4) $y = \arccos 2x$. 5) $y = \operatorname{arctg} (x - 1)$.

7.105. Expresen con funciones elementales las funciones inversas a las dadas y construyan sus gráficos:
1) $y = \operatorname{sen} x$, $x \in [-3\pi/2; -\pi/2]$.
2) $y = \cos x$, $x \in [-\pi; 0]$.
3) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (\pi/2; 3\pi/2)$.
4) $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (-\pi; 0)$.
5) $y = 2 \operatorname{sen} 3x$, $x \in [\pi/6; \pi/2]$.
6) $y = 2 \operatorname{arcsen} (x/2)$, $|x| \leqslant 2$.
7) $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1; 0]$.
8) $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0; 1]$.
9) $y = \operatorname{arctg} (1/x)$, $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

7.106. Demuestren que el gráfico de la función

$$y = \arccos (2 \operatorname{sen}^2 (x/2)), \quad x \in [0; \pi],$$

es simétrico respecto de la recta $y = x$.

---

11. Procedimiento implícito para prefijar las funciones. Se dice que una función está definida implícitamente con la ecuación $F(x, y) = 0$ (*función implícita*) si cada valor de su argumento x y el valor de la función y, correspondiente a él, son la solución de la mencionada ecuación $F(x, y) = 0$.

Lleva el nombre de gráfico de la ecuación $F(x, y) = 0$ en el sistema cartesiano de coordenadas xOy el conjunto de todos los puntos del plano, cuyas coordenadas (x, y) satisfacen dicha ecuación.

El gráfico de toda función definida implícitamente con la ecuación $F(x, y) = 0$ está contenido en el gráfico de ésta.

Mediante la ecuación $F(x, y) = 0$ es posible prefijar no una, sino todo un conjunto de funciones.

En ocasiones, se consigue pasar del procedimiento implícito de definición al explícito, es decir, dar la función con la fórmula $y = f(x)$. P. ej., la función con valores negativos, prefijada por medio de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, puede darse explícitamente en la forma $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1; 1]$. El gráfico de la ecuación dada es una circunferencia unitaria, mientras que el de la función que analizamos, la semicircunferencia superior (fig. 47). Esa misma ecuación prefija otras funciones. Los gráficos de dos de ellas se ofrecen en las figs. 48, 49 con línea continua.

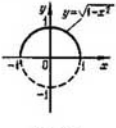


Fig. 47

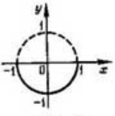


Fig. 48

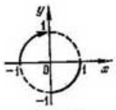


Fig. 49

7.107. Demuestren que con la siguiente ecuación se prefija una función y construyan su gráfico:

1) $\frac{xy-1}{y-x}=0.$ 2) $\frac{y-2x^2}{y-8}=0.$

3) $\frac{x^2+y^2-6}{\sqrt{y+x}}=0.$ 4) $\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}=0.$

5) $\frac{x^4-y^2}{\log^2 x+y^2}=0.$

7.108 Representen los gráficos de las ecuaciones:

1) $|x| + |y| = 1.$ 2) $|x| - |y| = 2.$ 3) $x^4 - y^4 = 0.$

4) $x^2 - y^4 = 0.$ 5) $x^2 + y^2 - 4y = 0.$

6) $y^2 + 2\cos 2x = 2.$ 7) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (elipse). 8) $x^2 - y^2 = x^4.$

7.109. Demuestren que el gráfico de la siguiente ecuación es la unión de los gráficos de varias funciones $y = f(x)$ o bien $x = g(y)$; construyan los gráficos de esas funciones:

1) $|y| + |x - 2| = x.$ 2) $|x + y| + |x - y| = 1.$

3) $|y| = \log_{0.5} x.$ 4) $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4.$

7.110. Construyan el gráfico de la ecuación y muestren que él no puede ser obtenido mediante la unión de un número finito de gráficos de las funciones:

1) $|x| - x = |y| - y.$ 2) $|y| = |y - \operatorname{sen} x|.$

---

12. Funciones prefijadas paramétricamente. Sea que en el conjunto T son dadas dos funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$. El conjunto de todos los puntos del plano de coordenadas con coordenadas $(\varphi(t); \psi(t))$, $t \in T$, recibe el nombre de *curva prefijada paramétricamente*.

P. ej., el par de funciones $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $t \in [0; 2\pi]$ prefija paramétricamente una circunferencia unitaria.

Ejemplo 18. Construyan la curva

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

△ Con $t \geqslant 0$ la función $x = t^2$ es invertible y la función inversa a ella es $t = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$. Por ello, con $t \geqslant 0$ tenemos $y = (\sqrt{x})^3 = x^{3/2}$, es decir, la curva coincide con el gráfico de la función $y = x^{3/2}$, $x \geqslant 0$ (fig. 50). Con $t \leqslant 0$, por analogía, tenemos $t = -\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ e $y = (-\sqrt{x})^3 = -(x)^{3/2}$, o sea, con $t \leqslant 0$ la curva coincide con el gráfico de la función $y = -(x)^{3/2}$, $x \geqslant 0$ (fig. 50).

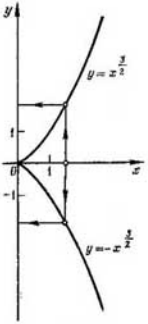


Fig. 50

Señalemos que la curva dada coincide con el gráfico de la ecuación $x^3 = y^2$, así como con el de la función $x = y^{2/3}$. ▲

Sean X e Y los conjuntos de los valores de las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, respectivamente, definidas sobre T. Para cada $t \in T$ al valor de $x = \varphi(t)$ contraponemos el valor de $y = \psi(t)$. Con ello, puede suceder que al valor $x \in X$ se ha contrapuesto más de un valor de $y \in Y$ (véase, p. ej., la fig. 50). Sea dada una regla de acuerdo con la cual, del conjunto de los valores de y, contrapuestos del modo indicado más arriba al valor de x, sólo se elige un valor. Las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, $t \in T$, junto con la mencionada regla, definen la función $y = f(x)$, $x \in X$, de la que se dice que *está prefijada paramétricamente*.

P. ej., las funciones $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in \mathbb{R}$, junto con la condición $y \geqslant 0$, prefijan paramétricamente la función $y = f(x)$, $x \geqslant 0$, la que en el caso dado puede asimismo prefijarse explícitamente en la forma $y = x^{3/2}$, $x \geqslant 0$.

7.111. ¿Cuáles de los puntos A y B pertenecen a la curva:
1) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; $A(0; 0)$, $B(3; 3)$.

2) $x = \operatorname{sen} t + 1$, $y = \cos t - 1$; $A(0; -1)$, $B(1,6; -0,2)$.

3) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$; $A(3/2; \sqrt{3})$, $B(1; 2)$.

4) $x = 2^t \operatorname{sen} t$, $y = 2^t \cos t$; $A(2; 2)$, $B(0; 2^\pi)$?

7.112. Eliminando el parámetro t, obtengan la ecuación cuyo gráfico coincide con la curva; construyan dicho gráfico:

1) $x = t - 1$, $y = t^2 - 2t + 2$.

2) $x = 2 - 3\cos t$, $y = 1 + 3 \operatorname{sen} t$.

3) $x = 2\cos t$, $y = 3 \operatorname{sen} t$. 4) $x = |\ln t|$, $y = 1 + t^3$.

5) $x = (t+1)^2$, $y = (t-1)^2$.

7.113. Construyan según los puntos las curvas:

1) $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$ (*cicloide*).

2) $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$ (*astroide*).

---

13. Gráficos de las funciones en coordenadas polares. Fijemos en el plano el rayo l con origen en O (fig. 51). Contrapongamos al par de números $(\varphi; r)$, donde $r > 0$, tal punto M del plano que

a) $|OM| = r$;

b) el ángulo de giro del rayo l hasta el rayo OM es igual a φ, con la particularidad de que si $\varphi > 0$ el giro transcurre en sentido antihorario y si $\varphi < 0$, en horario.

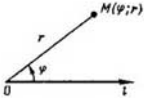


Fig. 51

A todos los pares $(\varphi, 0)$ les contraponemos el punto O.

Así, pues, a cada par de números (φ, r), $r \geqslant 0$ contraponemos un punto en el plano. Cada punto del plano, distinto de O, resultará contrapuesto a un conjunto de pares $(\varphi + 2\pi n; r)$, donde $n \in \mathbb{Z}$, $r > 0$. Estos pares de números llevan el nombre de *coordenadas polares del punto*.

Sea dada la función $r = f(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$, con ello $f(\varphi) \geqslant 0$. El gráfico de esta función en coordenadas polares recibe el nombre de conjunto de todos los puntos del plano con coordenadas polares $(\varphi, f(\varphi))$.

Si el rayo l coincide con el rayo positivo del eje Ox del sistema cartesiano de coordenadas xOy (fig. 52), las coordenadas $(x; y)$ y (φ, r) del punto están ligadas con las fórmulas

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi. \tag{30}$$

Ejemplo 19. Construyamos el gráfico de la función $r = \varphi$, $\varphi \in [0; +\infty)$ en coordenadas polares.

△ Con el crecimiento de φ también crecen los valores de r, es decir, la distancia de los puntos del gráfico hasta el centro O. Habien-

do calculado y marcado en el plano varios puntos dibujamos el gráfico. Señalemos que cada rayo que forma con el rayo l el ángulo α ($0 \leqslant \alpha < 2\pi$) corta el gráfico en un conjunto infinito de puntos de la forma $(\alpha + 2\pi n;\ \alpha + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ (fig. 53).

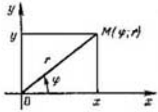


Fig. 52

El gráfico de la función dada lleva el nombre de *espiral de Arquímedes*. ▲

En ocasiones, al construir los gráficos de las funciones en coordenadas polares, es cómodo pasar a las coordenadas cartesianas. A su vez, para ciertas funciones sus gráficos en coordenadas cartesianas son más fáciles de construir al pasar a las coordenadas polares.

Ejemplo 20. Construyan en coordenadas polares el gráfico de la función prefijada con la fórmula

$$r = \frac{1}{\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi}. \tag{31}$$

△ El campo de definición de esta función son todos los valores de φ para los que

$$\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi > 0. \tag{32}$$

La función es periódica con período 2π, por lo que es suficiente considerar sólo los valores de φ del intervalo $(-3\pi/2;\ \pi/2)$ que

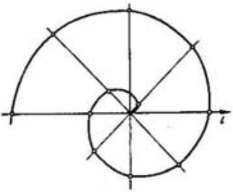


Fig. 53

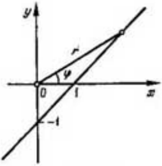


Fig. 54

satisfacen la desigualdad (32), es decir, $\varphi \in (-3\pi/4;\ \pi/4)$. Para semejantes φ tenemos $r\cos\varphi - r\operatorname{sen}\varphi = 1$ o bien, pasando a las coordenadas cartesianas, de acuerdo con (30), $x - y = 1$, o sea, $y = x - 1$. El gráfico de la función $y = x - 1$ es una recta (fig. 54). Como fue demostrado, cada punto del gráfico de la función (31) perte-

nece a dicha recta. Es fácil mostrar que lo contrario también es cierto: cada punto de la recta $y = x - 1$ pertenece al gráfico de la función (31). Esto significa que el gráfico de (31) es la recta $y = x - 1$. ▲

7.114. Escriban la ecuación y construyan su gráfico en coordenadas polares: 1) $x + y + 1 = 0$. 2) $x^2 + y^2 = 2x$. 3) $2xy = x^2 - y^2$. 4) $x = y^2 - \frac{1}{4}$.

7.115. Construyan el gráfico de la función en coordenadas polares: 1) $r = 1/\varphi$ (*espiral hiperbólica*). 2) $r = e^{\varphi}$ (*espiral logarítmica*). 3) $r = 8 \operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $r = \left(\frac{1}{1 - \operatorname{sen} \varphi}\right)$.

7.116. Construyan el gráfico de la ecuación pasando a las coordenadas polares:

1) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ (*lemniscata de Bernoulli*).
2) $y^2(1 - x) = x^3$ (*cisoide*).

Hallen el campo de definición de las funciones (**7.117—7.120**):

7.117. 1) $y = \sqrt{\frac{x}{6-x}}$. 2) $y = \sqrt{3 - 5x - 2x^2}$.

3) $y = \sqrt[3]{\frac{x}{1 - |x|}}$. 4) $y = \sqrt{x^2 - |x| - 2}$.

5) $y = \sqrt[4]{3 + x} + \sqrt[4]{3 - x}$. 6) $y = (8 - 2x - x^2)^{-3/2}$.

7.118. 1) $y = \log(x^2 + 1)$. 2) $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{\log \cos x}}$.

3) $y = \log \frac{3x - x^2}{x - 1}$. 4) $y = \sqrt{\log_3 \frac{2x - 3}{x - 1}}$.

5) $y = \frac{\sqrt{x+5}}{\log(9 - 5x)}$. 6) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\log_2(x^2 + 2x - 3)}$.

7) $y = \log_{x+1}(x^2 - 3x + 2)$.

8) $y = \log_x \log_{0,5}\left(\frac{4}{3} - 2^{x-1}\right)$.

9) $y = \log(1{,}25^{1-x^2} - 0{,}4096^{1+x})$.

10) $y = \ln(1 - \log(x^2 - 5x + 16))$.

7.119. 1) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$. 2) $y = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}}$.

3) $y = \log(16 - x^2) + \operatorname{ctg} x$.

7.120. 1) $y = \arccos(0{,}5x - 1)$.

2) $y = \arccos x - \operatorname{arcsen}(3 - x)$.

3) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 - 9}$. 4) $y = \operatorname{arcsen} \frac{x^2 - 1}{x}$.

5) $y = \sqrt{\operatorname{arcsen} x - \arccos x}$.

6) $y = \operatorname{arcsen}(2 \cos x)$. 7) $y = \operatorname{tg}(2 \arccos x)$.

8) $y = \log(1 - 2 \operatorname{arcctg} x)$.

9) $y=\frac{\arcsen(0,5x-1)}{\sqrt{x^2-3x+1}}$. 10) $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\arcsen(2-x)}$.

11) $y=\frac{\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$. 12) $y=\frac{\log_{2x}3}{\arccos(2x-1)}$.

Hallen el conjunto de los valores de las funciones (**7.121**—**7.122**):

7.121. 1) $y=\frac{2x}{x^2+9}$. 2) $y=\frac{3-x^2}{3+x^2}$.

3) $y=\sqrt{x^2+2x+2}$. 4) $y=\sqrt{8-2x-x^2}$.

5) $y=\sqrt{2x-1-x^2}$. 6) $y=2^{x^2+4x-5}$.

7) $y=\log_3(5+4x-x^2)$. 8) $y=\log_{x^2}x$.

9) $y=\sqrt{2\log_2 x-\log_2^2 x}$.

7.122. 1) $y=\operatorname{sen} x-5\cos x$.

2) $y=1-2\,|\operatorname{sen} 2x\,|$. 3) $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$.

4) $y=\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$.

5) $y=\sqrt{\log\operatorname{sen} x}$. 6) $y=\cos^2 x-\operatorname{sen} x$.

7) $y=\log_2(\cos x+\operatorname{sen}^2 x)$.

8) $y=\cos\left(\frac{1}{2}\arcsen x\right)$. 9) $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{sen} x)$.

7.123. Demuestren que para toda $x\in\mathbb{R}$.

a) $E(x+1)=E(x)+1$;

b) $E(x+n)=E(x)+n$, $n\in\mathbb{Z}$.

2) Hallen el conjunto de los valores de la función $x-E(x-2)$.

7.124. Sean $f(x)=x+6$, $g(x)=6/(x+1)$. Hallen todos los valores de x para los que:

1) $|f(x)+g(x)|=f(x)+g(x)$.

2) $|f(x)+g(x)|=f(x)-g(x)$.

3) $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$.

4) $|f(x)+g(x)|=|f(x)|-|g(x)|$.

7.125. Haciendo uso de operaciones aritméticas y de las composiciones de funciones, expresen la función dada mediante las funciones elementales fundamentales:

1) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$. 2) $y=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$.

3) $y=\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$. 4) $y=\ln^2(1+e^x)$.

5) $y=\cos\log x^2$. 6) $y=\sqrt{\operatorname{sen}(\operatorname{arcctg} x^3)}$.

7.126. Para la función $f(x)=(x^3-1)/x^2$: a) hallen todos los valores de a para los que la ecuación $f(x)=f(a)$ tiene una sola solu-

ción; b) hallen el valor máximo de b tal que para cualquier $a \in (-\infty; b)$ la ecuación $f(x) = f(a)$ tenga en el intervalo $(-\infty; b)$ una sola solución.

7.127. ¿Con qué valores de a el campo de definición de la función f contiene el campo de definición de la función g si:

1) $f(x)=\sqrt{\frac{2a+x}{a-x}}$; $g(x)=\frac{1}{x^2+2x+4a-2}$.

2) $f(x)=\log(x^2+a)$; $g(x)=\frac{x^2+x-a}{x}$.

3) $f(x)=\operatorname{arcsen}(2^x-a)$; $g(x)=\log_2\left(2a+\frac{1}{2}-a\cdot 2^x\right)$?

7.128. En el trapecio isósceles $ABCD$ con bases $AD = 2$, $BC = 1$ y altura $h = 1$ se ha trazado una recta perpendicular a la base AD que la corta en el punto M. Hallen la dependencia entre el área S de la parte cortada con el vértice A y la distancia $x = AM$.

7.129. A una esfera de radio r se circunscribe un cono. Hallen la dependencia entre el volumen V de dicho cono y su altura; indiquen el campo de definición de la función obtenida.

7.130. Se consideran las secciones del tetraedro regular $ABCD$ paralelas a la arista AB y a la altura DO del tetraedro. Hallen la dependencia entre el área S de la sección y la distancia x entre el plano de la sección y la arista AB si la altura de la cara del tetraedro es igual a b. Hallen el valor máximo de S.

7.131. El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo isósceles es igual a R. Hallen la dependencia entre el radio de la circunferencia inscrita y el ángulo α en el vértice del triángulo. Hallen el valor máximo de dicho radio.

7.132. En un hilo infinito con origen en O, uniformemente, a una distancia l entre ellas, están enhiladas cuentas de vidrio, la primera de las cuales se encuentra en el punto O. El hilo es homogéneo de densidad lineal ρ, y la masa de cada cuenta es igual a m. Hallen la dependencia entre la masa del sector OM del hilo y la longitud $x = OM$.

7.133. Dos rayos, entre los que el ángulo es igual a 60°, tienen origen común. Desde éste, por uno de los rayos salió una partícula a una velocidad v y, pasada una hora, por el otro rayo, la segunda partícula a velocidad $3v$. Hallen la dependencia entre la distancia entre las partículas y el tiempo de movimiento de la primera. ¿A qué distancia mínima se aproximarán las partículas después de la salida de la segunda de ellas?

7.134. La función $f(a)$ está definida para todo $a \in \mathbb{R}$, con los que la ecuación

$$(a^2-4a+9)\,|x-1| = (9-a^2)\,|x|$$

tiene solución. El valor de $f(a)$ es igual a la raíz máxima de la mencionada ecuación con la a dada (si la raíz es una sola, $f(a)$ es igual

a dicha raíz). Hallen: 1) el campo de definición de la función $f(a)$; 2) mín $f(x)$.

7.135. El campo de definición de la función contiene m elementos, mientras que el campo de valores, n elementos. Demuestren que: 1) $n \leqslant m$; 2) para que la función sea biunívoca es necesario y suficiente que $n = m$.

7.136. Hallen el número de todas

1) las funciones definidas sobre el conjunto D de m elementos con valores del conjunto E de n elementos;

2) las funciones biunívocas, cuyo campo de definición y el conjunto de valores contienen n elementos cada uno.

7.137. El campo de definición de la función f es un conjunto numerable.

1) Demuestren que si la función f es biunívoca, el conjunto de sus valores también es numerable.

2) Aduzcan un ejemplo de una función f no biunívoca, cuyo conjunto de valores también es numerable.

7.138. ¿Cuáles de las funciones dadas son invertibles:

1) $y = 2 + x - x^2$, $x \in [0,5; +\infty)$.
2) $y = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$.
3) $y = x^4 - 2x^2 - 8$, $x \in [0; 2]$.
4) $y = -x\,|x| - 2x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.
5) $y = 1 - \operatorname{sen} x$, $x \in [0; \pi]$.
6) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \pi)$, $x \neq \pi/2$.
7) $y = 9^x - 3^x$, $x \in \mathbb{R}$.
8) $y = \arccos(|x| - 1)$, $x \in [-1; 2]$.
9) $y = \operatorname{arcctg}(x\,|x|)$, $x \in \mathbb{R}$?

7.139. Demuestren que las funciones f y g son recíprocamente inversas:

1) $f(x) = \frac{1}{x-2}$; $g(x) = \frac{2x+1}{x}$.

2) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in (-\infty; 0]$; $g(x) = -\sqrt{x-1}$, $x \in [1; +\infty)$.

3) $f(x) = -e^{(1-x^2)/2}$, $x \in [0; +\infty)$;
$g(x) = \sqrt{1 - 2\ln(-x)}$, $x \in [-\sqrt{e}; 0)$.

4) $f(x) = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in (0; +\infty)$; $g(x) = f(x)$.

5) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [\pi/2; 3\pi/2]$;
$g(x) = \pi - \arcsen x$, $x \in [-1; 1]$.

6) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in [-\pi; 0]$, $x \neq -\pi/2$;

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x - \pi, & x \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg} x, & x < 0. \end{cases}$$

Expresen las funciones inversas a las dadas mediante elementales y construyan sus gráficos (**7.140—7.142**):

7.140. 1) $y=\sqrt[4]{x^3}$, $x\in[0;+\infty)$.
2) $y=\frac{1}{x^2-1}$, $x\in(-\infty;0]$, $x\neq-1$.
3) $y=x\,|x|+2x$, $x\in\mathbb{R}$.
4) $y=\frac{x^2+3x}{x^2-5x}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq0$, $x\neq5$.
5) $y=\frac{x^2+1}{2x}$, $x\in[1;+\infty)$.
6) $y=\frac{x^2+1}{2x}$, $x\in(0;1]$.
7) $y=x-\sqrt{x^2-1}$, $x\in(-\infty;-1]$.
8) $y=\sqrt{x^2-1}+x$, $x\in(-\infty;-1]$.
7.141. 1) $y=2^{x^2-2x}$, $x\in(-\infty;1]$.
2) $y=1-e^{(1-x)/(1+x)}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq-1$.
3) $y=\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
4) $y=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}+1$, $x\in\mathbb{R}$.
5) $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$, $a>0$, $a\neq1$.
7.142. 1) $y=\operatorname{sen}x$, $x\in[5\pi/2;7\pi/2]$.
2) $y=2\cos(x/2)$, $x\in[2\pi;4\pi]$.
3) $y=\operatorname{ctg}x$, $x\in(-\pi/2;\pi/2)$, $x\neq0$.
4) $y=\operatorname{sen}^2(x/2)$, $x\in[2\pi;3\pi]$.
5) $y=1/\cos x$, $x\in[-\pi;0]$, $x\neq-\pi/2$.
6) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0;1]$.
7) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1;0]$.
8) $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq1$.

7.143. 1) Demuestren que la función $y=x^3+\frac{5}{9}x$ es invertible. Construyan en un mismo sistema de coordenadas los gráficos de la función dada y de la inversa. Hallen los puntos de intersección.

2) Demuestren que si n es un número natural impar, $p>0$, $q\in\mathbb{R}$, la función $y=x^n+px+q$ es invertible.

7.144. Demuestren que la función

$$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}$$

tiene su inversa y hállenla.

7.145. Sea $y=\operatorname{arch}x$, $x\geqslant1$ una función inversa a $y=\operatorname{ch}x$, $x\geqslant0$. Demuestren que la función

$$y=\begin{cases}2\operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arch}x\right), & x\geqslant1,\\ 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos x\right), & -1\leqslant x<1,\end{cases}$$

es inversa a la función $y=(x^3-3x)/2$, $x\geqslant1$.

7.146. Hallen la función inversa a la función

$$y = (x^3 + 3x)/2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.147. Hallen el intervalo máximo de la forma $[a, +\infty)$ sobre el que la función

$$y = 1 + 2 \operatorname{sen} \frac{x-1}{x+1}$$

es invertible y hallen en este intervalo la función inversa.

7.148. 1) Demuestren que la función $y = \frac{2x+3}{x-2}$ coincide con su inversa.

2) ¿Con qué condiciones sobre a, b, c, d la función $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ es inversa a sí misma?

7.149. Demuestren que el gráfico de la función $y = \log_a \frac{a^x + \alpha}{\beta a^x - 1}$, $\alpha\beta \neq 1$ es simétrico respecto de la recta $y = x$.

7.150. Sean a y b tales números que el campo de definición de la función $y = \ln(a + be^x)$ sea un conjunto no vacío. ¿Con qué valores de a y b esa función coincide con su inversa?

7.151. ¿Con qué valores de a la función

$$y = (a-1)\,|x-1| + (a+1)\,|x+1| + x$$

es invertible?

7.152. ¿Con qué valores de a, b y c la función

$$y = \operatorname{arctg}(a + b \operatorname{tg} x) + c, \quad x \in (\pi/2; 3\pi/2),$$

coincide con su inversa?

7.153. ¿Con qué valores de λ es invertible la función

$$y = (\operatorname{arcsen} x)^2 + \lambda \arccos x, \quad x \in [-1; 1]?$$

Prefijar la función inversa con una fórmula.

7.154. Demuestren que

1) $\cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$, $x \in [-1; 1]$.

2) $\operatorname{sen}(3 \operatorname{arcsen} x) = 3x - 4x^3$, $x \in [-1; 1]$.

3) $\operatorname{tg}(3 \operatorname{arctg} x) = \frac{x(3-x^2)}{1-3x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \neq 1/3$.

4) $3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$, $x \in [-1/2; 1/2]$.

5) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\,|\operatorname{arctg} x|$, $x \in \mathbb{R}$.

7.155. Hallen todos los valores de x para los que son ciertas las igualdades:

1) $\arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arcsen} x$.

2) $\arccos \sqrt{1-x^2} = -\operatorname{arcsen} x$.

3) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} (1/x)$. 4) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} (1/x) - \pi$.

5) $\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}$.

6) $\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x - \frac{3\pi}{4}$.

¿Cuáles de las funciones son pares, cuáles impares, cuáles no son ni pares ni impares (7.156—7.159):

7.156. 1) $y = 2x^2 - 1$. 2) $y = -5x^3$. 3) $y = 1 - x^3$.

4) $y = x^4 - \frac{1}{x}$. 5) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

6) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$. 7) $y = 6x^2 + 8 + (x-2)^3$.

8) $y = \left(1 - \frac{1+x^2}{1+x}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}\right)$?

7.157. 1) $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$. 2) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

3) $y = \operatorname{ch}(x + \operatorname{sh} x)$. 4) $y = \operatorname{th}(x + \operatorname{ch} x)$.

5) $y = \ln^2(\sqrt{x^2+1} + x)$.

6) $y = \cos x \operatorname{sh} x + \operatorname{sen} x \operatorname{ch} x$. 7) $y = \operatorname{arsh}(\operatorname{sh} x)$. 8) $y = \operatorname{th}(\operatorname{arth} x)$.

9) $y = \left|\frac{10^x + 1}{10^x - 1}\right|$?

7.158. 1) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 2) $y = \operatorname{sen} x + 2x^3$.

3) $y = \operatorname{tg} x - \cos x$. 4) $y = \frac{|\operatorname{sen} x|}{1 - \cos x}$.

5) $y = (x-1)^2 \operatorname{sen}^2 x$.

6) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

7) $y = \operatorname{sen} \operatorname{tg} x$. 8) $y = \operatorname{ctg} \cos x$?

7.159. 1) $y = \operatorname{arcsen} x^2$. 2) $y = 2 \arccos(-x)$.

3) $y = \arccos |x|$. 4) $y = \arccos x - \frac{\pi}{2}$.

5) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$. 6) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$.
7) $y = \operatorname{arcsen}(\arccos x)$. 8) $y = \operatorname{sen}(2x - \operatorname{arcctg} x)$?

7.160. Representen la función f en forma de la suma de funciones par e impar:

1) $f(x) = (x+1)^3$. 2) $f(x) = \frac{x-3}{x^4}$.

3) $f(x) = \operatorname{sen}(x+1)$. 4) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $|x| < 1$.

7.161. Demuestren que toda función definida sobre un conjunto simétrico al origen de coordenadas es representable en forma de la suma de funciones par e impar.

7.162. Representen la función en forma de la suma de funciones par e impar si:

1) $y = |x - 1|$. 2) $y = a^x$. 3) $y = \ln(1 + e^x)$.
4) $y = \operatorname{sen}(x^3 + x^2)$. 5) $y = \operatorname{tg}(x - 5)$. 6) $y = \arccos x$.
7) $y = -\operatorname{arcctg} x$. 8) $y = \operatorname{arctg}(1 - x)$.

7.163. La función f es ni par ni impar, la g, par, la h, impar. ¿Puede la suma:

1) $f + g$ ser: a) par, b) impar?
2) $f + h$ ser: a) par, b) impar?

7.164. La función f es ni par ni impar, la g, par, la h, impar y tiene sentido la composición de cualesquiera dos de estas funciones. Indiquen todas las composiciones que son: 1) funciones pares, 2) funciones impares.

7.165. 1) Demuestren que la función inversa a la impar es una función impar.

2) ¿Puede ser par una función inversa a la dada?

Demuestren que las funciones son acotadas (**7.166**—**7.168**):

7.166. 1) $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in [1; +\infty)$.
2) $y = \sqrt[3]{x^3 + 8} - x$. 3) $y = \sqrt[4]{x^4 + 2} - |x|$.
4) $y = \dfrac{|x^2 - 1|}{x^4 - 1}$. 5) $y = \dfrac{x - 4}{2 - \sqrt{x}}$, $x \in [0; 4)$.
6) $y = \dfrac{x + 1}{x + \sqrt[3]{x^4}}$, $x \in (-\infty; -1)$.
7) $y = \dfrac{x^{7/3} - x^2}{(x - 1)\sqrt[3]{2 + x^4}}$.

7.167. 1) $y = 2^{\operatorname{sen} x}$. 2) $y = 2^{1/x}$, $x \in (-\infty; 0)$.
3) $y = \dfrac{\operatorname{ch} x}{1 + 3^{|x|}}$. 4) $y = \dfrac{1}{x^2 + \ln^2 x}$.
5) $y = \log_x(1 + x)$, $x \in [2; +\infty)$.

7.168. 1) $y = \operatorname{tg} x \cos 3x$. 2) $y = \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x - 1}$.
3) $y = \dfrac{2\cos x}{\pi - 2x}$.
4) $y = \operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $x \neq 0$.

7.169. Demuestren que las siguientes funciones son no acotadas:

1) $y = x^3 - 3x$. 2) $y = x^3/(x^2 - 1)$, $x \in (-\infty; -2]$.
3) $y = \dfrac{3^x}{x}$, $x \in (-\infty; 0)$. 4) $y = \dfrac{2^x}{x}$, $x \in [1; +\infty)$.
5) $y = 2^{1/x}$, $x \in (0; +\infty)$.
6) $y = \log_x(1 + x)$, $x \in (1; 2]$.
7) $y = x \operatorname{sen} x$. 8) $y = (\cos x)/x$.
9) $y = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

7.170. Sean $P_m(x)$ y $Q_n(x)$ polinomios de los grados m y n, $m \leqslant n$ y $Q_n(x) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Demuestren que la función

$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

es acotada.

7.171. Demuestren que cualquier polinomio de un grado no menor que el primero es una función no acotada.

7.172. Aduzcan un ejemplo de función definida sobre un segmento y que en él es no acotada.

7.173. Aduzcan un ejemplo de función definida sobre un segmento y que es no acotada en el entorno de cada punto del mencionado segmento.

7.174. Investiguen la monotonía de la función y construyan su gráfico:

1) $y = \frac{x-1}{|x|+1}$. 2) $y = \frac{x+2}{|x|-3}$. 3) $y = \frac{1-|x-1|}{1+|x|}$.

4) $y = \frac{|x-1|-|x+1|}{|x-1|+|x+1|}$. 5) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$. 6) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.

Investiguen la monotonía de las funciones (7.175—7.176):

7.175. 1) $y = \sqrt{x^2-1}$. 2) $y = \sqrt{2x-x^2}$.

3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-5}-2}$. 4) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$.

5) $y = 1 - \sqrt[5]{x^3-1}$. 6) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-8}}$.

7) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$.

8) $y = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$. 9) $y = x - \sqrt{x^2-1}$.

7.176. 1) $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$, $x \in [0; \pi]$.

2) $y = \frac{2-\operatorname{sen} x}{2+\operatorname{sen} x}$, $x \in [0; 2\pi]$.

3) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, $x \neq \pi/2$.

4) $y = 0{,}3^{(x^2-1)/x}$. 5) $y = \log_2(8x - x^2)$.

6) $y = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$. 7) $y = 2 \cdot 3^{1-x} - 9^{-x}$.

8) $y = 2\log_2(1+x^2) - \log_2^2(1+x^2)$.

7.177. Demuestren que la función

$$y = x - \varepsilon \operatorname{sen} x, \quad \text{donde } 0 < \varepsilon \leqslant 1$$

estrictamente crece.

7.178. Demuestren que la función $y = x^3 + x^2$: 1) crece sobre $(0; +\infty)$; 2) no es monótona sobre $[-1; 0]$.

7.179. Demuestren que la función

$$y = \frac{\operatorname{sen}(x+\alpha)}{\operatorname{sen}(x+\beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

es monótona en cualquier intervalo contenido en su campo de definición.

7.180. La función $y = f(x)$ es monótona. Demuestren que: 1) la función $y = -f(x)$ es monótona; 2) si $f(x) > 0$ para toda $x \in D(f)$, la función $y = 1/f(x)$ es monótona.

7.181. Demuestren que la suma de las funciones crecientes (decrecientes) en el intervalo $(a; b)$ crece (decrece) en el intervalo $(a; b)$.

7.182. Demuestren que la composición de funciones monótonas es una función monótona.

7.183. 1) Demuestren que es creciente la función inversa a una función creciente.

2) Demuestren que es decreciente la función inversa a una función decreciente.

7.184. Haciendo uso de los símbolos $\exists$, $\forall$ enuncien y escriban la afirmación: 1) la función no es creciente; 2) la función no es decreciente; 3) la función no es monótona.

7.185. Aduzcan un ejemplo de dos funciones crecientes en el intervalo (a, b), cuyo producto es 1) una función creciente en $(a; b)$; 2) decreciente en $(a; b)$; 3) no monótona en $(a; b)$.

7.186. Aduzcan un ejemplo de función definida sobre $\mathbb{R}$ que no es monótona en ningún intervalo.

7.187. Recibe el nombre de creciente en el punto $x_0 \in (a; b)$ la función $f(x)$, $x \in (a; b)$, si existe tal $\delta > 0$ que $f(x) \leqslant f(x_0)$ para toda $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f(x) \geqslant f(x_0)$ para toda $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

¿Es monótonamente creciente en $(a; b)$ la función que es creciente en cada punto del intervalo $(a; b)$?

7.188. Sea x_0 la raíz de la ecuación

$$a^x + b^x = c$$

y sea bien $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$, o bien $a > 1$ y $b > 1$. Demuestren que la ecuación aducida no tiene otras raíces.

7.189. Sean f, g y $f - g$ funciones crecientes y $f(x_0) = g(x_0)$. Demuestren que el sistema

$$\begin{cases} f(x) = g(y), \\ f(y) = g(z), \\ f(z) = g(x) \end{cases}$$

tiene una sola solución.

7.190. Sea que las funciones f y g están definidas sobre el conjunto X.

1) Sea $f(x) \geqslant g(x)$ para toda $x \in X$. Demuestren que

$$\sup_X f \geqslant \sup_X g, \quad \inf_X f \geqslant \inf_X g.$$

2) Sea $\sup\limits_X f = +\infty$, $\inf\limits_X g \neq -\infty$. Demuestren que

$$\sup_X (f+g) = +\infty.$$

3) Sea $\inf\limits_X f = -\infty$, $\sup\limits_X g \neq +\infty$. Demuestren que

$$\inf_X (f+g) = -\infty.$$

7.191. Sea impar la función f. Demuestren que

$$\inf_{x<0} f = -\sup_{x>0} f, \quad \sup_{x<0} f = -\inf_{x>0} f.$$

7.192. Empleando los símbolos $\exists$, $\forall$ enuncien y escriban la afirmación: 1) el número a no es la cota superior de la función; 2) el número a no es la cota inferior de la función.

7.193. Hallen $\min\limits_X f$ si:

1) $f(x) = x + \frac{3}{x}$, $X = (0;\ +\infty)$.

2) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $X = (1;\ +\infty)$.

3) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg}^2 x + 1$, $X = \left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

4) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$, $X = (0;\ \pi/2)$.

7.194. Hallen:

1) $\min (x - 2\sqrt{x})$. 2) $\max\limits_{(0;\ \pi/2)} (3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)$.

7.195. Hallen $\max\limits_X f$ si:

1) $f(x) = 9x^5 + \frac{1}{x^5}$, $X = (-\infty;\ 0)$.

2) $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $X = (0;\ +\infty)$.

3) $f(x) = x\sqrt[4]{1-x^4}$, $X = [-1;\ 1]$.

4) $f(x) = \log_x (x+1) + \log_{x+1} x$, $X = (0;\ 1)$.

7.196. Hallen $\max f$, $\min f$ si:

1) $f(x) = e^{-|x|} - e^{-2|x|}$. 2) $f(x) = \cos^2 x + \cos x + 3$.

3) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 3$.

4) $f(x) = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$.

5) $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x$. 6) $f(x) = \cos(1 + \operatorname{sen} x)$.

7) $f(x) = \operatorname{sen}(2\cos x - 1)$. 8) $f(x) = x^2/(x^4+1)$.

9) $f(x) = (x+1)/(x^2+3)$.

7.197. Dos cuerpos se mueven por rectas en el sentido hacia su punto de intersección A. Las velocidades de los cuerpos son constantes e iguales a v_1 y v_2, en el momento inicial los cuerpos se hallan a

las distancias a y b del punto A, respectivamente. El ángulo entre las direcciones de movimiento de los cuerpos es igual a α. Hallen la distancia mínima entre ellos.

7.198. En un triángulo está inscrito un rectángulo de forma que uno de sus lados yace en uno de los lados del triángulo y dos vértices, en otros dos. Hallen el área máxima posible del rectángulo si la del triángulo es igual a S.

7.199. En la sección axial de un cono el ángulo es igual a 2α, el radio de la base, a R. Hallen el valor máximo del área de la sección trazada por el vértice del cono si 1) $2\alpha < \pi/2$; 2) $2\alpha > \pi/2$.

7.200. Hallen la distancia desde la parábola $y = x^2/4$ hasta la recta $y = -x - 2$.

7.201. Hallen el $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$ si:

1) $f(x) = \log_{1/2}(x^2 + x - 2)$, $X = [3; 6]$.
2) $f(x) = \log_9(8x - x^2 - 7)$, $X = [2; 5]$.
3) $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen} x$, $X = [\pi/3; \pi]$.
4) $f(x) = (x^2 + 4)/x$, $X = [1; 3]$.
5) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x+4}$, $X = [-14; -7]$.
6) $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2-4}$, $X = [-1{,}5; 1{,}5]$.

7.202. Empleando los símbolos $\exists$, $\forall$ enuncien y escriban la afirmación: 1) el valor de $f(x_0)$, $x_0 \in X$ no es el máximo; 2) el valor de $f(x_0)$, $x_0 \in X$ no es el valor mínimo de la función sobre el conjunto X.

7.203. Hallen el $\min\,(x - \sqrt{x+3})$.

7.204. Hallen el $\max f$, $\min f$ si:

1) $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$. 2) $f(x) = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-2}$.

7.205. Hallen el radio de la base y la altura del cilindro inscrito en una esfera de radio R, si el área de la superficie lateral del cilindro tiene el valor máximo de los posibles.

7.206. Hallen el radio de la base y la altura de un cono circunscrito a una esfera si el volumen del cono tiene el valor mínimo de los posibles y el radio de la esfera es igual a R.

7.207. Todas las aristas del prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ tienen una longitud a. Los extremos del segmento paralelo al plano ABB_1A_1 yacen en las diagonales BC_1 y CA_1 de las caras laterales. Hallen la longitud mínima de dicho segmento.

7.208. La longitud de la arista del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es igual a a. E y F son los puntos medios de las aristas BB_1 y CC_1, respectivamente. Los vértices de un triángulo son los puntos de intersección de un plano paralelo a la base del cubo con las rectas AC_1, CE, DF. Hallen el valor mínimo del área de semejante triángulo.

7.209. Hallen el valor mínimo de la suma $x^2 + y^2$ si $x + 2y = 1$.

7.210. Hallen el valor máximo del producto xy si:
1) $x + 2y = 1$. 2) $x^2 + 3y^2 = 1$.
7.211. Hallen el mín f si:
1) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.
2) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$.
3) $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, donde $b - a = d - c$.

4) $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$. 5) $f(x) = \left(\frac{2 + \cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2$.

7.212. Hallen

$$\min_{[0;\,1]} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.213. Demuestren:
1) Los gráficos de las funciones $y = f(x)$ e $y = f(-x)$ son simétricos respecto al eje de ordenadas.
2) Los gráficos de las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(x)$ son simétricos respecto al eje de abscisas.
3) Los gráficos de las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(-x)$ son simétricos con relación al origen de coordenadas.
4) Los gráficos de las funciones $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ son simétricos con relación a la recta $y = x$.
7.214. El gráfico de la función g es simétrico al de la f con relación a la recta $x = x_0$. Expresen los valores de la función g por medio de los valores de la función f.
7.215. El gráfico de la función g es simétrico al de la función f con relación a la recta $y = y_0$. Expresen los valores de la función g mediante los de la función f.
7.216. El gráfico de la función g es simétrico al de la función f respecto al punto $(x_0;\, y_0)$. Expresen los valores de la función g mediante los de la función f.
7.217. Según el gráfico conocido de la función $y = x^2$ construyan el gráfico de la función e indiquen los conjuntos sobre los que ella es monótona:
1) $y = 2x^2 - 8x + 4$. 2) $y = 3x - 4 - 2x^2$.
3) $y = x^2 - 3\,|x| - 7$. 4) $y = |5 - 4\,|x| - x^2|$.
7.218. Construyan el gráfico de la función (7.218—7.225):
1) $y = |x-1| + |x-2| - |x-3|$.
2) $y = |x-2| + |x| + |x+2| - 3$.
3) $y = |x - 2\,|x-1||$. 4) $y = |2x - |x| - 1|$.
5) $y = \frac{1}{2a}(|x+a| - |x-a|)$, $a > 0$.
6) $y = \operatorname{sign} x - \frac{1}{2a}(|x+a| - |x-a|)$, $a > 0$.

7) $y=\left|\frac{3+2|x|}{3-2|x|}\right|$. 8) $y=\frac{|x+2|+|x-1|}{|x-2|+|x+1|}$.

7.219. 1) $y=2(x+2)^3-3$. 2) $y=1{,}2+\frac{1}{4}(1-x)^3$.

3) $y=x^3+x$. 4) $y=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}x-x^3$.

5) $y=0{,}1(1-x)^4-1$. 6) $y=2-\frac{1}{8}(x+2)^4$.

7.220. 1) $y=\sqrt{1-2x}-2$. 2) $y=3-0{,}5\sqrt{3x-2}$.

3) $y=2\sqrt[3]{3x-6}+1$. 4) $y=2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{3}x}$.

5) $y=(2x+1)^{1/4}$. 6) $y=3-\frac{1}{2}(8x-1)^{2/3}$.

7) $y=3-\frac{1}{2}x^{5/2}$. 8) $y=(x-1)^{7/2}-1$.

7.221. 1) $y=\sqrt{|3-x|}$. 2) $y=\sqrt{9-4|x|}$.

3) $y=\sqrt{8-|x-1|}$. 4) $y=\sqrt{|x+1|^3}-1$.

7.222. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$. 2) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x+8}}$.

3) $y=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$. 4) $y=\frac{2}{2\sqrt{x}+1}$. 5) $y=\frac{3}{4-2\sqrt[3]{x+1}}$.

7.223. 1) $y=\frac{x^2+4}{x}$. 2) $y=\frac{x^2-4}{2x}$.

3) $y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$. 4) $y=\frac{2x}{4-x^2}$. 5) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.

6) $y=\frac{1}{x^2+2x+3}$. 7) $y=\frac{1}{x^2-9}$. 8) $y=\frac{1}{x^2-2x-8}$.

7.224. 1) $y=\frac{x}{x^2+1}$. 2) $y=\frac{x}{x^2-1}$ 3) $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$.

4) $y=\frac{2x^2-4x+6}{x^2-2x+2}$.

7.225. 1) $y=\sqrt{5+4x-x^2}$. 2) $y=(\sqrt{1-x^2}+1)\ \mathrm{sign}\, x$.

3) $y=2-\sqrt{8-2x-x^2}$. 4) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5) $y=\frac{\mathrm{sign}\,(x-1)}{\sqrt{3x-x^2}}$. 6) $y=x\sqrt{100-x^2}$.

7) $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

7.226. ¿Con qué relación entre a, b, c, d el gráfico de la función $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ se obtiene con el desplazamiento del gráfico de las funciones:

1) $y=\frac{1}{x}$. 2) $y=\frac{x-x_1}{x-x_2}$, $x_1\neq x_2$?

7.227. Hallen el centro de simetría del gráfico de la función:

1) $y=\frac{x}{2x-1}$. 2) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$.

3) $y=x^3-6x^2$. 4) $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$.

7.228. Demuestren que los gráficos de las funciones $y=x^3-3a^2x$ e $y=x^3-3ax^2$ se obtienen uno del otro por medio del desplazamiento.

7.229. Demuestren que la función $y=x^3-3a^2x$ crece en los intervalos $(-\infty; -a]$ y $[a; +\infty)$ y decrece en $[-a; a]$ $(a>0)$. Construyan el gráfico de la función con $a=2$.

7.230. Demuestren que la función $y=x^3-3bx^2$ $(b>0)$ crece en $(-\infty; 0]$ y $[2b; +\infty)$ y decrece en $[0; 2b]$. Construyan el gráfico de esta función con $b=1$.

Construyan el gráfico de la función (7.231—7.235):

7.231. 1) $y=x^3-3x^2+2x$. 2) $y=x^3+6x^2$.

7.232. 1) $y=E(|x|)$. 2) $y=E(x^2-1)$.

3) $y=E\left(\frac{1}{x}\right)$. 4) $y=(E(x))^2-2E(x)-1$.

5) $y=|x-E(x)-0{,}5|$. 6) $y=(x-E(x))^2$.

7) $y=\frac{1}{x}\cdot E(x)$. 8) $y=(-1)^{E(1/x)}$.

7.233. 1) $y=1-3^{0{,}5x-1}$. 2) $y=\frac{1}{3}2^{1-3x}+2$.

3) $y=\log_3(0{,}5x+2)$. 4) $y=-\frac{4}{3}\log_4(1-x)$.

5) $y=3^{2-|x+3|}$. 6) $y=|0{,}5^x-2|$.

7) $y=\log(3-x)^2$. 8) $y=\log_{0{,}5}|1-2x|+2$.

9) $y=|\log_2|x||$.

7.234. 1) $y=2^{|\log_3 x|}$. 2) $y=2^{1/x}$.

3) $y=3^{(1-x)/(1+x)}$. 4) $y=0{,}5^{x^2-x}$.

5) $y=\log_{1/3}(x^2-8x)+2$. 6) $y=\log\frac{1-2x}{x+3}$.

7) $y=e^{1/(x^2-1)}$. 8) $y=\frac{1+3^{-x}}{3+3^{x+1}}$.

9) $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

7.235. $y=E(2^x)$. 2) $y=2^{E(x)}$.
3) $y=2^{x-E(x)}$. 4) $y=E(\log_2 x)$. 5) $y=\log(x-E(x))$.

7.236. Demuestren que la función dada es periódica y hallen su período mínimo positivo:
1) $y=x-\alpha E(x/\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$.
2) $y=E(2x+5)-2x$.
3) $y=|\text{sen}(\sqrt{2}x+1)|$. 4) $y=\text{sen}\,2x+\text{sen}^2 3x$.
5) $y=\text{sen}\,4x+5\cos 6x$. 6) $y=3\,\text{sen}\,4x+2\,\text{tg}\,5x$.
7) $y=\text{sen}^4 x+\cos^4 x$. 8) $y=\text{tg}(x+\text{sen}\,x)$.
9) $y=\text{sen}(\cos x)$. 10) $y=\cos(\text{sen}\,x)$.
11) $y=\text{sen}^3 x+\cos^3 x$.

7.237. Demuestren que la función dada es no periódica:
1) $y=\text{sen}\sqrt{|x|}$.
2) $y=\cos x+\cos x\sqrt{2}+\ldots+\cos x\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.
3) $y=\text{sen}\,x+\text{sen}\sqrt{2}x$.

7.238. Demuestren que si la razón entre los períodos de las funciones f y g es un número racional, las funciones $f+g$ y fg son periódicas.

7.239. Hallen el período mínimo positivo de la función:
1) $y=8\,\text{sen}(9x/8)+2\cos(3x/2)$.
2) $y=\text{sen}(3x/4)+\text{sen}(9x/8)$.
3) $y=a\,\text{sen}(p_1x/q_1)+b\cos(p_2x/q_2)$, donde $p_1, p_2, q_1, q_2\in\mathbb{N}$, $p_1q_2\neq p_2q_1$.
4) $y=a\,\text{sen}(p_1x/q_1)+b\,\text{sen}(p_2x/q_2)$, donde $p_1, p_2, q_1, q_2\in\mathbb{N}$, $p_1q_2\neq p_2q_1$.
5) $y=a\,\text{sen}(p_1x/q_1)+b\,\text{tg}(p_2x/q_2)$, donde $p_1, p_2, q_1, q_2\in\mathbb{N}$, $p_1q_2\neq p_2q_1$.

7.240. ¿Con qué a y b ($ab\neq 0$) la función $y=ax-E(bx+c)$ es periódica y cuál es su período mínimo positivo?

7.241. Aduzcan ejemplos de tales funciones no periódicas f y g que la función h: 1) $h=f+g$; 2) $h=f\cdot g$ sea periódica y tenga el período mínimo positivo.

7.242. Aduzcan ejemplos de tales funciones periódica f y no periódica g que la función h: 1) $h=f+g$; 2) $h=f\cdot g$ sea periódica y tenga el período mínimo positivo.

7.243. ¿Existe una función para la que cada número irracional es su período y cada número racional no lo es?

7.244. El gráfico de la función $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ es simétrico con relación a cada una de las rectas $x=a$ y $x=b$, $a\neq b$. Demuestren que $y=f(x)$ es una función periódica y hallen su período.

7.245. El gráfico de la función $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ es simétrico con respecto del punto $A(a;\,b)$ y la recta $x=c$ ($c\neq a$). Demuestren que $f(x)$ es una función periódica y hallen su período.

7.246. Demuestren que la función f es periódica si existe tal $T \neq 0$ que para toda $x \in D(f)$, $x + T \in D(f)$, $x - T \in D(f)$ y se cumple una de las siguientes condiciones:

1) $f(x+T) = -f(x)$. 2) $f(x+T) = \frac{1}{f(x)}$.

3) $f(x+T) = \frac{f(x)+a}{bf(x)-1}$. 4) $f(x+T) = \frac{1}{1-f(x)}$.

Hallen el período de la función f.

7.247. Sea la función g inversa a sí misma y, además, está definida la composición $g \circ f$. Sea que existe tal $T \neq 0$ que para toda $x \in D(f)$ se cumplen las condiciones $x + T \in D(f)$, $x - T \in D(f)$ y $f(x + T) = g(f(x))$. Demuestren que f es una función periódica y hallen su período.

Construyan los gráficos de las funciones (7.248—7.249):

7.248. 1) $y = 2\cos(2x+1)$. 2) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-1$.

3) $y = \operatorname{sen} x \operatorname{ctg} x$. 4) $y = \cos x + |\cos x|$. 5) $y = |\operatorname{sen} 2x - \cos 2x|$.

6) $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$.

7.249. 1) $y = \frac{2}{1+2\cos x}$. 2) $y = \operatorname{ctg}^2 x$.

3) $y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$. 4) $y = |\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x|$.

5) $y = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$.

7.250. Construyan en un mismo sistema de coordenadas los gráficos de las funciones:

1) $y = \operatorname{sen} x$ e $y = -\sqrt{1-\cos^2 x}$.

2) $y = \cos x$ e $y = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

3) $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

4) $y = \cos 2x$ e $y = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Construyan los gráficos de las funciones (7.251 — 7.253):

7.251. 1) $y = 0{,}5^{|\operatorname{sen} x|}$. 2) $y = 2^{\operatorname{tg} x}$.

3) $y = \log_{0,5} \cos x$. 4) $y = \log_2 \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/6)+\operatorname{sen} x}$.

5) $y = \log_{\cos x} \operatorname{sen} x$. 6) $y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$.

7.252. 1) $y = \cos x^2$. 2) $y = \operatorname{sen} x^2$. 3) $y = \cos(\cos x)$.

4) $y = \operatorname{sen}(2 \operatorname{sen} x)$. 5) $y = \operatorname{sen}(1/x)$. 6) $y = \operatorname{tg}(\pi/x^2)$.

7) $y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{1+x^2}$. 8) $y = \cos\log 2\dfrac{x}{2}$.

7.253. 1) $y = x + \operatorname{sen} x$. 2) $y = x\operatorname{sen} x$.

3) $y = x^2\cos x$. 4) $y = e^{-x}\operatorname{sen} x$. 5) $y = x\cos(1/x)$.

6) $y = (2\operatorname{sen} 3x)/(1+x^2)$. 7) $y = \dfrac{\cos 2x}{x^2}$.

8) $y = \dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$. 9) $y = (1+\cos x)\cos 4x$.

7.254. Construyan el gráfico de la función

$$f(x+2t) + f(x-2t),$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1+\cos x, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi, \end{cases}$$

suponiendo que: 1) $t = 0$; 2) $t = \pi/6$; 3) $t = \pi/4$; 4) $t = \pi/3$; 5) $t = \pi/2$.

Construyan los gráficos de las funciones (7.255—7.258):

7.255. 1) $y = 3\arccos(x/2) + 1$.
2) $y = \operatorname{arcctg}|x|$. 3) $y = \operatorname{arcctg}|x| - \operatorname{arctg}|x|$.
4) $y = x + \operatorname{arctg} x$. 5) $y = \operatorname{arcsen}(1/x)$.

7.256. 1) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ e $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.
2) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ e $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$.
3) $y = \arccos(\operatorname{sen} x)$. 4) $y = \arccos(\cos x) - x$.
5) $y = x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. 6) $y = x\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.
7) $y = x\arccos(\cos x)$. 8) $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg}(1/x)$.
9) $y = \arccos(\cos x) - \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

7.257. 1) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

2) $y = 4\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$. 3) $y = \cos(2\arccos x)$.

4) $y = \operatorname{sen}(3\operatorname{arcsen} x)$. 5) $y = \operatorname{tg}(3\operatorname{arctg} x)$.

6) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$. 7) $y = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

7.258. 1) $y = E(\operatorname{sen} x)$. 2) $y = \cos x - E(\cos x)$.
3) $y = \operatorname{arcsen}(x - E(x))$. 4) $y = \arccos x - E(\arccos x)$.

7.259. Sean máx $\{f(x), g(x)\}$ el mayor y mín $\{f(x), g(x)\}$ el menor de dos números $f(x)$ y $g(x)$ con $x \in D(f) \cap D(g)$. Construyan el gráfico de la función:

1) $y = \text{máx}\{x^2, \sqrt{|x|}\}$. 2) $y = \text{máx}\{x^3, 1/x\}$.
3) $y = \text{máx}\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$. 4) $y = \text{mín}\{2^x, 9/(1+2^{-x})\}$.
5) $y = \text{mín}\{\cos x, \cos 2x\}$. 6) $y = \text{mín}\{\log_2 x, \log_x 2\}$.

7.260. Construyan el gráfico de la función:
1) $y = \cos(3\arccos x)$ 2) $y = \cos(4\arccos x)$.
3) $y = \operatorname{sen}(2\arccos x)$. 4) $y = \operatorname{sen}(3\arccos x)$.

7.261. Demuestren que para todo $n \in \mathbb{N}$:

1) La función $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ coincide sobre $[-1; 1]$ con un polinomio de n grado.

2) La función $\operatorname{sen}(n \arccos x)$ coincide sobre $[-1; 1]$ con la función de la forma $\sqrt{1-x^2}\cdot Q_{n-1}(x)$, donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de $n-1$ grado.

7.262. Construyan el gráfico de la ecuación:

1) $y^2 = x^2 + 4|x| + 4$. 2) $y^2 + 4|y+x| - 4x + 3 = 0$.

3) $y^2 - (5^x - 1)(y - 1) = 0$.

4) $|y| = \dfrac{1}{||x+1|-3|}$. 5) $\log(xy-1) = \log((1-x)(1-y))$.

6) $|y| = \log_{1/3}||x+2|-1|$.

7) $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$. 8) $x^2 + y^2 = 2(|x| + |y|)$.

7.263. Demuestren que la ecuación

$$\sqrt{y^3} + xy - x\sqrt{y} - x^2 = 0$$

prefija una función y construyan su gráfico.

7.264. Demuestren que el gráfico de la ecuación

$$x^3 + x^2y + xy^2 - x - y = 0$$

es la unión de los gráficos de tres funciones; constrúyanlos.

7.265. Construyan el gráfico de la ecuación:

1) $|y| = \cos x$. 2) $\cos|x| + \operatorname{sen}|y| = 0$.

3) $|\operatorname{sen} x|^y + |\cos x|^y = 1$.

4) $|y - \operatorname{sen} x + 1| + |y - \operatorname{sen} x| = 1$.

7.266. Hallen los valores de t correspondientes al punto A de la curva:

1) $A(0; 0)$; $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

2) $A(3; 2)$; $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$.

3) $A(2; 2)$; $x = 2\operatorname{tg} t$, $y = 2\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} 2t$.

4) $A(-9; 0)$; $x = 3(2\cos t - \cos 2t)$, $y = 3(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$.

7.267. ¿Qué puntos A o B pertenecen a la curva:

1) $A(5; 1)$, $B(1; -1)$; $x = 2 + 5\cos t$, $y = 5\operatorname{sen} t - 3$.

2) $A(-31; 3)$, $B(10; 8)$; $x = t^3 + t$, $y = t^2 + 2t$?

7.268. Prefijen la curva con una ecuación y constrúyanla:

1) $x = 6t - t^2$, $y = 3t$. 2) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$.

3) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} 2t$. 4) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t$.

5) $x = \operatorname{sen} 3t$, $y = \operatorname{sen} t$.

7.269. Construyan la curva:

1) $x = \dfrac{2+t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^2}$. 2) $x = \dfrac{1}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1-t^2}$.

3) $x = \dfrac{t}{1+|t|}$, $y = \dfrac{|t|}{1+t}$. 4) $x = \left|\dfrac{t}{1-t}\right|$, $y = \dfrac{t}{1-|t|}$.

5) $x = 3\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$. 6) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$.

7) $x = \cos t$, $y = t + 2\operatorname{sen} t$. 8) $x = 2^{t-1}$, $y = (t^3 + 1)/4$.

7.270. Construyan el gráfico de la función en coordenadas polares:

1) $r=\frac{\varphi}{\varphi-\pi}$. 2) $r=2\,|\cos 3\varphi|$.

3) $\varphi=\frac{r}{r-1}$. 4) $\varphi=\operatorname{arcsen}(r-1)$.

7.271. Sea α un número irracional,

$$f(x)=\alpha x-E(\alpha x),\ x\in\mathbb{Z}.$$

Demuestren que:

1) $f(x)<1$ para toda $x\in\mathbb{Z}$.

2) $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)$ si $f(x_1)-f(x_2)>0$;
$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)-1$ si $f(x_1)-f(x_2)<0$.

3) Para toda $\varepsilon>0$ se hallará tal número $x\in\mathbb{Z}$ que $0<f(x)<\varepsilon$.

7.272. La función f se denomina *convexa hacia las y positivas (hacia las y negativas) sobre el intervalo X* si para toda $x_1, x_2\in X$ y toda $\alpha\in[0;\ 1]$ es cierta la desigualdad

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

(respectivamente

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)).$$

El gráfico de la función convexa hacia las y positivas sobre el segmento $[a;\ b]$ no yace bajo la recta trazada por los puntos $(a;\ f(a))$, $(b;\ f(b))$.

Demuestren que la función:

1) $y=ax^2+bx+c$ es convexa hacia las y negativas sobre $\mathbb{R}$ con $a>0$ y hacia las y positivas sobre $\mathbb{R}$ con $a<0$.

2) $y=a^x$ es convexa hacia las y negativas sobre $\mathbb{R}$.

3) $y=\log_a x$ es convexa hacia las y positivas en $(0;\ +\infty)$ con $a>1$ y hacia las y negativas en $(0;\ +\infty)$ con $0<a<1$.

4) $y=\operatorname{sen} x$ es convexa hacia las y positivas en $[0;\ \pi]$ y hacia las y negativas en $[-\pi;\ 0]$.

7.273. Indiquen los intervalos de convexidad hacia las y positivas y negativas de las funciones:

1) $y=|x|$. 2) $y=x^3$. 3) $y=1/x$. 4) $y=\frac{2x-5}{x+1}$.

5) $y=\operatorname{ch} x$. 6) $y=\operatorname{sh} x$. 7) $y=\log|x|$. 8) $y=|\ln x|$.

7.274. Demuestren que si f y g son funciones convexas hacia las y positivas, la función $\alpha f+\beta g$, donde $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, también lo es.

7.275. Demuestren que:

1) La función inversa a una función convexa hacia las y positivas estrictamente creciente, es convexa hacia las y negativas.

2) La función inversa a una función convexa hacia las y positivas estrictamente decreciente, es convexa hacia las y positivas.

7.276. Indiquen los intervalos de convexidad hacia las y positivas y hacia las y negativas de las funciones:
1) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2;\ \pi/2)$. 2) $y = \cos^2 x$, $x \in (0;\ 2\pi)$.
3) $y = \operatorname{arcsen} x$, $x \in [-1;\ 1]$. 4) $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

7.277. La función f es tal que para cualquier $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ es cierta la desigualdad

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

Demuestren que para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ es cierta la desigualdad

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) < \frac{1}{3}(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)).$$

7.278. La función f es convexa hacia las y negativas sobre $\mathbb{R}$. Demuestren que para toda $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ y toda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ es cierta la desigualdad (llamada de Jensen)

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

7.279. La función $f(x)$ está definida sobre $\mathbb{R}$ y para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2).$$

1) Demuestren que para todas las x racionales

$$f(x) = f(1)\cdot x.$$

2) Demuestren que si f es no acotada en el entorno de cierto punto, ella tampoco lo es en cualquier entorno de cualquier punto.

7.280. La función f con $D(f) \neq \{0\}$ es tal que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $x_1, x_2 \in D(f)$ se verifican las condiciones

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(f),$$
$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Demuestren que $D(f) = \mathbb{R}$ y que para toda $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(1)\, x.$$

7.281. Para la función f existen números $T \neq 0$ y a tales que para toda $x \in D(f)$ tiene lugar

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f)$$

y que es cierta una de las igualdades:
1) $f(x + T) = f(x) + a$, 2) $f(x + T) = f(x) + ax$.

Demuestren que, correspondientemente:

1) $f(x) = \varphi(x) + \frac{a}{T} x$,

2) $f(x) = \varphi(x) + \frac{a}{2T}(x^2 - Tx)$,

donde $\varphi(x)$ es una función periódica con período T.

7.282. Para la función f existen un número $T \neq 0$ y el polinomio $Q_n(x)$ del grado n tales que para cualquiera $x \in D(f)$ tiene lugar

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f)$$

y

$$f(x + T) = f(x) + Q_n(x).$$

Demuestren que existe tal polinomio $P_{n+1}(x)$ del grado $n + 1$ que

$$f(x) = \varphi(x) + P_{n+1}(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función periódica con período T.

7.283. Para la función f existen los números $T \neq 0$ y $k > 0$ tales que para cualquiera $x \in D(f)$ tiene lugar

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f)$$

y

$$f(x + T) = kf(x).$$

Demuestren que existe un número $a > 0$ tal que

$$f(x) = a^x \varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función periódica.

---

14. Sucesiones. Recibe el nombre de *sucesión* una función cuyo campo de definición es el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales. Los valores de semejante función se designan con x_n (o bien a_n, b_n, etc.) y se denominan *términos de una sucesión*, el número n lleva el nombre de *número* del término x_n. La sucesión se anota así

$$\{x_n\} \text{ o bien } x_n,\ n \in N, \text{ o bien } x_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Con otras palabras, si a cada número natural n se le contrapone el número x_n, se dice que se ha prefijado la sucesión $\{x_n\}$.

En calidad de sucesión de números puede tomarse no sólo un conjunto de números naturales, sino también cualquier otro subconjunto infinito de números enteros, p. ej., un conjunto de números naturales pares (en tal caso, la sucesión se designa $\{x_{2k}\}$), un conjunto de números enteros no negativos 0, 1, 2, . . ., etc.

El conjunto de valores de una sucesión puede ser tanto finito como infinito, p. ej., el conjunto de valores de la sucesión $\{(-1)^n\}$ consta de dos números 1 y -1, el conjunto de los valores de la sucesión

$\{1/n\}$ es infinito. La sucesión cuyo conjunto de valores consta de un número recibe el nombre de *estacionaria*.

Una sucesión puede ser prefijada con ayuda de la fórmula de la forma

$$x_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N} \tag{33}$$

que expresa x_n por medio de un número n, p. ej.,

$$x_n = 2^n, \quad n \in \mathbb{N};$$
$$x_n = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Semejante fórmula es llamada *fórmula del término general de la sucesión*. Con el fin de prefijar una sucesión se hace también uso de fórmulas *recurrentes*, es decir, de aquellas que expresan el n-ésimo término de la sucesión con ayuda de los términos con los números menores (los términos anteriores). De esta forma se definen las progresiones aritmética y geométrica (§ 4). Las sucesiones dadas a continuación son otros ejemplos

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = bx_{n-1} + c, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2,$$
$$x_1 = a, \ x_2 = b, \ x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2, \quad n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 3,$$

aquí a, b, c son los números prefijados. Una sucesión puede ser prefijada también con otros procedimientos, p. ej., x_n es la n-ésima cifra en la anotación decimal del número π (o sea, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, etc.).

Ejemplo 21. Hallen la fórmula del término general para las sucesiones:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ (sucesión de Fibonacci);

2) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{4} x_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$;

3) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

△1) Hallemos tal sucesión de la forma $\{\lambda^n\}$ que satisfaga la condición $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ (aquí $\lambda \neq 0$ y, hablando en general, puede asimismo ser un número complejo). Después de poner $x_n = \lambda^n$ obtenemos la ecuación $\lambda^2 = \lambda + 1$ (es llamada ecuación característica), de donde $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$, $\lambda_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Cada una de las sucesiones $\{\lambda_1^n\}$ y $\{\lambda_2^n\}$ satisface la condición $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Para cualesquiera números α y β, la sucesión con término general $x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$ también satisface dicha condición. Hallemos α y β de forma que

$$x_1 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 1, \ x_2 = \alpha\lambda_1^2 + \beta\lambda_2^2 = 1,$$

obtenemos

$$\alpha=\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \beta=\frac{\lambda_1-1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Poniendo los valores de λ_1, λ_2, α y β en la fórmula $x_n = \alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n$, hallamos la fórmula del término general

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\quad n\in\mathbb{N},$$

de la sucesión definida con las condiciones 1).

2) Obrando como en el caso 1) llegaremos a la ecuación característica $4\lambda^2-4\lambda+1=0$ que tiene una raíz de segundo orden de multiplicidad $\lambda=1/2$. La sucesión $\{2^{-n}\}$ satisface la condición

$$x_n=x_{n-1}-\frac{1}{4}x_{n-2},\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3.$$

Como es fácil de comprobar, $\{n2^{-n}\}$ es otra de semejantes sucesiones. Las sucesiones de la forma $\{\alpha 2^{-n}+\beta n 2^{-n}\}$ también satisfacen la indicada condición. Determinando α y β de la condición

$$x_1=\alpha\cdot\frac{1}{2}+\beta\cdot\frac{1}{2}=a,\quad x_2=\alpha\cdot\frac{1}{4}+\beta\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=b,$$

obtenemos

$$\alpha=4a-4b,\ \beta=4b-2a.$$

Es decir, la fórmula del término general de la sucesión prefijada con las condiciones 2) tiene la forma

$$x_n=(2a-2b+(2b-a)\,n)\,2^{1-n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

3) En este caso la ecuación característica $\lambda^2=\lambda-1$ tiene raíces complejas $\lambda_1=e^{i\pi/3}$ y $\lambda_2=e^{-i\pi/3}$. Busquemos la sucesión que satisfaga las condiciones 3) en la forma $x_n=\alpha e^{i\pi n/3}+\beta e^{-i\pi n/3}$ y de las condiciones $x_1=0$, $x_2=1$ hallamos que

$$\alpha=\frac{1}{i\sqrt{3}}e^{-i\pi/3},\ \beta=-\frac{1}{i\sqrt{3}}e^{i\pi/3}.$$

De aquí,

$$x_n=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(e^{i\pi(n-1)/3}-e^{-i\pi(n-1)/3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\pi(n-1)}{3},\quad n\in\mathbb{N}.\ ▲$$

La sucesión prefijada con la fórmula recurrente de la forma

$$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\ldots+a_kx_{n-k},$$
$$n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant k,$$

donde $a_1,\ldots,a_k$ y k son los números prefijados, $k\in\mathbb{N}$, recibe el nombre de *sucesión recíproca del grado k*.

La sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ *está acotada inferiormente* si existe un número C tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es cierta la desigualdad

$$x_n \geqslant C.$$

La sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ está *acotada superiormente* si existe un número C tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es cierta la desigualdad

$$x_n \leqslant C.$$

La sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ *es acotada* si existen tales números C_1 y C_2 que para todo $n \in \mathbb{N}$ son ciertas las desigualdades

$$C_1 \leqslant x_n \leqslant C_2.$$

Esta definición es equivalente a lo siguiente: la sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ es acotada si existe tal número $C > 0$ que para todo $n \in \mathbb{N}$ es cierta la desigualdad $|x_n| \leqslant C$, o con mayor brevedad,

$$\exists C > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}: \;\; |x_n| \leqslant C. \tag{34}$$

Ejemplo 22. Demuestren que las sucesiones:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $x_n = \dfrac{n}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$, donde $a > 1$, son acotadas.

$\triangle$1) Ya que

$$|(-1)^n n + 10| \leqslant |(-1)^n n| + 10 = n + 10, \;\; \sqrt{n^2+1} > n,$$

tenemos

$$|x_n| = \frac{|(-1)^n n + 10|}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \leqslant 11,$$

es decir, (34) se verifica con $C = 11$.

2) Está claro que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n}{a^n} > 0.$$

Como $a - 1 > 0$, de acuerdo con la desigualdad de Bernoulli, para todo $n \in \mathbb{N}$, tendremos

$$a^n = (1 + a - 1)^n \geqslant n(a-1),$$

de donde

$$\frac{n}{a^n} \leqslant \frac{1}{a-1}.$$

Así, pues, para cualquier n son ciertas las desigualdades

$$0 < \frac{n}{a^n} \leqslant \frac{1}{a-1},$$

es decir, la sucesión es acotada. ▲

La negación de la definición de una sucesión acotada es la siguiente: la sucesión x_n, $n \in N$ *es acotada* si para todo $C > 0$ hay tal $n \in \mathbb{N}$ que $|x_n| > C$, con mayor brevedad

$$\forall C > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad |x_n| > C. \tag{35}$$

De modo análogo se enuncian las negaciones de las definiciones de las sucesiones acotadas superiormente (inferiormente).

Ejemplo 23. Demuestren que las sucesiones:

1) $x_n = n^{\cos \pi n}$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $x_n = \dfrac{100 - n^3}{n^2 - 10}$, $n \in \mathbb{N}$

son no acotadas.

△1) Si $n = 2k$, $\cos 2\pi k = 1$ y $x_{2k} = 2k$. Sea C un número positivo tomado al azar. Tomemos el número par $2k$ mayor que C (p.ej., $2k = 2(E(C) + 1)$), entonces $x_{2k} > C$, es decir (35) se verifica y la sucesión dada es no acotada.

2) De la fórmula del término general, tenemos

$$|x_n| = \frac{n^3 \left| \frac{100}{n^3} - 1 \right|}{n^2 \left| 1 - \frac{10}{n^2} \right|} = n \left| \frac{\frac{100}{n^3} - 1}{1 - \frac{10}{n^2}} \right|.$$

Si $n \geqslant 6$,

$$\frac{100}{n^3} < \frac{1}{2} \text{ y } 1 - \frac{100}{n^3} > \frac{1}{2},$$

pero $0 < 1 - \frac{10}{n^2} < 1$, por lo que

$$|x_n| = n \frac{1 - \frac{100}{n^3}}{1 - \frac{10}{n^2}} > n \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{n}{2}.$$

Para un número positivo arbitrario C tomemos $n > 2C$ (p.ej., $n = [2C] + 1$), entonces $|x_n| > \frac{n}{2} > C$ y, por consiguiente, la sucesión dada es no acotada. ▲

La sucesión x_n, $n \in N$ lleva el nombre de *creciente* (*no decreciente*) *comenzando desde el número* n_0 si para cualquiera $n \geqslant n_0$, $n \in N$ es cierta la desigualdad $x_{n+1} \geqslant x_n$.

La sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ se denomina *decreciente* (*no creciente*) *comenzando desde el número* n_0, si para cualquiera $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}$, es cierta la desigualdad $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Si en estas definiciones son ciertas, correspondientemente, las desigualdades $x_{n+1} > x_n$ o bien $x_{n+1} < x_n$, la sucesión lleva el nom-

bre de *estrictamente creciente* o bien *estrictamente decreciente a partir del número* n_0.

Una sucesión creciente o decreciente a partir del número n_0 se denomina *monótona a partir del número* n_0 (estrictamente creciente o decreciente, es decir, *estrictamente monótona*).

Una sucesión creciente a partir del número $n_0 = 1$ se llama *creciente* (de modo análogo, *decreciente*, etc.).

La definición dada de la sucesión creciente a partir del número n_0 es equivalente a la definición de una función creciente sobre un conjunto de números naturales $n \geqslant n_0$, dada con anterioridad (p. 6): la sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$, crece a partir del número n_0, si para toda n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geqslant n_0$, $n_2 \geqslant n_0$, de la desigualdad $n_1 < n_2$ se desprende la desigualdad $x_{n_1} \leqslant x_{n_2}$. Una equivalencia análoga tiene lugar asimismo para la sucesión decreciente a partir del número n_0, etc.

Ejemplo 24. Demuestren que la sucesión

$$x_n = \frac{5^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

decrece estrictamente a partir de cierto número.

△Consideremos la razón

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, 5^n} = \frac{5}{n+1}.$$

Vemos que con $n \geqslant 5$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{5}{6} < 1$$

y, por lo tanto, $x_{n+1} < x_n$ (ya que $x_n > 0$). Así, pues, la sucesión dada decrece estrictamente a partir de $n = 5$. ▲

Ejemplo 25. Demuestren que la sucesión

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

crece estrictamente.

△Consideremos la razón

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\,(n+1)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

De la desigualdad de Bernoulli tenemos para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$

Por ello, para cualquier $n \in N$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

es decir, $x_{n+1} > x_n$ y, por consiguiente, la sucesión dada es estrictamente creciente. ▲

Ejemplo 26. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$, donde

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}:$$

1) crece estrictamente si $a = 0$,
2) decrece estrictamente si $a = 4$.

△ Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x_{n+2}^2 = 6 + x_{n+1}$, $x_{n+1}^2 = 6 + x_n$, de donde

$$x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n. \tag{36}$$

Realicemos la demostración con ayuda del método de inducción matemática.

1) Si $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{6} > x_1$.

Supongamos que la desigualdad $x_{n+1} > x_n$ es cierta para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, de (36) se desprende que $x_{n+2}^2 > x_{n+1}^2$ y como $x_{n+2} > 0$ y $x_{n+1} > 0$, es cierta la desigualdad $x_{n+2} > x_{n+1}$. De forma que $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea, la sucesión crece estrictamente.

2) En este caso, $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{10} < x_1$. Como también más arriba, es fácil demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, de la desigualdad $x_{n+1} < x_n$ se desprende la desigualdad $x_{n+2} < x_{n+1}$. Esto significa que $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, en este caso, la sucesión decrece estrictamente. ▲

La cota superior (inferior) del conjunto de términos de la sucesión $\{x_n\}$ recibe el nombre de *cota superior (inferior) de la sucesión* y se designa

$$\sup \{x_n\} \quad (\inf \{x_n\}).$$

El término x_n de la sucesión $\{x_n\}$ se llama *máximo (mínimo)* si $x_n \leqslant x_{n_0}$ $(x_n \geqslant x_{n_0})$ para todo n y se designa

$$\text{máx } \{x_n\} \quad (\text{mín } \{x_n\}).$$

Si existe máx $\{x_n\}$ (mín $\{x_n\}$), entonces

$$\sup \{x_n\} = \text{máx } \{x_n\} \quad (\inf \{x_n\} = \text{mín } \{x_n\}).$$

De la existencia del sup $\{x_n\}$ (inf $\{x_n\}$) finito no se deduce la existencia de máx $\{x_n\}$ (mín $\{x_n\}$).

Sea x_n, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión arbitraria, en tanto que n_k, $k \in \mathbb{N}$, una sucesión estrictamente creciente de números naturales. La sucesión $y_k = x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, recibe el nombre de subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$. Se suele decir que la sucesión $\{x_n\}$ contiene la sucesión $\{x_{n_k}\}$.

Ejemplo 27. Demuestren que toda sucesión no acotada por las y positivas contiene una subsucesión estrictamente creciente.

△ El carácter no acotado de la sucesión $\{x_n\}$ significa que

$$\forall C \exists n \in \mathbb{N}: x_n > C. \qquad (37)$$

Sea $n_1 = 1$. Para $C = x_1$, según (37), existe tal $n_2 \in \mathbb{N}$ que $x_{n_2} > x_1$. Está claro que $n_2 > 1$. Ahora tomemos $C = \max\{x_1, \ldots, x_{n_2}\}$. De acuerdo con (37) existe tal $n_3 \in \mathbb{N}$ que $x_{n_3} > C$. Está claro que $n_3 > n_2$, ya que $x_i \leqslant C$ para $i = 1, \ldots, n_2$. Supongamos que hemos separado los términos $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, $k \geqslant 2$, tales que $x_{n_{i+1}} > x_{n_i}$ y $n_{i+1} > n_i$ para $i = 1, \ldots, k-1$. Tomemos $C = \max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n_k} \{x_p\}$. Según (37) existe tal $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ que $x_{n_{k+1}} > C$. Con ello, $n_{k+1} > n_k$, ya que $x_i \leqslant C$ para $i = 1, \ldots, n_k$. Así, pues, de la sucesión no acotada $\{x_n\}$ se ha separado la sucesión creciente x_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, en la que $n_{k+1} > n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De modo que $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$.

7.284. ¿Cuáles de los números a, b son términos de la sucesión $\{x_n\}$ si:

1) $a = 1215$, $b = 12\,555$; $x_n = 5 \cdot 3^{2n-3}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $a = 6$, $b = 8$; $x_n = \sqrt{n^2 + 32n} - n$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $a = 6$, $b = 11$; $x_n = (n^2 + 11)/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

4) $a = 248$, $b = 2050$; $x_n = 2^n - n$, $n \in \mathbb{N}$?

7.285. ¿Para qué términos x_n de la sucesión $\{(-3)^{3-2n}\}$ se cumple la desigualdad $|x_n| > 0{,}001$?

7.286. Indiquen cierto número N tal que para todo $n \geqslant N$ los términos de la sucesión $\{x_n\}$ satisfagan la desigualdad prefijada:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n - 3}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n| < 0{,}1$.

2) $x_n = \dfrac{n+3}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n - 1| < 0{,}01$.

3) $x_n = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 + 2^n}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n + 2| < 0{,}001$.

4) $x_n = \sqrt[n]{1{,}5}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n - 1| < 0{,}1$.

5) $x_n = (\log_2 n)/n$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n| < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$.

Indicación. Demuestren y hagan uso de la desigualdad

$$2^{1/k} - 1 > \frac{1}{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

7.287. Hallen el término máximo de la sucesión:

1) $\{21/(3n^2 - 14n - 17)\}$. 2) $\{n/(n^2 + 9)\}$.

3) $\{2^{-n} - 3 \cdot 4^{-n}\}$. 4) $\{n^2/2^n\}$.

7.288. Hallen el término mínimo de la sucesión:

1) $\{(2n-5)(2n-11)\}$. 2) $\left\{n + \frac{5}{n}\right\}$.

3) $\{\log_3^2 n - 3\log_3 n\}$. 4) $\{1, 4^n/n\}$.

7.289. Sea $s(p)$ la suma de las cifras del número natural p (si $p \leqslant 9$, $s(p) = p$).

1) Demuestren que si $p \geqslant 100$, $s(p) < p/10$.

2) Sea $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = s(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que hay tal número n_0 que todos los números de x_n con números $n \geqslant n_0$ son iguales.

3) Sea $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = s(s(x_n) + x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Hallen x_{1984} si: a) $x_1 = 1983$; b) x_1 es múltiplo de 9 y $x_2 \leqslant 1985$; c) $x_1 = 1984$.

7.290. ¿Es la sucesión $\{y_k\}$ una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ si:

1) $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$; a) $y_k = k^2 + 1$, $k \in \mathbb{N}$; b) $y_k = k^2 - 4k + 5$, $k \in \mathbb{N}$.

2) $x_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$; a) $y_k = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$; b) $y_k = 2(k + (-1)^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

3) $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$; a) $y_k = 1/(k - \cos \pi k)$, $k \in \mathbb{N}$; b) $y_k = 1/(3k - \cos \pi k)$, $k \in \mathbb{N}$?

7.291. Sea $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$. Demuestren que $n_k \geqslant k$, $k \in \mathbb{N}$.

7.292. Aduzcan un ejemplo de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_k\}$ que $\forall k \exists n_k$: $y_k = x_{n_k}$, pero de forma que $\{y_k\}$ no sea subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$.

7.293. Aduzcan un ejemplo de la sucesión $\{x_n\}$ que satisfaga la condición:

1) $\forall m \exists n$: $x_m \neq x_n$.

2) $\exists N \forall n \geqslant N$: $x_n < x_N$.

3) $\exists N_1 \forall n \geqslant N_1$: $x_{N_1} > x_n$ y $\exists N_2 \forall n \geqslant N_2$: $x_{N_2} < x_n$.

4) $\exists N \forall n > N \forall m > n$: $x_n < x_m$.

5) $\forall n \exists m > n \forall k > n$: $x_m < x_n < x_k$.

7.294. Indiquen la fórmula del término general de la sucesión cuyos primeros términos son los números:

1) {8; 14; 20; 26; 32; . . .}.

2) {−0,5; 1,5; −4,5; 13,5; −40,5; . . .}.

3) {2; 3/2; 4/3; 5/4; 6/5; . . .}.

4) {1; 3; 1; 3; 1; . . .}.

5) {5; 7; 11; 19; 35; . . .}.

6) {1; 2; 6; 24; 120; . . .}.

7) {−2; −1/2; −4/3; −3/4; −6/5; . . .}.

8) {0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; 0,33333; . . .}.

9) {1/2; 1/2; 3/8; 1/4; 5/32; . . .}.

7.295. De acuerdo con tres términos x_1, x_2, x_3 conocidos de una sucesión hallen la fórmula del término general en la forma $x_n = f(n)$, donde $f(x)$ es un polinomio no mayor del segundo grado.

7.296. Demuestren que si $x_1 = a^{1/k}$ $(a > 0)$

$$x_{n+1} = (a/x_n)^{1/k}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ entonces}$$
$$x_n = a^{(1-(-k)^{-n})/(k+1)}.$$

7.297. Sea

$$x_0 = 1, \quad x_1 = a, \quad x_n = (\alpha + \beta)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} \beta^k x_{n-k} x_k,$$
$$n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2,$$

donde a, α, β son números positivos. Hallen la fórmula del término general de esta sucesión y el número de término máximo.

7.298. 1) Hallen el término general de la sucesión $\{x_n\}$ si $x_1 = a$ y $x_{m+n} = x_m + x_n + mn$ para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$.

2) ¿Existe tal sucesión $\{x_n\}$ que para cualesquiera $m, n \in N$ es cierta la igualdad $x_{m+n} = x_m + x_n + m + n$?

7.299. Hallen la fórmula del término general de la sucesión prefijada por procedimiento recurrente (a, b, α, β son los números dados):

1) $x_1 = 0, \; x_{n+1} = (x_n + 1)/(n + 1), \; n \in \mathbb{N}$.
2) $x_1 = a, \; x_{n+1} = (n + 1)(x_n + 1), \; n \in \mathbb{N}$.
3) $x_1 = 1/2, \; x_{n+1} = 1/(2 - x_n), \; n \in \mathbb{N}$.
4) $x_1 = a, \; x_{n+1} = \alpha x_n + \beta 2^n, \; \alpha \neq 2, \; n \in \mathbb{N}$.
5) $x_1 = 1/2, \; x_{n+1} = 2/(3 - x_n), \; n \in \mathbb{N}$.
6) $x_1 = 0, \; x_2 = 1, \; x_{n+2} = (3x_{n+1} - x_n)/2, \; n \in \mathbb{N}$.
7) $x_1 = a, \; x_2 = b, \; x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n, \; n \in \mathbb{N}$.

7.300. Hallen la fórmula del término general para las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ si $x_1 = a$, $y_1 = b$

$$x_{n+1} = (2x_n + y_n)/3, \quad y_{n+1} = (x_n + 2y_n)/3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.301. La sucesión $\{x_n\}$ ha sido prefijada según procedimiento recurrente: $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, $n \in \mathbb{N}$; a, b, p, q son los números dados.

1) Demuestren que si la ecuación $\lambda^2 = p\lambda + q$ tiene diferentes raíces λ_1 y λ_2, el término general de la sucesión $\{x_n\}$ tiene la forma

$$x_n = \frac{(\lambda_2 a - b)\,\lambda_1^{n-1} - (\lambda_1 a - b)\,\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) Demuestren que si la ecuación $\lambda^2 = p\lambda + q$ tiene la raíz múltiple $\lambda \neq 0$, el término general de la sucesión $\{x_n\}$ tiene la forma

$$x_n = (2a\lambda - b + n(b - a\lambda))\,\lambda^{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.302. La sucesión $\{x_n\}$ ha sido prefijada con procedimiento recurrente:

$$x_1 = a, \; x_2 = b, \; x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + r, \; n \in \mathbb{N};$$

a, b, p, q, r son los números dados. Hallen la fórmula del término general si

1) la ecuación $\lambda^2 = p\lambda + q$ tiene diferentes raíces λ_1 y λ_2;

2) la ecuación $\lambda^2 = p\lambda + q$ tiene raíz múltiple $\lambda_0 \neq 0$.

7.303. Hallen la fórmula del término general de una sucesión prefijada según procedimiento recurrente:

1) $x_1 = x_2 = 1,\ x_{n+2} = 0{,}5\ (x_{n+1} + x_n) + 1,\ n \in \mathbb{N}$.

2) $x_1 = x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 2,\ n \in \mathbb{N}$.

7.304. Hallen la fórmula del término general de la sucesión $\{x_n\}$ si $x_1 = a > 0,\ x_{n+1} = 1/(1 + x_n),\ n \in \mathbb{N}$.

7.305. Hallen todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que las fórmulas $x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n/(2 + x_n),\ n \in \mathbb{N}$ prefijan la sucesión. Hallen la fórmula del término general de esta sucesión.

7.306. Sean $x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n/(4 - x_n),\ n \in \mathbb{N}$.

1) Demuestren que si $a \notin [3; 4]$, dichas fórmulas prefijan una sucesión y hallen la fórmula del término general.

2) Hallen todos los valores de a con los que dichas fórmulas no determinan una sucesión.

7.307. Hallen la fórmula del término general de la sucesión prefijada por procedimento recurrente (a, b, c, d son los números dados):

1) $x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n/(b + x_n),\ n \in \mathbb{N}$.

2) $x_1 = a,\ x_{n+1} = bx_n/(c + dx_n),\ n \in \mathbb{N}$.

7.308. Sean $x_1 = p,\ p \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + 2^n,\ n \in \mathbb{N}$. Demuestren que existe una subsucesión de esta sucesión en la que todos los términos se dividen entre 3.

7.309. Sean

$$S_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},\quad a_n = 3 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2!} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 3!} - \ldots - \frac{1}{(n-1)\,n\cdot n!}.$$

Demuestren que

$$a_n = S_n + \frac{1}{n\cdot n!}.$$

7.310. Demuestren que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones acotadas, también lo son las sucesiones

1) $\{x_n \cdot y_n\}$; 2) $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7.311. Aduzcan un ejemplo de tales sucesiones acotadas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, que la sucesión $\{x_n/y_n\}$ no es acotada.

7.312. La sucesión $\{x_n\}$ es acotada, $\{y_n\}$ satisface la condición: existe tal $C > 0$ que para todo $n \in \mathbb{N}$ es cierta la desigualdad $|y_n| \geqslant C$. Demuestren que la sucesión $\{x_n/y_n\}$ es acotada.

7.313. La sucesión $\{x_n\}$ es no acotada. Demuestren que ella contiene tal subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que $x_{n_k} > k$, $k \in \mathbb{N}$, o bien $x_{n_k} < -k$, $k \in \mathbb{N}$.

7.314. Demuestren la acotación de las sucesiones:

1) $\left\{\frac{2n^2-1}{2+n^2}\right\}$. 2) $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$. 3) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{3n-1}\right\}$.

4) $\left\{\frac{n^2+4n+8}{(n+1)^2}\right\}$. 5) $\left\{\frac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-2)}\right\}$.

7.315. Demuestren que las siguientes sucesiones son no acotadas:

1) $\{(-1)^n n\}$. 2) $\{n^2-n\}$. 3) $\{(1-n)/\sqrt{n}\}$.

4) $\{n+(-1)^n n\}$. 5) $\{n^{(-1)^n}\}$. 6) $\{(1-n)^{\operatorname{sen}(\pi n/2)}\}$.

7) $\{n^3/(n^2+1)\}$. 8. $\{(n-n^4)/(n+2)^3\}$.

7.316. Sean P_k y Q_l polinomios de grado k y l, respectivamente, $Q_l(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que la sucesión $\{P_k(n)/Q_l(n)\}$: 1) es acotada si $k \leqslant l$; 2) no es acotada si $k > l$.

7.317. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:

1) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \in \mathbb{N}$. 2) $x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $x_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j$, $n \in \mathbb{N}$.

7.318. Demuestren que si $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)(a_n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{a_k}\right)$ es acotada *).

7.319. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ es acotada y hallen $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$ si:

1) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}$. 2) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $n \in \mathbb{N}$. 4) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demuestren que las sucesiones (**7.320—7.322**) son acotadas:

7.320. 1) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a+(k-1)d)(a+kd)}$, $n \in \mathbb{N}$.

---

*) $\prod_{k=1}^{n} c_k$ es el producto de los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

3) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$, $n\in\mathbb{N}$. 4) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, $n\in\mathbb{N}$.

5) $x_n=\log_2\left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

7.321. 1) $\left\{\frac{3n+5}{\sqrt{4n^2-1}}\right\}$. 2) $\left\{\frac{\sqrt{n^3+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)}\right\}$.

3) $\left\{\frac{\sqrt[3]{n^4+2n}+\sqrt{n^3+2}}{3n-2n^2}\right\}$.

7.322. 1) $\{\sqrt{n^2+1}-n\}$. 2) $\{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}\}$.

3) $\{n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n})\}$.

4) $\{\sqrt[3]{9n-n^3}+\sqrt[3]{9n+n^3}\}$.

5) $\{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}\}$. 6) $\left\{\sqrt{\frac{n^4+n^3}{n^2+1}}-\sqrt{n^2-1}\right\}$.

7.323. Demuestren que las siguientes sucesiones son no acotadas:

1) $\{\sqrt{n^4+n^3+1}-\sqrt{n^4-n^3+1}\}$.

2) $\{\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n^3}}-n\}$.

7.324. ¿Con cuáles p, q, $0\leqslant q<p$ es acotada la sucesión:

1) $\{\sqrt{n^p+n^q+1}-\sqrt{n^p-n^q+1}\}$.

2) $\{\sqrt[3]{n^p-n^q+1}-\sqrt[3]{n^p+1}\}$.

3) $\{\sqrt[k]{n^p+an^q+1}-\sqrt[k]{n^p+bn^q+1}\}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$, $a\neq b$?

7.325. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:

1) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. 2) $\{\sqrt[n]{n}\}$. 3) $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\}^n$, $x>0$.

7.326. 1) Demuestren que la sucesión $\{(\ln n)/n\}$ es acotada superiormente con el número $\ln 2$.

2) Hallen $\sup\{(\ln n)/n\}$.

7.327. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:

1) $\left\{\frac{2^n+1}{3^n-2}\right\}$. 2) $\left\{\frac{5^{2n+1}+2^n}{1-25^n}\right\}$.

3) $\left\{\frac{\ln^2 n+10}{\ln^2 n^2+2}\right\}$. 4) $\{\log(3n+5)-\log(n+1)\}$.

5) $\{\ln(\sqrt{2n^2+1}-n)-\ln n\}$. 6) $\left\{\frac{\ln(n^2+1)-\ln(n+1)}{\ln(n+0{,}5)}\right\}$.

7) $\left\{\frac{n+\ln n}{n+1}\right\}$. 8) $\left\{n\ln\frac{n+1}{n}\right\}$. 9) $\{\ln^2(n+1)-\ln^2 n\}$.

7.328. Demuestren que las siguientes sucesiones son no acotadas:

1) $\{5^n-4^n\}$. 2) $\left\{\frac{3^n-2^n}{2^n+1}\right\}$. 3) $\sqrt[n]{n!}$. 4) $\left\{\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right\}^{*)}$.

5) $\{2^n/n^2\}$. 6) $\{a^n/n^k\}$, $|a|>1$, $k\in\mathbb{R}$. 7) $\left\{\frac{n+1}{\log_2(n+1)}\right\}$.

7.329. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:
1) $\{n/3^n\}$. 2) $\{n^2/2^n\}$. 3) $\{n^p/2^n\}$, $p\in\mathbb{R}$.
4) $\{nq^n\}$, $|q|<1$. 5) $\{n^pq^n\}$, $p\in\mathbb{R}$, $|q|<1$.

7.330. Demuestren:
1) Que la siguiente sucesión es acotada:

$$x_n=\sum_{k=1}^{n} kq^k,\quad n\in\mathbb{N},\quad |q|<1.$$

2) Que la siguiente sucesión no es acotada:

$$x_n=\sum_{k=1}^{n} kq^{n-k},\quad n\in\mathbb{N},\quad q\in\mathbb{R},\quad q\neq 0.$$

7.331. Demuestren que una sucesión $\{x_n\}$ tal que

$$x_1=2,\ x_{n+1}=\frac{x_n^4+1}{5x_n},\quad n\in\mathbb{N},$$

1) es acotada inferiormente con el número 1/5; 2) es acotada superiormente con el número 2.

7.332. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:
1) $x_1=a>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{b^2}{x_n}\right)$.
2) $x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=(x_{n+1}+x_n)/2$.

7.333. Demuestren que las siguientes sucesiones son no acotadas:
1) $x_1=x_2=1$, $x_{n+2}=x_{n+1}+6x_n$.
2) $x_1=-4$, $x_2=3$, $x_{n+2}=x_{n+1}+\frac{3}{4}x_n$.

7.334. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$, donde $x_1=x_2=1$,

$$x_{n+2}=x_{n+1}+\frac{x_n}{2^n},\ n\in\mathbb{N},\ \text{es acotada.}$$

7.335. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números naturales tal que la sucesión

$$S_n=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n},\ n\in\mathbb{N},$$

es acotada. Demuestren que la sucesión

$$y_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right),\quad n\in\mathbb{N},$$

es acotada.

---

*) $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\ \ldots\ 2n$; $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2n-1)$.

7.336. Demuestren que la sucesión es no acotada

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.337. 1) Demuestren que si la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_n$ es acotada, la sucesión $\{x_n\}$ también lo es.

2) ¿Es cierto que si la sucesión $\{x_n\}$ es no acotada, también lo será la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_n$, $n \in \mathbb{N}$?

7.338. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:
1) $\{n(a^{1/n} - 1)\}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
2) $\left\{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2} - \sqrt{n}\right\}$.
3) $\{n^{\alpha}(\sqrt[n]{n} - 1)\}$, $\alpha < 1$.

Demuestren que la sucesión dada es monótona a partir de cierto número (7.339—7.341):

7.339. 1) $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$. 2) $\left\{\frac{3n+4}{n+2}\right\}$. 3) $\left\{\frac{100n}{n^2+16}\right\}$.
4) $\{n^3 - 6n^2\}$. 5) $\left\{\frac{n^2+24}{n+1}\right\}$. 6) $\left\{\frac{n^3}{n^2-3}\right\}$.
7) $\left\{\frac{n^2}{n^3+32}\right\}$. 8) $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n}}\right\}$.

7.340. 1) $\{\sqrt{3n-2}\}$. 2) $\{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\}$.
3) $\{\sqrt[3]{n^3-1} - n\}$. 4) $\{\sqrt{n^2+n} - n\}$. 5) $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+7}}\right\}$.
6) $\left\{\frac{n-3}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$.

7.341. 1) $\{2^n - 100n\}$. 2) $\{3^n - 2^n\}$. 3) $\{2^{n+1} - 3^{n-2}\}$.
4) $\left\{\frac{6^{n+1} - 5^{n+1}}{6^n + 5^n}\right\}$. 5) $\left\{\frac{4^{n-1} + 3^{n-1}}{4^n + 3^n}\right\}$.
6) $\left\{\frac{100^n}{n!}\right\}$. 7) $\left\{\frac{2^n}{n}\right\}$. 8) $\{\log(n+1) - \log n\}$.
9) $\{\ln(n^2 + 9n) - 2\ln n\}$.

7.342. Demuestren que la sucesión $\{nq^n\}$, $0 < q < 1$ es monótona a partir de cierto número; indiquen cuál es éste.

7.343. ¿Con qué relaciones entre a, b, c, d la sucesión $\left\{\frac{an+b}{cn+d}\right\}$ será, a partir de cierto número: 1) creciente; 2) decreciente?

7.344. Demuestren que la sucesión

$$x_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

es monótona.

7.345. Demuestren que la sucesión

$$x_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!, \quad n\in\mathbb{N},$$

es creciente y acotada. Hallen inf $\{x_n\}$, sup $\{x_n\}$.

7.346. Empleando los símbolos $\exists$, $\forall$ enuncien la afirmación:
1) La sucesión $\{x_n\}$ no es creciente.
2) La sucesión $\{x_n\}$ no es decreciente.

7.347. Demuestren que la sucesión dada no es monótona:

1) $\{(-1)^n\}$. 2) $\left\{\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{2}\right\}$.

3) $\{n+(-1)^n\}$. 4) $\{\mathrm{sen}\,n\}$.

5) $x_1=1,\ x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n},\ n\in\mathbb{N}$.

7.349. Demuestren que si $\{x_n\}$ es una sucesión monótona, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right\}$ también lo es.

7.348. Demuestren que la sucesión dada decrece a partir de cierto número:
1) $\{n/4^n\}$. 2) $\{(3n+1)^2/3^n\}$. 3) $\{n^3/2^n\}$. 4) $\{n^{1/n}\}$.

7.350. Demuestren la monotonía de la sucesión:
1) $\{n-6\log n\}$. 2) $\{\log n-n\}$. 3) $\{(\log n)/n\}$.

7.351. Demuestren que la sucesión:

1) $\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right\}$ crece; 2) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ decrece.

7.352. Demuestren que con toda $x>0$:

1) La sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ crece.

2) La sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+l}\right\}$, donde, $l\in\mathbb{N}$, $l>x$, decrece.

7.353. Demuestren que con $a\neq 1$, $a>0$ la sucesión:

1) $\left\{\frac{a^n-1}{n}\right\}$, 2) $\{n(1-a^{1/n})\}$ crece.

7.354. Demuestren que la sucesión $x_1=-10$, $x_{n+1}=\frac{x_n+1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, decrece a partir de cierto número, indiquen ese número.

7.355. Sean $x_1=3$, $x_{n+1}=0{,}5x_n^2-1$, $n\in\mathbb{N}$. Demuestren que esta sucesión: 1) es inferiormente acotada, pero no acotada superiormente; 2) crece.

7.356. Sean $x_1=2$, $x_{n+1}=0{,}5x_n^2-1$, $n\in\mathbb{N}$.
1) Demuestren que esta sucesión es acotada.
2) Demuestren que las subsucesiones $\{x_{2k}\}$ y $\{x_{2k-1}\}$ de la sucesión son monótonas a partir de cierto número.

7.357. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$, donde $x_1=4$, $x_{n+1}=\frac{2+x_n^2}{2x_n}$, $n\in\mathbb{N}$, decrece.

7.358. Las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ están prefijadas por procedimiento recurrente: $x_1=a>0$, $y_1=b>0$,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n),\quad y_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Demuestren que: 1) $y_n\geqslant x_n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$; 2) la sucesión $\{x_n\}$ crece ($n\geqslant 2$); 3) la sucesión $\{y_n\}$ decrece ($n\geqslant 2$); 4) $|y_{n+1}-x_{n+1}|\leqslant\leqslant|b-a|/4^n$.

7.359. Demuestren que si $x_1=a>0$, $y_1=b>0$,

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\quad y_{n+1}=0{,}5(x_n+y_n),\quad n\in\mathbb{N},$$

1) la sucesión $\{x_n\}$ crece e $\{y_n\}$ decrece; 2) ambas sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son acotadas; 3) $|y_{n+1}-x_{n+1}|\leqslant|b-a|/2^n$.

7.360. Demuestren que toda sucesión contiene una subsucesión monótona.

7.361. Sean $C_\alpha^0=1$, $C_\alpha^n=C_\alpha^{n-1}\cdot\frac{\alpha-n+1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, donde $\alpha\in\mathbb{R}$. Demuestren que:

1) $C_\alpha^n=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n\in\mathbb{N}$;

2) las sucesiones $\{C_{3/2}^n\}$, $\{C_{1/2}^n\}$, $\{C_{-1/2}^n\}$, $\{C_{-1}^n\}$ son acotadas;

3) las sucesiones $\{C_{-2}^n\}$, $\{C_{-3,5}^n\}$ son no acotadas;

4) la sucesión $\{C_\alpha^n\}$ es acotada con $\alpha\geqslant-1$;

5) la sucesión $\{C_\alpha^n\}$ es no acotada con $\alpha<-1$;

6) la sucesión $\{|C_\alpha^n|\}$ decrece (en amplio sentido) con $\alpha\geqslant-1$ a partir de cierto número.

7) la sucesión $\{|C_\alpha^n|\}$ crece (en amplio sentido) con $\alpha<-1$ a partir de cierto número;

8) la sucesión $\{C_\alpha^n\cdot q^n\}$ es acotada con $\alpha<-1$, $|q|<1$.

Capítulo II

LIMITE Y CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

§ 8. Límite de una sucesión

1. Concepto de límite.

Definición 1. El número a lleva el nombre de *límite de la sucesión* $\{x_n\}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe tal número natural N que para cualesquiera $n \geqslant N$ es cierta la desigualdad

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Con ayuda de los símbolos $\forall$ y $\exists$ la definición 1 se anota del modo siguiente: el número a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N: \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Haciendo uso de la noción entorno de un punto, la definición del límite puede enunciarse de la forma siguiente: el número a se denomina límite de la sucesión $\{x_n\}$ si para cada entorno del número a existe un número a partir del cual todos los términos de la sucesión pertenecen a dicho entorno.

Con otras palabras, cualquiera que sea el entorno del número a que tomemos, fuera de él o no hay ningún término de la sucesión, o bien sólo hay un número finito de sus términos.

En anotación simbólica: el número a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si

$$\forall U(a) \exists N \forall n \geqslant N: \ x_n \in U(a).$$

Teorema. Una sucesión sólo puede tener un límite.

Si a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$, ha de escribirse

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Aquella sucesión que tiene límite recibe el nombre de *convergente*.

Ejemplo 1. Partiendo de la definición 1, demuestren que el número 1 es el límite de la sucesión $x_n = n/(n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

$\triangle$Consideremos el módulo de la diferencia

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Tomemos al azar el número $\varepsilon > 0$. La desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon$ se cumplirá si $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, es decir, con $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. En calidad de N tomemos cualquier número natural que satisfaga la condición

$N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, es decir, $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$*). Entonces, para todo $n \geqslant N$ se cumplen las desigualdades

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Esto significa, precisamente, que 1 es el límite de la sucesión $\{n(n+1)\}$, o sea,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 2. Partiendo de la definición 1, demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} (1/3)^n = 0.$$

$\triangle$Como $3^n > n$ para todo $n \geqslant 1$,

$$|(1/3)^n - 0| = 1/3^n < 1/n.$$

Sea $\varepsilon > 0$, elijamos tal número natural N que $1/N < \varepsilon$. Entonces, para todo $n \geqslant N$, tendremos

$$|(1/3)^n - 0| < 1/n \leqslant 1/N < \varepsilon.$$

Esto significa que

$$\lim_{n\to\infty} (1/3)^n = 0. \ \blacktriangle$$

Enunciemos la negación de la definición 1: *el número a no es el límite de la sucesión* $\{x_n\}$ si existe tal $\varepsilon > 0$ que para cualquier número natural N se hallará tal número $n \geqslant N$ que

$$|x_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

En anotación simbólica, el número a no es límite de la sucesión $\{x_n\}$ si

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N: \quad |x_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

En el lenguaje de los entornos: el número a no es límite de la sucesión $\{x_n\}$ si existe un entorno del número a fuera del que hay una cantidad infinita de términos de la sucesión.

Una sucesión se denomina *divergente* si ningún número es límite de ella, con otras palabras: la sucesión $\{x_n\}$ es divergente si para cualquier número a existe tal ε que para N natural hay semejante $n \geqslant N$ que

$$|x_n - a| \geqslant \varepsilon,$$

*) P. ej., $N = E(1/\varepsilon)$, donde $E(a)$ es la parte entera del número a.

o con mayor brevedad,

$$\forall a \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N: \ |x_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

Ejemplo 3. Demuestren que la sucesión $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$ diverge.

△Hay que demostrar que ningún número es el límite de la sucesión dada.

Marquemos en la recta numérica varios términos de la sucesión, p. ej.,

$x_1 = 0$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = -2/3$, $x_4 = 5/4$, $x_5 = -4/5$, $x_6 = 7/6$,
$x_{12} = 13/12$, $x_{13} = -12/13$ (fig. 55).

Dicha figura nos sugiere que la distancia entre dos términos vecinos de la sucesión es mayor que 1. Demostremos que esto es en efecto así para cualesquiera dos términos vecinos. De éstos, uno tiene número par $n = 2k$ y

$$x_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} > 1.$$

El término vecino tiene el número impar $2k+1$ (o bien $2k-1$) y

$$x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} < 0 \quad \left(\text{o bien } x_{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \leqslant 0\right).$$

De aquí sigue que $|x_n - x_{n+1}| > 1$.

Para el número arbitrario a tomemos un entorno de largura unitaria, o sea, el intervalo $\left(a - \frac{1}{2};\ a + \frac{1}{2}\right)$. Cualesquiera dos

Fig. 55

términos vecinos x_n y x_{n+1} no pueden ambos hallarse en este entorno, ya que la distancia entre ellos es mayor que 1. Por lo menos uno de ellos yacerá fuera del entorno.

Así, pues, para todo número a existe tal $\varepsilon = 1/2$ que para cualquier N natural podrá hallarse semejante n igual bien a N, o bien a $N+1$ tal que $|x_n - a| > 1/2 = \varepsilon$. Esto significa que la sucesión dada diverge. ▲

Teorema. Si una sucesión tiene límite ella es acotada.

La acotación de una sucesión es la condición *necesaria* de su convergencia, es decir, si la sucesión es no acotada, ella diverge.

Ejemplo 4. Demuestren que la sucesión $\{(n^2-10)/n\}$ diverge.
△Demostremos que la sucesión dada es no acotada. Tenemos

$$x_n = n - \frac{10}{n} \geqslant n - 10.$$

Sea C un número positivo arbitrario. Tomemos cierto número natural $n_0 > C + 10$, entonces $x_{n_0} \geqslant n_0 - 10 > C$. Esto significa que la sucesión $\{(n^2-10)/n\}$ es no acotada y, por lo tanto, diverge.▲

Definición 2. La sucesión $\{x_n\}$ lleva el nombre de *infinitamente pequeña* si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Teorema. Si la sucesión $\{x_n\}$ es infinitamente pequeña, en tanto que la $\{y_n\}$, acotada, entonces $\{x_n y_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña.

Teorema. Para que el número a sea el límite de la sucesión $\{x_n\}$ es necesario y suficiente que para todo n

$$x_n = a + \alpha_n,$$

donde $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña.

8.1. Para cada ε dado indiquen tal N natural que $1/n < \varepsilon$ para cualquier $n \geqslant N$ y rellenen la tabla

ε	10	0,5	0,03	$3\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-10}$
N					

8.2. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ indicando para cada $\varepsilon > 0$ semejante N que para cualquier $n \geqslant N$ sea cierta la desigualdad $|x_n| < \varepsilon$ si:

1) $x_n = 1/n$. 2) $x_n = a/n$ (a es el número arbitrario dado).
3) $x_n = (-1)^{n+1}/n$. 4) $x_n = (2 + (-1)^n)/n$.
5) $x_n = (1 + (-1)^n)/n$. 6) $x_n = \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}$.

Marquen en la recta numérica [en el caso 2) tomen $a = -1$] los primeros seis términos de dichas sucesiones.

8.3. 1) Demuestren que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n+10}{2n-1} > \frac{1}{2}.$$

Hallen todos los $n \in \mathbb{N}$ para los que

$$\frac{n+10}{2n-1} < \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

donde ε es igual a: a) 1/6; b) 1/10; c) 1/2 $(2k+1)$, $k \in N$.

2) Demuestren que $\lim_{n\to\infty}\frac{n+10}{2n-1}=\frac{1}{2}$.

8.4. 1) Para cada ε dado indiquen semejante N natural que

$$\left|\frac{2n-1}{n+0,5}-2\right|<\varepsilon$$

para todo $n\geqslant N$ y rellenen la tabla

ε	10	0,5	0,03	$3\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-10}$
N					

Demuestren que $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+0,5}=2$.

8.5. Demuestren que:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+b}{n}=1$, donde $b\in\mathbb{R}$.

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$. 3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}=\frac{3}{2}$.

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2-n}{2+n}=-1$. 5) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}=1$.

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$, donde $p\geqslant1$.

8.6. Sea $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ y la sucesión $\{y_n\}$ tal que existen semejantes p y n_0 naturales que $y_n=x_{n+p}$ (o bien $y_n=x_{n-p}$) para cualquier $n\geqslant n_0$. Demuestren que la sucesión y_n converge y que $\lim_{n\to\infty} y_n=x$. Con otras palabras, la variación (en particular, la eliminación o adición) de un número finito de términos de una sucesión convergente conduce a que ella siga siendo convergente hacia ese mismo límite.

8.7. Para cada ε dado indiquen tal N natural que $1/\sqrt{n}<\varepsilon$ para todo $n\geqslant N$ y rellenen la tabla

ε	10	1	0,1	0,01
N				

8.8. Demuestren que:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2n-1}}=0$. 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-11}}=0$.

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{n}}=0$, donde $k\in\mathbb{N}$.

8.9. 1) Para cada ε dado indiquen tal N que

$$\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}-1\right|<\varepsilon$$

para todo $n \geqslant N$ y rellenen la tabla

ε	1	0,2	10^{-3}	10^{-4}
N				

2) Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1.$

8.10. 1) Para la sucesión $\{x_n\}$ rellenen la tabla

ε	10	0,5	0,03	$3\cdot 10^{-4}$	$7\cdot 10^{-10}$
N					

indicando para cada ε dado tal N natural que $|x_n|<\varepsilon$ para todo $n \geqslant N$ si a) $x_n = (-0,5)^n$; b) $x_n = (0,99)^n$.

2) Demuestren que

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-0,5)^n=0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} (0,99)^n=0$.

8.11. Demuestren que si $|q|<1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0.$$

8.12. Demuestren que el número a no es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si:

1) $x_n=(-1)^n$; $a=-1$. 2) $x_n=\frac{2-\cos \pi n}{2+\cos \pi n}$; $a=3$.

3) $x_n=\cos(\pi n/3)$; $a=1/2$. 4) $x_n=2^{(-1)^n n}$; $a=0$.

8.13. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ diverge si

1) $x_n=(-1)^n$. 2) $x_n=n$.

3) $x_n=\operatorname{sen}(\pi n/2)$. 4) $x_n=E((-1)^n/n)$.

5) $x_n=\operatorname{sen} n^\circ$. 6) $x_n=\frac{n}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$.

8.14. La sucesión $\{x_n\}$ diverge y la $\{y_n\}$ es tal que existen semejantes p y n_0 naturales que $y_n = x_{n+p}$ (o bien $y_n = x_{n-p}$) para todo $n \geqslant n_0$. Demuestren que la sucesión $\{y_n\}$ diverge. Con otras palabras, la variación (en particular, la eliminación o adición) de un número finito de términos de la sucesión divergente conduce a que ella lo siga siendo.

8.15. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ diverge si:

1) $x_n=(-1)^n n$. 2) $x_n=n^{(-1)^n}$.

3) $x_n=\frac{n^2-2n}{n+1}$. 4) $x_n=n^2\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4}$.

5) $x_n=(0,5)^{((-1)^n-1)n}$.

8.16. Demuestren que $\{x_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña si:

1) $x_n=\frac{n^2-1}{n^3}$. 2) $x_n=\frac{2n+3}{n^2}$. 3) $x_n=\frac{q^n}{n}$, $|q|\leqslant 1$.

4) $x_n=\frac{2n+1}{(n+1)\,2^n}$. 5) $x_n=\frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}}$.

8.17. Con el fin de que la sucesión $\{x_n\}$ sea infinitamente pequeña es necesario y suficiente que la sucesión $\{|x_n|\}$ también lo sea. Demuéstrenlo.

---

2. Teoremas de los límites, ligados con operaciones aritméticas.

1) Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, para cualquier α tiene lugar

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n)=\alpha\lim_{n\to\infty} x_n.$$

2) Si existen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, entonces

a) tiene lugar

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\lim_{n\to\infty} y_n;$$

b) tiene lugar

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n\cdot\lim_{n\to\infty} y_n;$$

c) si, además, $y_n\neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$, existirá

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Ejemplo 5. Hallen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-3n^2}{n^3+1}.$$

△Transformemos la fórmula para el término general a la forma

$$x_n=\frac{5-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}.$$

Tomando en consideración que $\{1/n\}$ y $\{1/n^3\}$ son sucesiones infinitamente pequeñas y empleando los teoremas sobre los límites, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{5}{1} = 5. \blacktriangle$$

8.18. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si:

1) $x_n = \dfrac{9+\frac{n}{n+1}}{2+\frac{1}{n}}$. 2) $x_n = \dfrac{3+0{,}5^n}{0{,}3^{n+1}+5}$. 3) $x_n = \dfrac{n}{3n+2}$.

4) $x_n = \dfrac{2-n}{n+1} + \dfrac{n\cdot 2^{-n}}{n+2}$. 5) $x_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^5$.

6) $x_n = \dfrac{n^3+27}{n^4-15}$. 7) $x_n = \dfrac{(n+5)^3-n(n+7)^2}{n^2}$.

8) $x_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1} - \dfrac{3n^2+1}{6n+1}$. 9) $x_n = \dfrac{(-1)^n+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-(-1)^n}$.

10) $x_n = \dfrac{3n}{5+3^{n+1}}$. 11) $x_n = \dfrac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}$.

12) $x_n = \dfrac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$. 13) $x_n = \dfrac{(-1)^n\cdot 6^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$.

14) $x_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$.

8.19. Es conocido que $x_n \neq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ si:

1) $y_n = \dfrac{2x_n-1}{x_n-2}$. 2) $y_n = \dfrac{x_n-1}{x_n^2-1}$.

3) $y_n = \dfrac{x_n^2+x_n-2}{x_n-1}$. 4) $y_n = \dfrac{x_n^2-3x_n+2}{x_n^2-1}$.

8.20. Sea a_n el término general y S_n, la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, cuya razón $d \neq 0$. Hallen:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{a_n^2}$ $(a_n \neq 0)$.

8.21. Sea $|q| < 1$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} aq^n$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

8.22. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si:

1) $x_n = 0,\underbrace{11\ldots1}_{n}$.

2) $x_1 = 0,4$; $x_2 = 0,45$; $x_3 = 0,454$; $x_4 = 0,4545$; $x_5 = 0,45454$; ...; $x_{2k} = 0,4545\ldots45$; ...

3) $x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,23$; $x_3 = 0,234$; $x_4 = 0,2342$; $x_5 = 0,23423$; $x_6 = 0,234234$; ...

8.23. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

---

3. Teoremas de los límites, ligados con desigualdades.

1) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ y para todo n, a partir de cierto de ellos, $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ (*teorema de las tres sucesiones*).

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y para todo n, a partir de cierto de ellos, $x_n \geqslant b$ (o bien $x_n \leqslant c$), entonces $a \geqslant b$ (o bien $a \leqslant c$).

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > a$ (o bien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < b$), entonces, para todo n, a partir de cierto de ellos, $x_n > a$ (o bien $x_n < b$).

Ejemplo 6. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} (5^n/n^n) = 0$.

△Para todo $n \geqslant 15$ es cierta la desigualdad $5/n \leqslant 1/3$ y, por ello,

$$0 < (5/n)^n \leqslant (1/3)^n$$

con $n \geqslant 15$. Aquí, a la izquierda y la derecha, se hallan los términos de la sucesión cuyo límite es nulo. Por ello, de acuerdo con el teorema de las tres sucesiones, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} (5/n)^n = 0. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 7. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ y $x_n \geqslant -1$ para todo n; supongamos que p es un número natural. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1.$$

△ Si $x_n \geqslant 0$,

$$1 \leqslant \sqrt[p]{1+x_n} \leqslant (\sqrt[p]{1+x_n})^p = 1+x_n = 1+|x_n|,$$

mientras que si $-1 \leqslant x_n < 0$,

$$1 \geqslant \sqrt[p]{1+x_n} \geqslant (\sqrt[p]{1+x_n})^p = 1 + x_n = 1 - |x_n|.$$

Uniendo estos resultados, obtenemos para toda $x_n \geqslant -1$

$$1 - |x_n| \leqslant \sqrt[p]{1+x_n} \leqslant 1 + |x_n|.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} (1 - |x_n|) = \lim_{n\to\infty} (1 + |x_n|) = 1.$$

De aquí se deduce que también

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1. \ ▲$$

Ejemplo 8. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$.

△Transformemos la fórmula del término general

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n) = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}. \ ▲$$

Ejemplo 9. Sea $a > 0$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

△Consideremos $a > 1$, para otros a véase 8.26. Designemos $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$, entonces, $\alpha_n > 0$ y $a = (1 + \alpha_n)^n \geqslant n\alpha_n$ (según la desigualdad de Bernoulli, § 2), $0 < \alpha_n \leqslant a/n$ para cualquier n. Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, en tanto que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1+\alpha_n) = 1. \ ▲$$

Ejemplo 10. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

△ Designemos $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$, entonces $\alpha_n \geqslant 0$ y $n = (1+\alpha_n)^n \geqslant \geqslant \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$ con $n \geqslant 2$ (véase § 4). Como $n-1 \geqslant n/2$ con $n \geqslant 2$,

$n \geqslant n^2\alpha_n^2/4$, de donde obtenemos $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 2/\sqrt{n}$. Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1+\alpha_n) = 1. \ \blacktriangle$$

En los dos siguientes ejemplos se da la comparación de la velocidad de crecimiento de tres sucesiones crecientes $\{a^n\}$, $\{n\}$ y $\{\log_a n\}$, donde $a > 1$.

Ejemplo 11. Sea $a > 1$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} (n/a^n) = 0.$$

$\triangle$ Como $a-1>0$,

$$a^n = (1+a-1)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \geqslant \frac{n^2}{4}(a-1)^2 \text{ para todo } n \geqslant 2.$$

De aquí se desprende que

$$0 \leqslant n/a^n \leqslant 4/n(a-1)^2.$$

Ya que

$$\lim_{n\to\infty} (4/n(a-1)^2) = 0,$$

asimismo

$$\lim_{n\to\infty} (n/a^n) = 0. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 12. Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

$\triangle$ Examinemos $a > 1$, para otros a véase 8.31. Para la demostración utilicemos la definición de límite y el resultado del anterior ejemplo.

Sea $\varepsilon > 0$. Sobre el conjunto de números naturales n, la desigualdad

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$$

es equivalente a la desigualdad $n < (a^\varepsilon)^n$. Como $a^\varepsilon > 1$, tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(a^\varepsilon)^n} = 0$, por lo que existe tal N natural que para todo $n \geqslant N$

$$\frac{n}{(a^\varepsilon)^n} < 1,$$

es decir, $n < a^{\varepsilon n}$. De aquí se desprende que para todo $n \geqslant N$

$$0 \leqslant \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$

lo que significa que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0. \ \blacktriangle$$

Así, pues, de las tres sucesiones $\{a^n\}$, $\{n\}$, $\{\log_a n\}$, $a > 1$, la primera crece con rapidez notoriamente mayor que las otras dos, mientras que la tercera, con la mayor lentitud.

Ejemplo 13. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

$\triangle$ Si $k \geqslant 4$, $2/k \leqslant 1/2$, por lo que con $n \geqslant 4$

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2\ldots 2}{4\ldots n} \leqslant \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, asimismo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. $\blacktriangle$

8.24. Hallen

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1983}{n}\right)^n$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$ (a es un número arbitrario).

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n$. 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n$ (véase el problema 8.3).

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

8.25. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si:

1) $x_n = \sqrt{9+\frac{1}{n}}$. 2) $x_n = \left(8-\frac{1}{n^2}\right)^{-1/3}$.

3) $x_n = \sqrt[3]{\frac{n+0{,}25}{8n+1}}$. 4) $x_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$.

5) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$.

6) $x_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+2}$. 7) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$.

8) $x_n = \sqrt{n^2-1} - n - 1$. 9) $x_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$.

10) $x_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2} - n$. 11) $x_n = \frac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - 1\right)$.

8.26. Sea $0 < a \leqslant 1$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

8.27. Hallen $\lim_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\sqrt[3n]{8}$. 2) $\sqrt[2n]{0,5}$. 3) $\sqrt[n^2]{6}$. 4) $\dfrac{\sqrt[n]{10}-2}{1+\sqrt[n]{0,01}}$.

5) $\sqrt[n]{2+\dfrac{1}{n}}$. 6) $\sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n+5}}$. 7) $\sqrt[n]{\dfrac{2n+5}{n-0,5}}$.

8) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$. 9) $\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{9}-1}$. 10) $\dfrac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

11) $4^{(n+2)/(n+1)}$. 12) $(1+11^n)^{1/(n+2)}$.

13) $a^{1/(n+p)}$, donde $a>0$, $p>0$.

8.28. Hallen $\lim_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\sqrt[n]{n^2}$. 2) $\sqrt[n]{5n}$. 3) $\sqrt[2n]{2n}$. 4) $\sqrt[4n]{n}$. 5) $\sqrt[n]{n}$.

6) $\sqrt[n]{n+3}$. 7) $\dfrac{1+\sqrt[n]{2}}{1+\sqrt[n]{2n}}$. 8) $\dfrac{\sqrt[n]{n^3}+\sqrt[n]{7}}{3\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{3n}}$.

9) $\sqrt[n]{3n-2}$. 10) $\sqrt[n]{n^3+3n}$. 11) $\sqrt[n]{\dfrac{2n^2-5n+3}{n^5+1}}$.

8.29. Demuestren que

1) $\lim_{n\to\infty} nq^n=0$, donde $|q|<1$.

2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{5^n}=0$. 3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{3^n}=0$.

4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n}=0$, donde $|a|>1$, k es un número natural.

8.30. Hallen $\lim_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\dfrac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}$. 2) $\dfrac{n^{10}-1}{1+n\cdot 1,1^n}$. 3) $\sqrt[n]{3^n+n\cdot 2^n}$.

4) $\sqrt{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$. 5) $\sqrt[n]{\dfrac{10}{n}-\dfrac{1}{1,2^n}}$.

8.31. Sea $0<a<1$. Demuestren que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n}=0.$$

8.32. Hallen $\lim_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\dfrac{n\log n}{n^2-1}$. 2) $\dfrac{5n+\log n}{n-3,5}$. 3) $\dfrac{\log_2(n+3)}{n-1,3}$.

4) $\dfrac{\log_5(n^2+1)}{n}$. 5) $\dfrac{n-\log n}{\log_2(4^n+1)}$.

8.33. Demuestren que para cualquier a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}=0.$$

8.34. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\frac{(-2)^n}{(n+2)!}$. 2) $\frac{1}{(0,3)^n\, n!}$. 3) $\frac{n\cdot 3^n+1}{n!+1}$.

4) $\frac{4^n+n^2\cdot 2^n-1}{n^4+(n!)^2}$. 5) $\frac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!}$. 6) $\frac{(-3)^{n^2-n}}{(n^2)!}$.

7) $\frac{2^{n/2}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$.

---

4. Sucesiones infinitamente grandes.

Definición 3. La sucesión $\{x_n\}$ se llama *infinitamente grande* si para cada $\varepsilon>0$ existe semejante N natural que para todo $n\geqslant N$ es cierta la desigualdad

$$|x_n|>\varepsilon.$$

En este caso se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty.$$

La sucesión $\{x_n\}$ tiene límite $+\infty$ (correspondientemente $-\infty$) si para cada $\varepsilon>0$ existe tal N natural que para todo $n\geqslant N$ existe la desigualdad $x_n>\varepsilon$ (correspondientemente $x_n<-\varepsilon$). Esto se anota así:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty \text{ (correspondientemente } \lim_{n\to\infty} x_n=-\infty).$$

En todos los casos indicados suele decirse que la sucesión tiene *límite infinito*.

En el sentido de la definición 1, toda sucesión infinitamente grande es divergente.

Ejemplo 14. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

△ Sea ε un número positivo tomado al azar y N, tal número natural que $N>\varepsilon^2$ *). Entonces, para cualquier $n\geqslant N$ será cierta la desigualdad $\sqrt{n}\geqslant\sqrt{N}>\varepsilon$. Esto quiere decir que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=$ $=+\infty$. ▲

8.35. Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(5-0,5n)=-\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n=\infty$. 4) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=\infty$, donde $|a|>1$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n-100}=+\infty$.

*) P. ej., $N=E(\varepsilon^2)+1$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/p} = +\infty$, donde $p\in\mathbb{N}$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \log n = +\infty$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = +\infty$, donde $a>1$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = -\infty$, donde $0<a<1$.

8.36. Demuestren que para que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ es necesario y suficiente que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

8.37. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$) y para todo n, a partir de cierto de ellos, $x_n \geqslant cy_n$ (respectivamente $x_n \leqslant cy_n$), donde $c>0$. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (respectivamente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

8.38. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ y para todo n, a partir de cierto de ellos, $|x_n| \geqslant cy_n$, donde $c>0$. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

8.39. Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$, donde $p\geqslant 1$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n-5)^5 = +\infty$. 4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log n)^3 = +\infty$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log_a n)^p = +\infty$, donde $a>1$, $p\geqslant 1$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}5-(-1)^n \sqrt[3]{n}) = \infty$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n)^n = \infty$. 8) $\lim\limits_{n\to\infty} (4\sqrt{n}-n) = -\infty$.

8.40. 1) Sean $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty.$$

2) Sean $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

8.41. Demuestren que $\{x_n\}$ es una sucesión infinitamente grande si x_n es igual a:

1) $\left(\frac{n}{10}\right)^n$. 2) $\frac{n^2}{n+8}$. 3) $\frac{n!}{4^n}$. 4) $\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

5) $\frac{2}{1-\sqrt[n]{n}}$. 6) $\frac{5^n}{n^2}$, 7) $\frac{a^n}{n^k}$, donde $|a|>1$, $k\in\mathbb{N}$.

8.42. 1) Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e $y_n \geqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

2) Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ e $y_n \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$.

8.43. 1) Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, donde a es $+\infty$ o bien $-\infty$. Demuestren que

a) Si para cualquier n, a partir de cierto de ellos, $y_n \geqslant c > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = a$.

b) Si para cualquier n, a partir de cierto de ellos, $y_n \leqslant c < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -a$.

2) Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ y para todo n, a partir de cierto de ellos, $|y_n| \geqslant c > 0$. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

8.44. Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{n} - n\right) = -\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log n + 2\cos \pi n) = +\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n+1} = +\infty$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (an+b) = +\infty$ con $a > 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} (an+b) = -\infty$ con $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4 - 100n}{n^2 + 100} = +\infty$. 6) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n}) = +\infty$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n^2-1} - n)} = -\infty$.

8.45. Con ayuda de los símbolos $\forall$, $\exists$ escriban la definición de que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

8.46. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones:
1) Toda sucesión infinitamente grande es no acotada?
2) Toda sucesión no acotada es infinitamente grande?

8.47. Enuncien en forma positiva las afirmaciones: una sucesión: 1) no tiende al ∞; 2) no tiende al $+\infty$; 3) no tiende al $-\infty$.

8.48. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ es no acotada, pero no tiende al ∞ si:

1) $x_n = n^2 \cos(\pi n/2)$. 2) $x_n = n^{(-1)^n}$.

3) $x_n = \frac{n}{1 + n \operatorname{sen}(\pi n/2)}$, $n \in \mathbb{N}$.

---

5. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Límite parcial.

Teorema. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, donde a es un número o bien uno de los infinitos $+\infty$, $-\infty$, cualquier subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite (finito o infinito) y

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Teorema de Bolzano — Weierstrass. Cualquier sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Definición 4. Si $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ y $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, donde a es un número o bien uno de los infinitos $+\infty$, $-\infty$, a recibe el nombre de *límite parcial de la sucesión* $\{x_n\}$.

Ejemplo 15. Demuestren que toda sucesión no acotada tiene límite parcial igual a $+\infty$ o bien a $-\infty$.

$\triangle$Una sucesión no acotada lo es, obligatoriamente, superior o bien inferiormente.

Sea la sucesión $\{x_n\}$ no acotada inferiormente. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ habrá tal término x_n de la sucesión que $x_n < -\varepsilon$. Para $\varepsilon = 1$ habrá tal término x_{n_1} de la sucesión que $x_{n_1} < -1$, que tomaremos como primer término de la subsucesión. Entre el número finito de los términos de la sucesión, con números desde 1 hasta n_1 hay uno que es el más pequeño y que designaremos con m_1. Tomemos ahora $\varepsilon = 2$. Del hecho que la sucesión es no acotada inferiormente se desprende que habrá tal término x_{n_2} que $x_{n_2} < -2$ y $x_{n_2} < m_1$. Esto último, debido a la elección de m_1, significa que $n_2 > n_1$. Tomemos x_{n_2} como segundo término de la subsucesión. De modo análogo hallaremos los miembros de la subsucesión x_{n_3}, etc.

Demostremos que semejante proceso no cesará. Supongamos que hemos hallado el término x_{n_k}, $k \geqslant 2$ de la subsucesión, que satisface la desigualdad $x_{n_k} < -k$. Designemos con m_k el más pequeño entre los términos de la sucesión desde x_1 hasta x_{n_k}. Tomemos $\varepsilon = k + 1$. Debido a la no acotación inferior, habrá tal término de la sucesión $x_{n_{k+1}}$ que $x_{n_{k+1}} < -(k+1)$ y $x_{n_{k+1}} < m_k$. De esto último se deduce que $n_{k+1} > n_k$ y, por ello, $x_{n_{k+1}}$ se puede tomar como el término $(k+1)$-ésimo de la subsucesión.

Así, pues, existe semejante subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que $x_{n_k} < -k$ para cualquier k y, por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty.$$

De forma análoga se demuestra que una sucesión no acotada superiormente, tiene una subsucesión cuyo límite es $+\infty$.▲

Sea L el conjunto de todos los límites parciales de la sucesión $\{x_n\}$ (junto con los números L ella puede contener tanto $+\infty$ como $-\infty$). Para cualquier sucesión el conjunto L no es vacío.

El *límite superior de la sucesión* $\{x_n\}$ se denomina $\sup L$ y se designa con $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, es decir, por definición

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup L;$$

por analogía se define el *límite inferior de una sucesión*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf L.$$

P. ej., si $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $L = \{+\infty\}$ y, por consiguiente,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty.$$

Ejemplo 16. Para la sucesión

$$x_n = \frac{(3\cos(\pi n/2) - 1)\, n + 1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

hallen el conjunto de límites parciales, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, así como $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$.

△ Con $n = 4k$, tenemos

$$x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$$

y, por lo tanto, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k} = 2$, $2 < x_{4k} \leqslant 2 + \frac{1}{4}$, con la particularidad de que $x_4 = 9/4$. Con $n = 4k+1$ o bien $n = 4k+3$, tenemos

$$x_n = \frac{-n+1}{n} = -1 + \frac{1}{n}$$

y, por consiguiente, $-1 < x_n < 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+3} = -1$. Con $n = 4k+2$, tenemos

$$x_n = \frac{-4n+1}{n} = -4 + \frac{1}{n},$$

es decir, $-4 < x_n < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k+2} = -4$.

Así, pues, los números 2, -1, -4 son los límites parciales de la sucesión dada. Las cuatro subsucesiones $\{x_{4k}\}$, $\{x_{4k+1}\}$, $\{x_{4k+2}\}$, $\{x_{4k+3}\}$ consideradas, en conjunto, constituyen toda la sucesión dada. De aquí se desprende que la sucesión examinada no tiene otros límites parciales.

Es evidente que

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 2, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -4.$$

De las anteriores consideraciones asimismo se deduce que

$$\sup\{x_n\} = 9/4, \quad \inf\{x_n\} = -4. \ \blacktriangle$$

8.49. Indiquen una subsucesión convergente de la sucesión $\{x_n\}$ si x_n es igual a:

1) $(-1)^n$. 2) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right)$. 3) $n^{(-1)^n}$. 4) $n-5E\left(\frac{n-1}{5}\right)$.

8.50. Aduzcan un ejemplo de sucesión que no tenga ninguna subsucesión convergente (hacia un número).

8.51. Aduzcan un ejemplo de una sucesión no acotada que tenga una subsucesión convergente (hacia un número).

8.52. Demuestren que para que a (número, $+\infty$ o bien $-\infty$) sea el límite parcial de una sucesión, es necesario y suficiente que cualquier entorno de a contenga un número infinitamente grande de términos de la sucesión.

8.53. Hallen todos los límites parciales de la sucesión $\{x_n\}$ si x_n es igual a:

1) $\frac{(-1)^n}{n+1}$. 2) $\frac{n^2}{n+5}$. 3) $\frac{1-n^2}{1+n^2}$. 4) $(-1)^n$.

5) $3^{(-1)^n n}$. 6) $\operatorname{sen}(\pi n/4)$. 7) $n\cos(\pi n/2)$.

8.54. En la sucesión $\{x_n\}$ la subsucesión $\{x_{2k}\}$ tiene límite a, mientras que la subsucesión $\{x_{2k-1}\}$ tiene límite b (a, b son números o bien $+\infty$, $-\infty$). Demuestren que sólo a y b son límites parciales de la subsucesión $\{x_n\}$.

8.55. Demuestren que cualquier sucesión monótona sólo tiene un límite parcial.

8.56. Hallen para la sucesión $\{x_n\}$ el conjunto de límites parciales $\varlimsup_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf_{n\to\infty} x_n$ si:

1) $x_n = \cos(\pi n/3)$. 2) $x_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$.

3) $x_n = (1{,}5\cos(2\pi n/3))^n$.

4) $\{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{2}{10^2}, \ldots \right.$

$$\left. \ldots, \frac{99}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \frac{2}{10^n}, \ldots, \frac{10^n-1}{10^n}, \ldots \right\}.$$

8.57. Para la sucesión $\{x_n\}$ hallen $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, así como $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$ si x_n es igual a:

1) $\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$. 2) $(-1)^n\frac{3n-1}{n+2}$.

3) $\frac{n^2 \operatorname{sen}(\pi n/2)+1}{n+1}$. 4) $\frac{((-1)^n-1)\,n^2+n+1}{n}$.

5) $\frac{(1+\cos \pi n)\,n+\log n}{\log 2n}$.

6. Sucesiones fundamentales. Criterio de Cauchy.

Definición 5. La sucesión $\{x_n\}$ recibe el nombre de *fundamental* si ella satisface la *condición de Cauchy*: para cada $\varepsilon>0$ existe tal número natural N para cualquier $n\geqslant N$ y cualquier $m\geqslant N$ es cierta la desigualdad

$$|x_n-x_m|<\varepsilon.$$

Con brevedad esto se anota así:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N\,\forall\ n\geqslant N\,\forall m\geqslant N:\ |x_n-x_m|<\varepsilon.$$

La condición de Cauchy también se enuncia del siguiente modo: para cada $\varepsilon>0$ existe semejante número natural N que para cualquier $n\geqslant N$ y para cualquier p natural es cierta la desigualdad

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.$$

Teorema (*criterio de Cauchy*). Con el fin de que una sucesión tenga límite finito es necesario y suficiente que ella sea fundamental.

Ejemplo 17. Demuestren que la sucesión

$$x_n=\frac{\cos 1}{3}+\frac{\cos 2}{3^2}+\ldots+\frac{\cos n}{3^n},\quad n\in\mathbb{N}$$

converge.

△ Estimemos el módulo de la diferencia

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}}+\ldots+\frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{3^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{3^{n+p}}=\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^p}}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{2\cdot 3^n}<\frac{1}{3^n}.$$

Sea ε un número positivo tomado al azar. Como $\lim\limits_{n\to\infty}(1/3^n)=0$, para dicho ε existe tal N que para cualquier $n\geqslant N$ se cumple

la desigualdad $1/3^n < \varepsilon$. De modo que si $n \geqslant N$ y p es un número natural arbitrario, entonces

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Así, pues, la condición de Cauchy se cumple, por lo que la sucesión dada converge. ▲

Del criterio de Cauchy se deduce que para que una sucesión no tenga límite finito, es necesario y suficiente que ella no satisfaga la condición de Cauchy, con otras palabras, satisfaga la *negación de la condición de Cauchy*: existe semejante $\varepsilon > 0$ que para cualquier N natural habrá $n \geqslant N$ y $m \geqslant N$ tales que

$$|x_n - x_m| \geqslant \varepsilon;$$

más brevemente

$$\exists \varepsilon \forall N \exists n \geqslant N \exists m \geqslant N: \ |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon.$$

Ejemplo 18. Demuestren que la sucesión

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

diverge.

△ Estimemos la diferencia

$$x_{n+p} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}.$$

Si aquí tomamos $p = n$, obtendremos

$$x_{2n} - x_n \geqslant n/(n+n) = 1/2, \ n \in \mathbb{N}.$$

De aquí se deduce que la sucesión dada satisface la negación de la condición de Cauchy. Precisamente, con $\varepsilon = 1/2$ para cualquier N natural tomamos $n = N$, $m = 2N$ y, entonces, tendremos

$$|x_{2N} - x_N| = x_{2N} - x_N \geqslant 1/2.$$

Esto significa, que la sucesión dada no tiene límite finito, o sea, diverge. ▲

8.58. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ es fundamental si:
1) $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. 2) $x_n = \frac{n+1}{3n-2}$, $n \in \mathbb{N}$.
3) $x_n = 0{,}\underbrace{77\ldots7}_{n \text{ cifras}}$, $n \in \mathbb{N}$.

4) $x_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$, donde $|q| < 1$, $n \in \mathbb{N}$.

5) $\{x_n\} = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots \right.$

$$\left. \ldots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots \right\}.$$

6) $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1}/n!$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

8.59. Sean a_0 un número entero no negativo, $\{a_n\}$ una sucesión, cuyos términos son cifras. Consideremos una sucesión de fracciones finitas decimales $x_n = a_0, a_1a_2 \ldots a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que esta sucesión es fundamental.

8.60. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ converge si x_n es igual a:

1) $\frac{\operatorname{sen} a}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2a}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3a}{2^3} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} na}{2^n}$, $a \in \mathbb{R}$.

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k q^k$, donde $|q| < 1$, $|a_k| \leqslant C$, $k \in \mathbb{N}$.

3) $1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. 4) $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

8.61. Demuestren que una sucesión fundamental es acotada.

8.62. Demuestren que en una sucesión fundamental cualquier subsucesión también lo es.

8.63. Demuestren que para que la sucesión $\{x_n\}$ sea fundamental, es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N: \ |x_n - x_N| < \varepsilon.$$

8.64. Haciendo uso de la negación de la condición de Cauchy demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ diverge si x_n es igual a:

1) $0{,}2^{(-1)^n n}$. 2) $\frac{n \cos \pi n - 1}{2n}$. 3) $(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

4) $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$. 5) $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}$.

7. Sucesiones monótonas. Número *e*.

Teorema de Weierstrass. Si una sucesión es monótona, a partir de cierto número, y acotada, ella tiene límite finito.

En particular, toda sucesión monótona acotada tiene límite finito.

Ejemplo 19. Demuestren que la sucesión

$$x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}\text{*)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

tiene límite y hállenlo.

*) $(2n + 1)!!$ es el producto de los números impares desde 1 hasta $2n + 1$, inclusive.

△Compongamos la razón

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)!\cdot(2n+1)!!}{(2n+3)!!\cdot n!}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

Ya que $(n+1)/(2n+3)<1/2$ para cualquier $n\geqslant 1$, $x_{n+1}<$ $<\frac{1}{2}x_n<x_n$. Es decir, la sucesión es decreciente. Es evidente que para todo $n\geqslant 1$ se cumplen las desigualdades $0<x_n\leqslant x_1=1/3$, o sea, la sucesión es acotada. De aquí se desprende que ella converge.

Designemos $c=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. La sucesión $\{x_{n+1}\}$ es una subsucesión de la sucesión dada, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=c$. Pasando ahora al límite de la igualdad $x_{n+1}=x_n\cdot\frac{n+1}{2n+3}$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\cdot\lim_{n\to\infty} x_n,$$

de donde $c=\frac{1}{2}c$, $c=0$. Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. ▲

Ejemplo 20. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$, donde $x_1=0$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$, $n\in\mathbb{N}$, tiene límite y hállenlo.

△En el ejemplo 26, 1) § 7 fue demostrado que la sucesión dada estrictamente crece. Demostremos que es acotada. Es evidente, que para cualquier $n\in\mathbb{N}$

$$x_n\geqslant 0 \text{ y } x_n^2<x_{n+1}^2=6+x_n,$$

es decir,

$$x_n^2-x_n-6<0,$$

de donde $x_n<3$.

Así, pues, $\{x_n\}$ es una sucesión acotada creciente y, por consiguiente, existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$. Indiquemos que $c>0$.

Pasando al límite en la igualdad $x_{n+1}^2=6+x_n$ y, tomando en consideración que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=c$, obtenemos $c^2=6+c$, de donde hallamos $c=3$. Esto quiere decir que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$. ▲

Un importante ejemplo de sucesión creciente es la siguiente

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad n\in\mathbb{N},$$

$x_{n+1}>x_n$, $2\leqslant x_n<3$. El límite de esta sucesión es un número irracional que se designa con e, es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Señalemos que $e=2{,}718281828459045\ \ldots$

Ejemplo 21. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k, \text{ donde } k\in\mathbb{N},\ k\geqslant 2.$$

△ Es evidente que $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n>0$ y que de la desigualdad

$$1+\frac{k}{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^k, \quad n\in\mathbb{N}$$

se desprende que

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn}<e^k.$$

Esto significa que la sucesión dada es acotada.

Designemos el término general de la sucesión con x_n y analicemos la razón

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{k}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}=\left(\frac{1+\frac{k}{n+1}}{1+\frac{k}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{k}{n}\right)=$$

$$=\left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1}\frac{n+k}{n}.$$

Como $(n+1)(n+k)=n(n+k+1)+k$, entonces

$$\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}=\frac{(n+1)(n+k)-k}{(n+1)(n+k)}=1-\frac{k}{(n+1)(n+k)}.$$

De acuerdo con la desigualdad de Bernoulli

$$\left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{k}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1}>1-\frac{k}{n+k}=\frac{n}{n+k}.$$

Tomando esto en consideración, obtenemos

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1}\frac{n+k}{n}>\frac{n}{n+k}\cdot\frac{n+k}{n}=1,$$

es decir, $x_{n+1}>x_n$ y, por ello, $\{x_n\}$ es una sucesión creciente De lo demostrado se deduce que existe $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Examinemos la subsucesión $x_{pk}=\left(\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\right)^k$ con $n=pk$, $p\in\mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p=e$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{pk}=e^k$. Esto significa que, asimismo

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{p\to\infty}x_{pk}=e^k. \ ▲$$

8.65. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ converge y hallen su límite si x_n es igual a:

1) $\frac{n^2}{10^n}$. 2) $\frac{2^n}{n!}$.

2) $x_1=8,\ x_2=\frac{8}{1}\cdot\frac{11}{7},\ \ldots,\ x_n=\frac{8}{1}\cdot\frac{11}{7}\ \ldots\ \frac{3n+5}{6n-5},\ \ldots$

8.66. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ converge si x_n es igual a:

1) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ *). 2) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}$.

3) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

8.67. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite y hállenlo si:

1) $x_1=13,\ x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$.

2) $x_1=\sqrt[k]{5},\ x_{n+1}=\sqrt[k]{5x_n}$, donde $k\in\mathbb{N}$.

3) $x_1=\sqrt[k]{a},\ x_{n+1}=\sqrt{ax_n}$, donde $k\in\mathbb{N}$, $a>0$.

4) $x_{n+1}=\frac{4}{3}x_n-x_n^2$; a) $x_1=1/6$; b) $x_1=1/2$; c) $x_1=7/6$.

5) $x_1=1,\ x_{n+1}=1+1/x_n,\ n\in\mathbb{N}$. (*Indicación*: consideren las subsucesiones $\{x_{2k}\}$ y $\{x_{2k-1}\}$.)

8.68. Demuestren que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ decrece monótonamente y que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

8.69. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, donde x_n es igual a:

1) $\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n$, $k\in\mathbb{N}$. 2) $\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$. 3) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

4) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$. 5) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$. 6) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

8.70. Sea $\{k_n\}$ una sucesión de números naturales, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n= +\infty$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=e.$$

---

*) $(2n)!!$ es el producto de todos los números pares desde 2 hasta $2n$ inclusive.

8.71. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0.$$

(*Indicación:* demuestren que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}.$)

8.72. La sucesión $\{x_n\}$ es convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Demuestren que también converge la sucesión $\{|x_n|\}$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

8.73. Aduzcan un ejemplo de la sucesión divergente $\{x_n\}$ para la que la sucesión $\{|x_n|\}$ converge.

8.74. Aduzcan un ejemplo de semejante sucesión $\{x_n\}$ que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ y de dos sucesiones $\{\text{sign } x_n\}$, $\{(\text{sign } x_n)^2\}$: 1) las dos convergen; 2) las dos divergen; 3) la primera diverge, la segunda converge.

8.75. Aduzcan un ejemplo de tal sucesión $\{x_n\}$ que:

1) $x_n > -1$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

2) $x_n < 2$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

3) $x_n > 100$ para $n = 1, 2, \ldots, 100$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$ y para cualquier N habrá $n \geqslant N$ y $m \geqslant N$ tales que $x_n < 5$ y $x_m > 5$.

8.76. Aduzcan un ejemplo de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que:

1) $x_n < y_n$ para cualquier $n\in\mathbb{N}$, pero que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2) $x_n > y_n$ para $n = 1, 2, \ldots, 1000$, pero que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3) $x_n/y_n \geqslant 1000$ para cualquier $n\in\mathbb{N}$, pero que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

8.77. Aduzcan un ejemplo de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que tengan un mismo conjunto de valores y tales que:

1) $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen, pero que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2) $\{x_n\}$ converge e $\{y_n\}$ diverge.

8.78. Las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Los conjuntos de valores de estas sucesiones coinciden. Demuestren que dichos conjuntos son finitos.

8.79. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $m_n = \inf\limits_{k\geqslant n} \{x_k\}$, $M_n = \sup\limits_{k\geqslant n} \{x_k\}$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = x.$$

8.80. En la sucesión $\{x_n\}$ las subsucesiones $\{x_{2k}\}$ y $\{x_{2k-1}\}$ tienen un mismo límite. Demuestren que, asimismo, la propia sucesión converge hacia ese mismo límite.

8.81. La sucesión $\{x_n\}$ es tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = b$, $a \neq b$. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ diverge.

8.82. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ diverge si x_n es igual a:

1) $\log_a (2+(-1)^{n^2})$, $a > 0$, $a \neq 1$.

2) $\arcsen \frac{(-1)^n n}{n+1}$. 3) $\frac{2^{n+1}-(-3)^n}{(-2)^n+3^{n+1}}$.

8.83. Demuestren que la sucesión:

1) $x_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k$, $n \in \mathbb{N}$ converge.

2) $x_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k$, $n \in \mathbb{N}$ diverge.

8.84. Demuestren que si $x_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$.

8.85. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 0$.

8.86. Demuestren que una sucesión convergente alcanza por lo menos una de sus cotas: la superior o inferior.

8.87. Aduzcan un ejemplo de la sucesión $\{x_n\}$ que satisfaga la condición

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N: \quad x_n < \varepsilon$$

y que sea tal que: 1) ella no tiene límite; 2) ella tiene límite. ¿Puede ser ese límite igual a 1?

8.88. Enuncien en el lenguaje «$\varepsilon - N$» la negación de que $\{x_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña y anótenla haciendo uso de los símbolos $\exists$, $\forall$.

8.89. ¿Es el número a obligatoriamente el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si: 1) existe semejante número natural N que para cualquier $\varepsilon > 0$ y para todo $n \geqslant N$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$; 2) para cualquier $\varepsilon > 0$ existen tales números naturales N y $n \geqslant N$ que $|x_n - a| < \varepsilon$?

8.90. Sean $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Demuestren que:

1) $\forall N \exists n_0 \geqslant N \forall n > n_0$: $x_n < x_{n_0}$.

2) $\forall N \exists n_0 \geqslant N \forall n$ $(1 \leqslant n < n_0)$: $x_n > x_{n_0}$.

8.91. Sea K el conjunto de todas las sucesiones convergentes y $K_1, K_2, \ldots, K_8$, los conjuntos de todas las sucesiones que satisfacen, respectivamente, las condiciones:

1) $\exists \varepsilon > 0 \exists N \exists n \geqslant N$: $|x_n| < \varepsilon$.

2) $\exists \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N$: $|x_n| < \varepsilon$.

3) $\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N$: $|x_n| < \varepsilon$.

4) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \exists n \geqslant N$: $|x_n| < \varepsilon$.

5) $\exists \varepsilon > 0 \forall N \forall n \geqslant N$: $|x_n| < \varepsilon$.

6) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N$: $|x_n| < \varepsilon$.

7) $\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N$: $|x_n| < \varepsilon$.

8) $\forall \varepsilon > 0 \forall N \forall n \geqslant N$: $|x_n| < \varepsilon$.

1) ¿Cuáles de las siguientes inclusiones son ciertas:
a) $K_6 \subset K_2$; b) $K_2 \subset K_6$; c) $K_7 \subset K_2$; d) $K_8 \subset K$; e) $K \subset K_8$?

2) ¿Para qué $j = 1, 2, \ldots, 8$ es cierta la inclusión $K_j \subset K$?

3) ¿Cuáles de los conjuntos K_j $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ contienen sucesiones tanto convergentes como divergentes?

4) ¿Cuáles de los conjuntos K_j $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ contienen sucesiones no acotadas?

5) ¿Cuál de las condiciones 1—8 satisface cualquier sucesión?

6) ¿Cuáles de los conjuntos K_j $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ coinciden?

8.92. Demuestren que si la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \exists N \forall n \geqslant N: \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$

$\{x_n\}$ es una sucesión convergente. Demuestren que también es cierto lo inverso.

8.93. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ diverge cuando y sólo cuando

$$\exists \varepsilon > 0 \forall a \forall N \exists n \geqslant N: \quad |x_n - a| \geqslant \varepsilon$$

(comparen esta anotación con la definición de sucesión divergente, pág. 195).

8.94. La sucesión $\{y_k\}$ se ha obtenido permutando los términos de la sucesión $\{x_n\}$, es decir, para cualquier n existe tal k_n que $x_n = y_{k_n}$, con la particularidad de que si $n_1 \neq n_2$, $k_{n_1} \neq k_{n_2}$ y a la inversa, para todo k existe tal n_k que $y_k = x_{n_k}$ y, con ello, si $k_1 \neq k_2$, $n_{k_1} \neq n_{k_2}$. Demuestren que:

1) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, asimismo $\lim_{k\to\infty} y_k = a$.

2) Si $\{x_n\}$ diverge, asimismo diverge $\{y_k\}$.

8.95. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si x_n es igual a:

1) $\frac{n!}{n^n}$. 2) $\frac{n^2-4}{n^4+n^2-1}$. 3) $\frac{n \operatorname{sen} n!}{n\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

4) $\frac{n \operatorname{arctg} n}{n^2-2}$. 5) $\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k$. 6) $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{(n-1)/(n+1)}$.

7) $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(1-\sqrt{n})/(1-n)}$. 8) $\left(\frac{2n-1}{5n+1}\right)^{n^2}$.

9) $\left(\frac{3n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{n^2/(1-n)}$. 10) $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

8.96. Sean $a_n \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = q$, donde $q > 1$. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

8.97. Hallen

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$, $a>0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

8.98. La sucesión $\{x_n\}$ tiene el límite finito a. En el plano de coordenadas se han trazado las rectas AA_n por los puntos $A\ (a;\ a^2)$ y $A_n\ (x_n;\ x_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Sea a_n la abscisa del punto de intersección de la recta AA_n con el eje Ox. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

8.99. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}$.

2) $\frac{(n^2+3n+4)^3-(n^2+3n-4)^3}{(n^2+5n+6)^3-(n^2+5n-6)^3}$.

3) $\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}$. 4) $n-\frac{3}{\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$.

5) $\frac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{98}-10n^2+1}$. 6) $\frac{\log^2 10n}{\log^2 n}$.

7) $\frac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}$. 8) $\frac{\log(n^2+2n\cos n+1)}{1+\log(n+1)}$.

9) $n^2\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)^q-\left(1+\frac{q}{n}\right)^p\right)$, donde $p,\ q \in \mathbb{N}$.

8.100. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}$. 2) $\frac{a^n}{1+a^n}$, $a\neq-1$.

3) $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$. 4) $\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$, $a\neq 0$.

8.101. En un círculo de radio R está inscrito un cuadrado, en él está inscrito un nuevo círculo, en éste un nuevo cuadrado, etc. Sea S_1 el área del primer círculo (inicial), S_2, la del segundo círculo, etc., σ_1 es el área del primer cuadrado, σ_2, la del segundo cuadrado, etc. Hallen

$$\lim_{n\to\infty}(S_1+S_2+\ldots+S_n),\ \lim_{n\to\infty}(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n).$$

8.102. Hallen:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

8.103. Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética con razón $d\neq 0$. Hallen

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}\right)$, si $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots\right.$

$\left.\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right)$, si $a_n>0$, $n\in\mathbb{N}$.

8.104. Sea a una cifra, $a\neq 0$. Hallen

$$\lim_{n\to\infty} 10^{-n}(a+aa+\ldots+\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ cifras}}).$$

8.105. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_k, a_1, a_2, \ldots, a_k$ números positivos. ¿Existirá

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\ldots+p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\ldots+p_ka_k^n}\ ?$$

Si existe hallen dicho límite.

8.106. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$. 2) $\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n-1}$.

3) $\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}$.

4) $\sqrt[3]{n^3+n^2+1984}-n$.

5) $n^{3/2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})$.

6) $\frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}-1\right)$.

8.107. ¿Con cuáles a la sucesión

$$x_n=\sqrt{an^2+bn+2}-n,\ n\in\mathbb{N},$$

tiene límite? ¿A qué es igual éste?

8.108. Hallen

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a_1)(n+a_2)}-n)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)}-n)$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\ \ldots\ (n+a_p)}-n)$, $p\in\mathbb{N}$.

8.109. Sea $x_n=(n+1)^\alpha-n^\alpha$, $n\in\mathbb{N}$. Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ con $0<\alpha<1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ con $\alpha>1$.

8.110. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)}$. 2) $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

3) $\frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$. 4) $\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}-n-1}$.

5) $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$. 6) $\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}$.

7) $\frac{\sqrt[4]{n^2+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$.

8.111. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\frac{n^2+3n-2}{1+2+\ldots+n}$. 2) $\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$.

3) $\frac{1-2+3-\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$. 4) $\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

5) $\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$.

6) $\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}$. 7) $\frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$.

8) $\frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$.

8.112. Demuestren que la sucesión

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{n^3},\quad n\in\mathbb{N},$$

tiene límite y hállenlo.

8.113. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si:

1) $x_n=\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

2) $x_1=1$, $x_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

8.114. Sean $x_n\neq 1$, $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$. Hallen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+x_n^2+\ldots+x_n^k-k}{x_n-1},\quad k\in\mathbb{N}.$$

8.115. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

8.116. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

1) Si $a_n^2\to a^2$, $a_n\to a$.

2) Si $a_n^3\to a^3$, $a_n\to a$.

8.117. Aduzcan ejemplos de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ y

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ no existe.

8.118. Se sabe que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$. ¿Se desprende de aquí que

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$;

2) por lo menos una de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tiende a cero?

8.119. Aduzcan ejemplos de las sucesiones divergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ para las que converge la sucesión:

1) $\{x_n + y_n\}$; 2) $\{x_n y_n\}$; 3) $\{x_n/y_n\}$.

8.120. La sucesión $\{x_n\}$ converge, en tanto que la $\{y_n\}$ diverge. Demuestren que con $b \neq 0$ la sucesión $\{ax_n + by_n\}$ diverge.

8.121. La sucesión $\{x_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x \neq 0$, la sucesión $\{y_n\}$ diverge. Demuestren que la sucesión $\{x_n y_n\}$ no converge.

8.122. Aduzcan un ejemplo de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que $\{x_n\}$ converge, $\{y_n\}$ diverge, mientras que $\{x_n y_n\}$ converge.

8.123. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

1) ¿Existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

2) Demuestren que si dicho límite existe y es igual a q, entonces $|q| \leqslant 1$.

3) ¿Puede ser la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ no acotada?

8.124. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\sqrt[n]{3^n - 2^n}$. 2) $\sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^3-2}}$.

3) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a > 0$, $b > 0$. 4) $\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$.

5) $\frac{3\sqrt[n]{16} - 4\sqrt[n]{8} + 1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2}$. 6) $\frac{3}{1-\sqrt[n]{8}} - \frac{5}{1-\sqrt[n]{32}}$.

7) $\frac{\sqrt[n]{a^m}-1}{\sqrt[n]{a^k}-1}$, $a > 1$, k, $m \in \mathbb{N}$.

8.125. Hallen:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

8.126. Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/\sqrt{n}} = 1$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/\sqrt{n}} = 1$, $a > 0$.

8.127. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $a > 0$. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.

8.128. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_k, a_1, a_2, \ldots, a_k$ números positivos. ¿Existe

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \ldots + p_k a_k^n}?$$

Si existe hallen este límite.

8.129. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\sqrt[3n]{n}$. 2) n^{p/n^k}, $p,\ k\in\mathbb{N}$.

3) $\sqrt[n]{n+a}$. 4) $\sqrt[n]{an+b}$.

5) $\sqrt[n]{n^3-3n+1}$. 6) $\sqrt[2n]{n^2-1}$.

7) $\sqrt[n]{2^n n^2+2n-1}$. 8) $\sqrt[n]{\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}}$.

9) $\dfrac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}$. 10) $\sqrt[3n]{\dfrac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$.

11) $\sqrt[n^2]{\dfrac{n-1}{n+1}}+\sqrt[n]{3^n n^3+2}$.

8.130. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+\ldots+b_{q-1}n+b_q}}=1,$$

donde $p,\ q\in\mathbb{N}$, $a_0/b_0>0$.

8.131. Demuestren que si para cualquier $n\in\mathbb{N}$

$$0<\frac{a}{n^k}\leqslant x_n\leqslant bn^p,\quad k,\ p\in\mathbb{N},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1.$$

8.132. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/\sqrt{n}}=1$.

8.133. Demuestren que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{1/x_n}=1$.

8.134. Hallen

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[n]{\log n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

8.135. Sea $|q|<1$,

$$S_n=q+2q^2+3q^3+\ldots+nq^n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Demuestren que existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ y hállenlo.

8.136. Hallen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(5n^2+3n+1)}{\sqrt{n}+1}.$$

8.137. Demuestren que para cualquier $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a x_n}{n^\alpha}=0.$$

8.138. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ y $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Demuestren que para cualquier $a>0$, $a\neq 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a x_n}{x_n}=0.$$

8.139. Aduzcan un ejemplo de sucesión no acotada que no sea infinitamente grande.

8.140. Demuestren que toda subsucesión de una sucesión infinitamente grande es una sucesión infinitamente grande.

8.141. Enuncien en el lenguaje «$\varepsilon - N$» la negación de que $\{x_n\}$ es una sucesión infinitamente grande y anótenla mediante los símbolos $\exists$, $\forall$.

8.142. Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-n+3}{n^2+1}=+\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100}{n^2+100}=+\infty$.

8.143. ¿Con cuáles a la sucesión

$$x_n=\frac{n^4+1}{n^3-2}-\frac{an^3}{5n+2},\quad n\in\mathbb{N}$$

converge hacia 1) $+\infty$; 2) $-\infty$; 3) a un límite finito?

8.144. ¿Con cuáles p y q de $\mathbb{N}$ la sucesión

$$x_n=\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+\ldots+b_{q-1}n+b_q},\quad n\in\mathbb{N},$$

donde $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, tiene: 1) límite finito; 2) límite infinito?

8.145. Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\sqrt{n-1}}=+\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\log_a(n+1)}=+\infty$, $a>1$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n}=+\infty$.

8.146. Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=-\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=-\infty$.

8.147. ¿Con cuáles α la sucesión

$$x_n=\sqrt{n^2+n^\alpha}-n,\quad n\in\mathbb{N}$$

converge hacia 1) $+\infty$; 2) un límite finito? En el segundo caso hallen el límite.

8.148. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ si x_n es igual a:

1) $\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n-1)\,2n}{n^n}$. 2) $\sqrt[n]{n!}$.

3) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 4) $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{n!}$. 5) $\frac{1}{n}(1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n})$.

8.149. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ y para todo n, comenzando por cierto de ellos, $|y_n| \leqslant C$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty.$$

8.150. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, donde x es un número no igual a cero, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ (o bien $+\infty$ o bien $-\infty$). Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$ (respectivamente $+\infty$, $-\infty$) con $x > 0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$ (respectivamente $-\infty$, $+\infty$) con $x < 0$.

8.151. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. ¿Es cierto que:

1) Si $|y_n| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

2) Si $y_n \geqslant x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$?

8.152. 1) Sean

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$

o bien

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty.$$

2) Sean

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty.$$

8.153. Indiquen tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$

y que

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = +\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 1$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = -\infty$.

4) La sucesión $\{x_n - y_n\}$ no tiene límite ni finito ni infinito.

8.154. Indiquen tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$

y que

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 1$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

4) La sucesión $\{x_n/y_n\}$ no tiene límite ni finito ni infinito.

8.155. Indiquen tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

y que

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

4) La sucesión $\{x_n y_n\}$ no tiene límite ni finito ni infinito.

8.156. Demuestren que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, la sucesión $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right\}$ es no acotada.

8.157. 1) Demuestren que si las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son tales que

$$\lim_{n\to\infty}(|x_n + y_n| - |x_n - y_n|) = +\infty,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} |y_n| = \lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty.$$

2) Demuestren que la afirmación inversa también es cierta.

8.158. 1) Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $m_n = \inf\limits_{k\geqslant n} \{x_k\}$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = +\infty$.

2) Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x = -\infty$, $M_n = \sup\limits_{k\geqslant n} \{x_k\}$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = -\infty$.

8.159. Aduzcan un ejemplo de sucesión divergente que sólo tenga un límite parcial.

8.160. Demuestren que una sucesión converge cuando y sólo cuando ella es acotada y tiene un solo límite parcial.

8.161. En la sucesión $\{x_n\}$ las subsucesiones $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k-1}\}$ y $\{x_{3k}\}$ convergen. Demuestren que la propia sucesión también converge.

8.162. Demuestren que toda sucesión no acotada bien es infinitamente grande, o bien tiene límite parcial finito.

8.163. Las sucesiones $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ son tales que para cualquier k existe semejante n_k que $y_k = x_{n_k}$. Se sabe que la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite. ¿Se desprende de aquí que la sucesión $\{y_k\}$ también lo tiene?

8.164. Hallen para la sucesión $\{x_n\}$ el conjunto de los límites parciales, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$ si x_n es igual a:

1) $(\cos(\pi n/2))^{n+1}$. 2) $(1+(-1)^n n)/n$.

3) $(-n)^{\operatorname{sen}(\pi n/2)}$. 4) $\frac{1}{n}+\operatorname{sen}\frac{\pi n}{3}$.

5) $\frac{(1-(-1)^n)\,2^n+1}{2^n+3}$. 6) $\sqrt[n]{4^{(-1)^n}+2}$. 7) $2^{(-1)^n n}\cdot n$.

8) $\frac{1}{2}\left(n-2-3E\left(\frac{n-1}{3}\right)\right)\left(n-3-3E\left(\frac{n-1}{3}\right)\right)$.

8.165. Hallen el conjunto de los límites parciales de las sucesiones:

1) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots \ldots, \frac{2^n+1}{2^n} \ldots\right\}$.

2) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{3^n}{2^n} \ldots\right\}$.

8.166. La sucesión $\{x_n\}$ es tal que

$$x_1 = 0, \quad x_{2k} = \frac{x_{2k-1}}{2}, \quad x_{2k+1} = 1 + x_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Hallen $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

8.167. Demuestren que si la sucesión $\{x_n\}$ no alcanza: a) su cota superior M, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = M$; b) la cota inferior m, entonces $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = m$.

8.168. La sucesión $\{x_n\}$ y el número a son tales que

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n:\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

¿Es el número a el límite parcial de la sucesión $\{x_n\}$?

8.169. Demuestren que en cualquier sucesión hay una subsucesión monótona.

8.170. Demuestren que para cualquier sucesión $\{x_n\}$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ y $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ son sus límites parciales.

8.171. 1) Sea que la sucesión $\{x_n\}$ es inferiormente acotada, $m_n = \inf\limits_{k\geqslant n} \{x_k\}$. Demuestren que la sucesión $\{m_n\}$ converge y que

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

2) Sea que la sucesión $\{x_n\}$ es superiormente acotada, $M_n = \sup\limits_{k\geqslant n} \{x_k\}$. Demuestren que la sucesión $\{M_n\}$ converge y que

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

8.172. Demuestren que el conjunto de los límites parciales de una sucesión es cerrado (véase el problema **10.94**).

8.173. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Demuestren que

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, (x_n + y_n).$$

8.174. Demuestren que si las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$:

1) son superiormente acotadas, entonces

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n;$$

2) son inferiormente acotadas, entonces

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, (x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \;{}^{*)}.$$

8.175. Sea $x_n > 0$, $n \in N$. Demuestren que:

1) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{x_n}$.

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{x_n} \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

8.176. Aduzcan un ejemplo de sucesión en la que un conjunto de límites parciales coincide con el conjunto de valores de la sucesión y es 1) finito; 2) numerable.

8.177. Indiquen una sucesión cuyo conjunto de límites parciales es un conjunto de números naturales.

8.178. Indiquen una sucesión cuyos límites parciales sean: 1) todos los números del tipo $1/n$, $n \in N$; 2) todos los números racionales.

---

*) Se considera que $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

¿Puede el conjunto de límites parciales de una sucesión constar sólo de dichos números?

8.179. En el plano se dan los puntos no coincidentes A, B, C. A_1 es el punto medio del segmento CB, A_2, del segmento AA_1, A_3, del segmento CA_2, . . ., A_{2k}, del segmento AA_{2k-1}, A_{2k+1}, el punto medio del segmento CA_{2k}, . . . Hallen los límites parciales de la sucesión de puntos $\{A_n\}$.

8.180. Confeccionen una sucesión cuyo conjunto de límites parciales sea el segmento $[a; b]$.

8.181. La sucesión $\{x_n\}$ es acotada,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n+1}) = 0, \quad a = \varliminf_{n\to\infty} x_n, \quad b = \varlimsup_{n\to\infty} x_n, \quad a \neq b.$$

Demuestren que cualquier número del segmento $[a; b]$ es el límite parcial de la sucesión $\{x_n\}$.

8.182. La sucesión $\{x_n\}$ es tal que $x_{n+1} > x_n - \alpha_n$, donde $\alpha_n > 0$, $\varlimsup_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Sean $a = \varliminf_{n\to\infty} x_n$, $b = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$. Demuestren que cualquier c, $a \leqslant c \leqslant b$ es el límite parcial de la sucesión $\{x_n\}$.

8.183. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones fundamentales. Demuestren que 1) $\{x_n + y_n\}$ es una sucesión fundamental; 2) $\{x_n y_n\}$ es una sucesión fundamental; 3) si $|y_n| \geqslant c > 0$, $n \in N$, $\{x_n/y_n\}$ es una sucesión fundamental.

8.184. Dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ se denominan equivalentes y se escribe $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ si

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Demuestren que 1) $\{x_n\} \sim \{x_n\}$ (reflexibilidad); 2) si $\{x_n\} \sim \sim \{y_n\}$, $\{y_n\} \sim \{x_n\}$ (simetricidad); 3) si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ e $\{y_n\} \sim \sim \{z_n\}$, $\{x_n\} \sim \{z_n\}$ (transitividad).

8.185. El conjunto de todas las sucesiones equivalentes a pares recibe el nombre de clase de sucesiones equivalentes.

Demuestren que dos clases cualesquiera de sucesiones equivalentes no se intersecan, o bien coinciden.

8.186. Sea A una clase de sucesiones equivalentes y supongamos que existe una sucesión $\{x_n\} \in A$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Demuestren que para cualquier sucesión $\{y_n\} \in A$ tiene lugar $\lim_{n\to\infty} y_{n_c} = x$. Si existe tal $\{x_n\} \in A$ que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, la clase A se denomina nula.

8.187. Sean A' y A'' clases de sucesiones equivalentes, $\{x_n'\} \in A'$, $\{x_n''\} \in A''$. Examinemos dos clases de sucesiones equivalentes: $A' + A''$ es la clase que contiene $\{x_n' + x_n''\}$; $A' \cdot A''$, la clase que contiene $\{x_n' x_n''\}$.

Demuestren que 1) la clase $A' + A''$ no depende de la elección de las sucesiones $\{x'_n\} \in A'$ y $\{x''_n\} \in A''$; 2) si las sucesiones que entran en A' y en A'' son acotadas, la clase $A' \cdot A''$ no depende de la elección de las sucesiones $\{x'_n\} \in A'$ y $\{x''_n\} \in A''$.

8.188. Demuestren que el conjunto de todas las clases de las sucesiones fundamentales equivalentes de números racionales es un campo con la suma $A' + A''$ y el producto $A' \cdot A''$ de las clases introducidos en el problema **8.187.**

8.189. Demuestren que si A es una clase no nula de sucesiones fundamentales equivalentes de números racionales, para cualquier sucesión $\{r_n\} \in A$ existe tal número N que todos los términos de la sucesión r_n, con números $n \geqslant N$, tienen un mismo signo, con la particularidad de que ese signo no depende de la elección de la sucesión $\{r_n\} \in A$. Si el indicado signo es «más», por definición, se supone que $A > 0$ y si es «menos», $A < 0$.

8.190. Demuestren que el conjunto de todas las clases de sucesiones fundamentales equivalentes de números racionales con definición de la suma y el producto (problema **8.187**) y comparación con el cero (problema **8.189**), forma un campo ordenado continuo, es decir, un campo de números reales.

8.191. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ converge si x_n es igual a:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} k\alpha}{k(k+1)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$, donde $|a_k| \leqslant C$, $k \in \mathbb{N}$.

8.192. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ diverge si x_n es igual a:

1) $\sqrt[n]{((-1)^{n+1}-1)^n+1}$. 2) $\cos n$. 3) $E\left(\frac{n^2+1}{3}\right) - \frac{n^2}{3}$.

4) $\frac{n^2}{p} - E\left(\frac{n^2+1}{p}\right)$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 3$. 5) $\operatorname{sen} n$.

6) $\cos(an + b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

7) $\operatorname{tg} n$.

8.193. Sea l_n, $n \in \mathbb{N}$ el número de números naturales p que satisfacen la desigualdad

$$100n + 1 \leqslant p^2 \leqslant 100(n + 1).$$

Demuestren que la sucesión $\{l_n\}$ diverge.

8.194. Sea l_n, $n \in \mathbb{N}$ el número de números naturales p que satisfacen la desigualdad

$$n^k + 1 \leqslant p^{k+1} \leqslant (n+1)^k,$$

donde k es el número natural dado. Demuestren que la sucesión $\{l_n\}$ diverge.

8.195. La sucesión $\{x_n\}$ es tal que la sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} x_n\right\}$ converge. Demuestren que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

8.196. La sucesión $\{x_n\}$ es monótona y $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Demuestren que la sucesión

$$S_n = x_1 - x_2 + \ldots + (-1)^{n-1} x_n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ converge.}$$

8.197. Demuestren que una sucesión monótona acotada es fundamental.

8.198. La sucesión $\{x_n\}$ es tal que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant C\alpha^n$, donde $0 < \alpha < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ converge.

8.199. Demuestren que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ la sucesión

$$S_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ converge.}$$

8.200. Aduzcan un ejemplo de tal sucesión divergente $\{x_n\}$ en la que para cualquier $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0.$$

8.201. La sucesión $\{x_n\}$ no converge. Demuestren que existe tal sucesión de números naturales $\{p_n\}$ que la sucesión $\{x_{n+p_n} - x_n\}$ no tiende a cero.

8.202. Para la sucesión $\{x_n\}$ designemos

$$M_n = \sup_{k\geqslant n,\ l\geqslant n} \{|x_k - x_l|\}.$$

Demuestren que para que la sucesión $\{x_n\}$ satisfaga la condición de Cauchy es necesario y suficiente que

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

8.203. La sucesión $\{x_n\}$ es tal que para todos los n, a partir de cierto de ellos, $0 < x_{n+1} < x_n$ y la sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} x_n\right\}$ converge. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = 0.$$

8.204. Sea $\{p_n\}$ una sucesión de números naturales

$$x_1=\frac{1}{p_1},\quad x_2=\frac{1}{p_1+\frac{1}{p_2}},\quad x_3=\frac{1}{p_1+\frac{1}{p_2+\frac{1}{p_3}}},\ \ldots,$$

$$x_n=\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\cfrac{1}{\ddots\, \cfrac{}{p_{n-1}+\cfrac{1}{p_n}}}}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Demuestren que $\{x_n\}$ es una sucesión fundamental.

8.205. Demuestren que una sucesión monótona tiene límite si cualquiera de sus subsucesiones también lo tiene.

8.206. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\frac{n^{\alpha}}{n!}$, $\alpha>0$. 2) $\frac{(n+k)!}{n^n}$, $k\in\mathbb{N}$. 3) $\frac{n^n}{(2n)!}$.

4) $\frac{n^n}{(n!)^2}$. 5) $\frac{n^n}{(n!)^{\alpha}}$, $\alpha>0$. 6) $\log_a\frac{4^n n!}{n^n}$, $a>0$, $a\neq 1$.

8.207. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ converge si x_n es igual a:

1) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$. 2) $1+\frac{1^2}{4}+\frac{2^2}{4^2}+\ldots+\frac{n^2}{4^n}$.

3) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

8.208. Sea $\{p_n\}$ una sucesión de números naturales y, supongamos, que la sucesión

$$S_n=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

converge. Demuestren que la siguiente sucesión también converge

$$\sigma_n=\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_n}\right),\quad n\in\mathbb{N}.$$

8.209. Sea $x_n>0$ para cualquier $n\geqslant n_0$. Demuestren que la sucesión $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $n\in\mathbb{N}$ tiene límite finito o infinito.

8.210. La sucesión $\{x_n\}$ es acotada,

$y_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}$, $z_n=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}$, $n\in\mathbb{N}$.

Demuestren que las sucesiones $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ convergen. ¿Es obligatorio que sus límites sean límites parciales de la sucesión $\{x_n\}$?

8.211. Sean $x_{n+1} \geqslant x_n$, $y_{n+1} \leqslant y_n$, $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$. Demuestren que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen y que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

8.212. Hallen $\lim_{n\to\infty} x_n$ si x_n es igual a:

1) $\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n$. 2) $\left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$. 3) $\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$.

4) $\left(\frac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$. 5) $\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$.

8.213. Demuestren que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > e^{1-\frac{1}{n}}$. 2) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

8.214. Hallen:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log_a(n+1)-\log_a n}$, $a>0$, $a\neq 1$.

2) $\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

8.215. Demuestren que para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{e}.$$

8.216. Demuestren que para todo número racional $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r.$$

8.217. Demuestren que para todo número real $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

8.218. Demuestren que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ si 1) $x=-k$, $k\in\mathbb{N}$; 2) $x=-1/k$, $k\in\mathbb{N}$; 3) $x\in\mathbb{R}$, $x<0$.

8.219. Sea $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $x_n > 0$. Demuestren que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

8.220. Hallen:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^n$. 2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n/2}$.

8.221. Sea

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e$. 2) $e - S_n \leqslant \frac{n+2}{n!\,(n+1)^2}$.

8.222. Demuestren que la diferencia $e - S_n$, $n \in \mathbb{N}$ (S_n del problema 8.221) decrece con el crecimiento de n con mayor rapidez que la diferencia $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

8.223. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = \frac{1}{e}.$$

8.224. Demuestren que el número e es irracional.

8.225. Sea

$$\sigma_n = 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demuestren que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = e$.

2) La diferencia $\sigma_n - e$ decrece con mayor rapidez que la diferencia $e - S_n$, donde S_n se toma en el problema 8.221.

8.226. Demustren que para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

8.227. Demuestren que para todo n, a partir de cierto n_0, son ciertas las desigualdades

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{n^{n+1}}{n!}.$$

Hallen n_0 para la primera y segunda desigualdad.

8.228. La sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_1 = a$, $x_{n+1} = qx_n + d$, $n \in \mathbb{N}$ recibe el nombre de progresión aritmético-geométrica con razón q y diferencia d. Demuestren que: 1) con $|q| < 1$ esta sucesión converge y hallen su límite; 2) con $|q| > 1$ y $a \neq d/(1-q)$ dicha sucesión diverge.

8.229. Sea $\{x_n\}$ una progresión aritmético-geométrica con razón $q \neq 1$ y diferencia d (véase el problema 8.228), $S_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Hallen:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n - nx_n)$.

8.230. En el triángulo ABC_1 se ha trazado la bisectriz C_1C_2, en el triángulo AC_1C_2, la bisectriz C_2C_3, en el triángulo AC_2C_3, la bisectriz C_3C_4, etc. Demuestren que la sucesión de los valores de los ángulos $C_{n+1}C_nA$, $n \in \mathbb{N}$, tiene límite y háll enlo si el ángulo BAC_1 es igual a α.

8.231. La circunferencia inscrita en el triángulo $A_1B_1C_1$ hace contacto con los lados B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1 en los puntos A_2, B_2, C_2, respectivamente, la circunferencia inscrita en el triángulo $A_2B_2C_2$ hace contacto con sus lados B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 en los puntos A_3, B_3, C_3, respectivamente, etc. Hallen el límite de la sucesión de los valores de los ángulos $B_nA_nC_n$ con $n \to \infty$.

8.232. En el trapecio $ABCD$ ($AD \parallel BC$) B_1 y C_1 son los puntos medios de las diagonales AC y BD, en el trapecio AB_1C_1D B_2 y C_2 son los puntos medios de las diagonales AC_1 y B_1D, etc. Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} |B_nC_n|$ si $|AD| = a$ en los siguientes casos: a) $|AD| > |BC|$; b) $|AD| < |BC|$.

8.233. Sean $a > 0$, $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Determinen que existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y háll enlo.

8.234. Investiguen la convergencia de las sucesiones:

1) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = (1 - x_n)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

8.235. Sean $x_1 = a$, $0 < a < 1$, $x_{n+1} = 1 + qx_n^2$, $n \in \mathbb{N}$. ¿Con qué $q \in [0; 1]$ la sucesión $\{x_n\}$ converge?

8.236. Sean $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, donde $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y háll enlo.

8.237. Sean $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{125}{x_n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y háll enlo.

8.238. Sean $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ converge.

8.239. Demuestren la convergencia y hallen el límite de las sucesiones:

1) $x_1 = a$, $0 < a < 1$, $x_{n+1} = 1 - x_n^2$.

2) $x_1 = a$, $a > -1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$.

8.240. Investiguen la convergencia de la sucesión ($n \in \mathbb{N}$):

1) $x_1 = -3,\ x_{n+1} = 1 + \frac{6}{x_n}$. 2) $x_1 = -\frac{7}{13},\ x_{n+1} = \frac{1+x_n}{2x_n}$.

3) $x_1 = \frac{8}{17},\ x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{3}{2}$. 4) $x_1 = \frac{6}{7},\ x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}$.

8.241. Sean $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + b,\ n \in \mathbb{N}$, donde $a > 0,\ b > 0$. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ converge y hallen su límite.

8.242. Sean $a \in \mathbb{R},\ x_1 = \frac{a}{2},\ x_{n+1} = \frac{a}{2} + \frac{x_n^2}{2}$. Hallen todos los valores de a con los que la sucesión $\{x_n\}$ converge y hallen su límite.

8.243. 1) Sean $0 < x_1 < 1,\ x_{n+1} = x_n(2 - x_n),\ n \in \mathbb{N}$.

a) Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ converge y que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

b) Investiguen la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ si $x_1 \notin (0; 1)$.

2) Sean $0 < x_1 < 1/a,\ x_{n+1} = x_n(2 - ax_n),\ n \in \mathbb{N}$, donde $a > 0$. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ converge y que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/a$.

3) Sean $0 < x_1 < a,\ x_{n+1} = x_n(a - x_n),\ n \in \mathbb{N}$. Demuestren que

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 1$ con $a > 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ con $0 < a \leqslant 1$.

8.244. Las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ satisfacen las condiciones:

1) $x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n),\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n),\ y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demuestren que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen y que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. En el caso 2) hallen ese límite.

8.245. ¿Con cuáles a y b de $\mathbb{R}$ converge o diverge la sucesión $\{x_n\}$, si $x_1 = a,\ x_2 = b$ y

1) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$. 2) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$.

3) $x_{n+2} = -2x_{n+1} - x_n$. 4) $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n,\ n \in \mathbb{N}$?

8.246. Sean $x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n/(4 - x_n),\ n \in \mathbb{N}$. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite y hállenlo si:

1) $0 < a < 3$. 2) $3{,}5 < a < 4$.

8.247. Demuestren la convergencia de la sucesión y hallen su límite si:

1) $x_1 = 4,\ x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$. 2) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + x_n}$.

3) $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n},\ n \in \mathbb{N}$.

8.248. Demuestren que la sucesión

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = \frac{x_n}{2+x_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

tiene límite y hállenlo si:
1) $a > 0$. 2) $a < -2$, 3) $-1 < a < 0$.

8.249. Demuestren que la sucesión

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = 1 + \frac{b}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $b < -1/4$, diverge.

8.250. Sea

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1, \ n \in \mathbb{N}.$$

Establezcan si esta sucesión tiene límite (finito o infinito) y hállenlo si:
1) $a = -5/4$. 2) $a = -3/4$. 3) $a = -7/4$. 4) $a = -9/4$.

8.251. Demuestren que existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y hállenlo si

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}.$$

8.252. Demuestren que la sucesión

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge y hallen su límite si:
1) $a > 1/2$. 2) $a < 0$. 3) $0 < a < 1/4$.

8.253. Demuestren que si

$$x_1 > 0, \ x_{n+1} = a\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

entonces
1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ con $a \geqslant 1$.
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a/(1-a)}$ con $0 < a < 1$.

8.254. Investiguen la convergencia de la sucesión ($n \in \mathbb{N}$):
1) $x_1 = 9/10$, $x_{n+1} = 1/(2x_n - 1)$. 2) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 6/(x_n - 1)$.

8.255. Sean

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = x_n^2 + (1-2p)\,x_n + p^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hallen todos los valores de a y p con los que la sucesión $\{x_n\}$ converge.

8.256. Demuestren que la sucesión

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = \frac{bx_n}{c + dx_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

tiene límite y hállenlo ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y son tales que $c + dx_n \neq 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $bd \neq 0$, $|b| \neq |c|$, $ad \neq b - c$).

8.257. Demuestren que la sucesión

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{b}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $0 > b > -1/4$ converge; hallen su límite.

8.258. Sea

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $a > 0$, $b > 0$. Demuestren que existe un límite finito o infinito para esta sucesión y hállenlo.

8.259. Demuestren que existe una única sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_1 = 1$, $x_n = x_{n+1} + x_{n+2}$, $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que esta sucesión tiene límite y hállenlo.

8.260. La sucesión x_n es tal que

$$x_{n+2} = \frac{5}{2} x_{n+1} + x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_1 = a.$$

¿Cómo hay que elegir x_2 para que esta sucesión converja? ¿A qué será igual su límite?

8.261. Demuestren que la sucesión

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $\alpha > 0$ converge.

8.262. 1) Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0.$$

2) Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a.$$

3) Aduzcan un ejemplo de la sucesión divergente $\{x_n\}$ para la que existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

8.263. Hallen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

8.264. La sucesión $\{x_n\}$ es tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=a$.

Demuestren que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=a$.

8.265. Sean $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=a.$$

8.266. Sean

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\ \lim_{n\to\infty}y_n=y,$$

donde $y\neq 0$ e $y_1+y_2+\ldots+y_n\neq 0$ para cualquier $n\in\mathbb{N}$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{y_1+y_2+\ldots+y_n}=\frac{x}{y}$$

(aquí y es un número, x, un número, $+\infty$ o bien $-\infty$).

8.267. 1) Sea $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=1.$$

2) Sea $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, $x\neq 0$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=x.$$

3) Aduzcan un ejemplo de la sucesión divergente $\{x_n\}$ para la que existe

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

8.268. Sea $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=x.$$

Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=x.$$

8.269. Hallen:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[p]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n n!}{(3n)^n}$. 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

8.270. (*Teorema de Stolts*). Sea la sucesión $\{x_n\}$ estrictamente monótona a partir de cierto número y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. La sucesión $\{y_n\}$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = a.$$

Demuestren que, asimismo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a$$

(aquí a es un número, $+\infty$, $-\infty$ o bien ∞).

8.271. Sea $\{x_n\}$ estrictamente monótona a partir de cierto número, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Sea que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = a.$$

Demuestren que, asimismo, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a$, donde a es un número, $+\infty$, $-\infty$ o bien ∞.

8.272. Sea $p \in \mathbb{N}$. Hallen:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} (1^p + 2^p + \ldots + n^p)/n^{p+1}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} (1^p + 2^p + \ldots + n^p) - \frac{n}{p+1} \right)$.

8.273. Sea

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \ \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_{n-1}y_2 + x_ny_1}{n} = ab.$$

8.274. La función f es no acotada superiormente (inferiormente) sobre el conjunto X. Demuestren que existe tal sucesión $\{x_n\}$, $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ (respectivamente $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$).

8.275. Demuestren que si una función es no acotada sobre un segmento, hay un punto de éste tal que en cada entorno de este punto la función es no acotada. ¿Es cierto esto para un intervalo?

8.276. Sea

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,\ S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

¿Puede la sucesión $\{S_n\}$ tener sólo dos límites parciales si 1) x_n son números reales; 2) x_n son números complejos?

8.277. La sucesión $\{x_n\}$ es tal que para cualquier $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$ su subsucesión $\{x_{pk}\}$ tiene límite igual 1. ¿Se desprende de aquí que, asimismo, la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia 1?

8.278. Demuestren que toda sucesión acotada puede dividirse en un conjunto numerable de sucesiones que tengan un mismo límite.

8.279. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas con conjunto común de límites parciales. Demuestren que habrá tal permutación $\{z_n\}$ de la sucesión $\{y_n\}$ (véase el problema 8.94) que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - z_n) = 0.$$

8.280. Está dado un conjunto numerable de las sucesiones $\{x_n^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ tales que $x_n^{(k)} > 0$ para cualquiera $n, k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = +\infty$ para cualquiera $k \in \mathbb{N}$. Demuestren que existe sucesión $\{b_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{x_n^{(k)}} = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

8.281. Aduzcan un ejemplo de la sucesión creciente acotada $\{x_n\}$ tal que la sucesión $\{(n+1)(x_{n+1} - x_n)\}$ sea no acotada.

8.282. 1) La sucesión $\{x_n\}$ es acotada. Demuestren que la sucesión $\{n(x_{n+1} - x_n)\}$ no puede tener el límite $+\infty$.

2) Aduzcan un ejemplo de la sucesión convergente $\{x_n\}$ para la que

$$\lim_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = \infty.$$

8.283. Demuestren la convergencia de una sucesión acotada superiormente que satisface la condición:

1) $x_{n+1} - x_n \geqslant -\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_{n+1} - x_n \geqslant -\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $x_{n+1} - x_n \geqslant \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, donde α_n son tales que la sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right\}$ converge.

8.284. La sucesión $\{x_n\}$ es tal que para cualquier $m, n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n.$$

Demuestren que la sucesión $\{x_n/n\}$ converge.

8.285. Sea $\{x_n\}$ una sucesión creciente no acotada, $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Sea K_n el número de términos de dicha sucesión que no sobrepasan n, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que si existe uno de los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{n} \text{ o bien } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x_n},$$

existirá también el otro y que estos límites serán iguales.

8.286. (*Criterio de Leibniz*). La sucesión $\{a_n\}$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0,$$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant |a_{n+1} - a_n|,$$

$$(a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+1} - a_n) \leqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demuestren que la sucesión $\{a_n\}$ converge.

8.287. La sucesión $\{x_n\}$ tiene *variación acotada* si la sucesión

$$\sigma_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_{n+1} - x_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

también lo es. Demuestren que

1) Una sucesión monótona acotada tiene variación acotada.
2) Una sucesión con variación acotada es convergente.
3) Para toda sucesión con variación acotada existen las sucesiones crecientes acotadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $x_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

8.288. Sea $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1.$$

Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

8.289. Sean todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ diferentes. Demuestren que el conjunto de las subsucesiones de la sucesión $\{x_n\}$ es innumerable.

8.290. Sea

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad a > 0, \quad a_n > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

y supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $b \in \mathbb{R}$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

8.291. Hallen

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{1/n}-1)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^\alpha$, donde $C_n^\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

8.292. 1) Demuestren que la sucesión

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n,\quad n\in\mathbb{N},$$

tiene límite (llamado *constante de Euler*).

2) Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

8.293. En el triángulo ABC se han trazado las medianas AD, BE y CF. En el lado AC se toma el punto M_0, $M_0\neq A$, $M_0\neq C$ y por él se halla en el lado AC el punto M_1 del modo siguiente: se han trazado los segmentos $[M_0N_0]\parallel[CF]$ $(N_0\in AB)$, a continuación $[N_0P_0]\parallel(AD)$ $(P_0\in BC)$ y, por fin, $[P_0M_1]\parallel(BE)$. Partiendo del punto M_1, de forma análoga, hallamos el punto M_2, etc. Demuestren que la sucesión de puntos $\{M_n\}$ converge y hallen su límite.

8.294. Un punto está en movimiento uniforme y rectilíneo en un círculo, rebotando contra su límite según la ley de reflexión. El ángulo central bajo el que se ven los dos primeros puntos de encuentro con el límite del círculo es igual a 1 rad. Demuestren que en cualquier sector habrán puntos de encuentro con el límite.

8.295. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} n((n+1)^\alpha-n^\alpha)=+\infty,\quad 0<\alpha.$$

8.296. Hallen:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n!}{n^\alpha}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\ln(\sqrt{n^2+1}-n)|^p$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n}{2^n}$, donde $a>0$, $b>0$.

8.297. Demuestren que de cualquier conjunto infinito de intervalos, cuya unión sobrecubre el segmento $[a;\ b]$, es posible formar un subconjunto finito de intervalos, cuya unión también sobrecubre $[a;\ b]$.

§ 9. Límite de una función

1. Definiciones fundamentales. *Primera definición del límite de una función (definición de Heine).* Sea que el campo de definición de la función $f(x)$ contiene el intervalo $(\alpha;\ \beta)$ salvo, puede ser, el punto $x_0 \in (\alpha;\ \beta)$.

El número a recibe el nombre de *límite de la función* $f(x)$ *en el punto* x_0 (o bien con $x \to x_0$) si para cualquier sucesión $\{x_n\}$, $x_n \in \in (\alpha;\ \beta)$, $x_n \neq x_0$, convergente hacia x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge hacia a.

De la definición se desprende que la función no puede tener dos límites diferentes en un mismo punto. También se deduce de la definición que los valores de la función $f(x)$ en los puntos x yacientes fuera de cierto entorno del punto x_0 y el valor de la función $f(x)$ en el punto x_0 no influyen ni sobre la existencia ni sobre el valor del límite de la función $f(x)$ en el punto x_0.

Con el fin de demostrar que la función $f(x)$ no tiene límite en el punto x_0 es suficiente indicar cierta sucesión $\{f(x_n)\}$, que no tenga límite, o bien indicar dos sucesiones $\{f(x_n)\}$ y $\{f(x'_n)\}$ que tengan diferentes límites.

Segunda definición del límite de una función (definición de Cauchy). El número a recibe el nombre de *límite de la función* $f(x)$ *en el punto* x_0 (o bien con $x \to x_0$) si para cada número $\varepsilon > 0$ existe tal número $\delta > 0$ que para todas las x que satisfagan la condición $0 < |x - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Las definiciones de Cauchy y Heine son equivalentes.

Si el número a es el límite de la función $f(x)$ en el punto x_0, se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \text{ o bien } f(x) \to a \text{ con } x \to x_0.$$

Haciendo uso de los símbolos de lógica, la definición de Cauchy puede anotarse del modo siguiente: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x\, (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon). \quad (1)$$

La afirmación $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq a$ se escribe así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq a \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 \exists x\, (0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - a| \geqslant \varepsilon). \quad (2)$$

Ejemplo 1. Hallen el límite de la función $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ en el punto $x = 4$.

△ Hagamos uso de la primera definición del límite de una función en cierto punto. Vamos a considerar la función dada en cierto entor-

no del punto $x = 4$, p. ej., en el intervalo (3; 5). Tomemos cualquier sucesión $x_n \in (3; 5)$ tal que $x_n \neq 4$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$. Entonces, basándonos en los teoremas de los límites de las sucesiones, tendremos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2-16}{x_n^2-4x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n+4}{x_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n+4}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = 2.$$

Debido a que hemos tomado la sucesión x_n al azar, de acuerdo con la primera definición del límite de una función en un punto,

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x} = 2. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 2. Demuestren que $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x} = 2$ empleando la segunda definición del límite de una función en un punto.

△ Analicemos la función $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4x}$ en cierto entorno del punto $x=4$, p. ej., en el intervalo (2; 5).

Tomemos al azar un número positivo ε y transformemos $|f(x) - a|$ con $x \neq 4$ de la forma siguiente:

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| = \left|\frac{x+4}{x} - 2\right| = \frac{|x-4|}{x}.$$

Tomando en consideración que $x \in (2; 5)$, obtenemos la desigualdad

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| < \frac{|x-4|}{2},$$

de la que se deduce que si tomamos $\delta = 2\varepsilon$, para cualquier $x \in (2; 5)$ y que satisfacen las desigualdades $0 < |x - 4| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

De acuerdo con la segunda definición del límite el número $a=2$ es el límite de la función $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4x}$ en el punto $x = 4$. ▲

Ejemplo 3. Demuestren que la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no tiene límite en el punto $x = 0$.

△ Tomemos dos sucesiones $x_n = 1/n$ y $x'_n = 2/(4n + 1)$ que convergen hacia el punto $x = 0$.

Consideremos las correspondientes sucesiones $\{f(x_n)\}$ y $\{f(x'_n)\}$ de los valores de la función. Como la sucesión $f(x_n) = \operatorname{sen} n\pi$ con-

verge hacia cero y la sucesión $f(x'_n) = \operatorname{sen}(\pi(4n+1)/2)$, hacia la unidad, el límite de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ en el punto $x = 0$ no existe. ▲

2. Teoremas de los límites.

Teorema del límite de la suma (diferencia) y del producto de dos funciones. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen límites en el punto x_0, las funciones $f(x) \pm g(x)$ y $f(x)\,g(x)$ también tienen límites en el punto x_0, con la particularidad de que

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x), \tag{3}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\,g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\,(\lim_{x\to x_0} g(x)). \tag{4}$$

En particular, para cualquier número C

$$\lim_{x\to x_0}(Cf(x)) = C\lim_{x\to x_0} f(x). \tag{5}$$

Teorema del límite del cociente. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen límites en el punto x_0 y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, la función $f(x)/g(x)$ también tiene límite en el punto x_0 y, con ello,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}. \tag{6}$$

Teorema del límite de la composición de funciones. Sea que existen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ ($f(x) \neq a$ con $x \neq x_0$) y $\lim\limits_{y\to a} g(y)$; entonces en el punto x_0 existe el límite de la composición $g \circ f = g(f(x))$, con la particularidad de que

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to a} g(y). \tag{7}$$

Este teorema permite calcular los límites pasando de la variable x a una nueva variable $y = f(x)$.

En el caso de la continuidad de la función $g(y)$ en el punto a la igualdad (7) puede ser escrita en forma de la fórmula

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)), \tag{8}$$

de lo que sigue que el signo de límite (lím) y el signo de la función (g), cuando ella es continua, puede ser permutado.

3. Límite de una función con $x \to \infty$. El número a lleva el nombre de *límite* de la función $f(x)$ con $x \to \infty$ si para cada número $\varepsilon > 0$ existe tal número $\delta > 0$ que para todas x, que satisfagan la condición $|x| > \delta$, se cumple la desigualdad $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Si el número a es el límite de la función $f(x)$ con $x \to \infty$, se escribe

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

Los teoremas de los límites son también válidos para los límites de las funciones con $x \to \infty$.

4. **Límite infinito.** Se dice que el límite de la función $f(x)$ en el punto x_0 es igual a la infinidad y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ existe tal número $\delta > 0$ que para todas las x, que satisfagan la condición $0 < |x - x_0| < \delta$, se cumple la desigualdad $|f(x)| > \varepsilon$.

De modo análogo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ existe tal número $\delta > 0$ que para todas las x, que satisfagan la condición $|x| > \delta$, se cumple la desigualdad $|f(x)| > \varepsilon$.

La función $f(x)$ recibe el nombre de *infinitamente grande* con $x \to x_0$ si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

La función $f(x)$ lleva el nombre de *infinitamente pequeña* con $x \to x_0$ si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

De manera análoga se definen las funciones *infinitamente grande* y *pequeña* con $x \to \infty$.

5. **Propiedades de las funciones infinitamente grandes y pequeñas.**

1) La suma (diferencia) de funciones infinitamente pequeñas es una función infinitamente pequeña.

2) Si la función $f(x)$ con $x \to x_0$ es infinitamente pequeña y la función $g(x)$, en cierto entorno del punto x_0, satisface la condición $|g(x)| < c$, $x \neq x_0$ (c es cierto número positivo) el producto $f(x)\,g(x)$ con $x \to x_0$ es una función infinitamente pequeña. Así, pues, el producto de una función infinitamente pequeña por una función acotada es una función infinitamente pequeña. En particular, el producto de funciones infinitamente pequeñas es una función infinitamente pequeña.

3. Si la función $f(x)$ con $x \to x_0$ es infinitamente pequeña, mientras que la función $g(x)$, en cierto entorno del punto x_0, satisface la

condición $|g(x)| > c$, $x \neq x_0$ (c es cierto número positivo) el producto $f(x)g(x)$ con $x \to x_0$ es una función infinitamente grande. En particular, el producto de funciones infinitamente grandes es una función infinitamente grande.

4) La función $f(x)$, definida y no igual a cero en cierto entorno del punto x_0, salvo, puede ser, en el punto x_0, es infinitamente pequeña con $x \to x_0$ cuando y sólo cuando la función $1/f(x)$ con $x \to x_0$ es infinitamente grande.

La suma (diferencia) y el cociente de funciones infinitamente grandes no son obligatoriamente funciones infinitamente grandes. P. ej., $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -1/x$ con $x \to 0$ son funciones infinitamente grandes, pero $f(x) + g(x)$ con $x \to 0$ no es una función infinitamente grande.

Al calcular $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x))$ en el caso cuando $f(x)$ y $g(x)$ son funciones infinitamente grandes con $x \to x_0$, el teorema del límite de una suma (diferencia) no es aplicable directamente. En semejantes casos, se suele decir que la suma $f(x) + g(x)$ o que la diferencia $f(x) - g(x)$ con $x \to x_0$ es una indeterminación del tipo $\infty + \infty$ y $\infty - \infty$. Del mismo modo se dice que el cociente $f(x)/g(x)$ es con $x \to x_0$ una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones infinitamente grandes con $x \to x_0$ y una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones infinitamente pequeñas con $x \to x_0$. El cálculo de los límites se llama con frecuencia en estos casos «resolución de la indeterminación».

Ejemplo 4. Hallen:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$. 2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$. 4) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

△1) Aplicando el teorema del límite de una diferencia (3) y de un producto (4), hallamos el límite del denominador

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - x - 2) = (\lim_{x \to 1} x)(\lim_{x \to 1} x) - \lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 2 = -2.$$

El límite del denominador no es igual a cero, por lo que, según el teorema del límite del cociente (6), obtenemos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} (x^2-4)}{\lim\limits_{x \to 1} (x^2-x-2)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

2) Aquí el numerador y el denominador tienden a cero:

$$\lim_{x \to 2} (x^2-4) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2} (x^2-x-2) = 0,$$

es decir, obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. El teorema del límite de un cociente (6) no es aplicable directamente. Para la «resolución de la indeterminación» transformemos la función dada dividiendo el numerador y denominador entre $x-2$, con $x \neq 2$. Obtenemos la igualdad

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{x+2}{x+1}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)\neq 0$, según el teorema del límite de un cociente (6), hallamos

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}=\frac{4}{3}.$$

3) El numerador y denominador con $x\to\infty$ son funciones infinitamente grandes. Por ello, no es aplicable directamente el teorema del límite de un cociente (6). Dividamos el numerador y denominador entre x^2 y aplicando a la función obtenida el teorema del límite de un cociente (6)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=1.$$

4) La función dada puede representarse como el producto de dos funciones $f(x)=1/(x+1)$ y $g(x)=(x^2-4)/(x-2)$. La función $f(x)=1/(x+1)$ con $x\to -1$ es infinitamente grande, la función $g(x)=(x^2-4)/(x-2)$ en el entorno $(-3/2);\ -1/2)$ del punto $x=-1$, satisface la condición

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}\right|=|x+2|>\frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, de acuerdo con la propiedad 3, el producto $f(x)\,g(x)$ es una función infinitamente grande, es decir,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\infty. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 5. Hallen:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, $a>0$. 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$. 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)$.

△ 1) Aquí tiene lugar una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Transformemos la función dada, descomponiendo el numerador en factores:

$$\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\sqrt{x}+\sqrt{a}.$$

Ahora, hallamos

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})=\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\sqrt{a}.$$

Haciendo uso de la continuidad de la función $\sqrt{x}$ en el punto a (véase (8)), obtenemos

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{\lim_{x\to a}x}=\sqrt{a}$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=2\sqrt{a}.$$

2) Para la «resolución de la indeterminación» del tipo $\frac{0}{0}$ multipliquemos y dividamos la función dada entre $\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}$. Entonces, con $x\neq 5$, tendremos

$$\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}=\frac{x+11-4(x-1)}{(x^2-25)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}=$$
$$=-\frac{3}{(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}$$

A la función obtenida es aplicable el teorema del límite de un cociente (6), por ello

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}=$$
$$=-\frac{3}{\lim\limits_{x\to 5}(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}=-\frac{3}{80}.$$

Al calcular el último límite empleamos la continuidad de la función $\sqrt{x}$ en los puntos $x=16$ y $x=4$ (véase (8)).

3) Aquí es cómodo introducir una nueva variable. Hagamos $y=\sqrt[5]{32+x}$ y, entonces, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{y^5-32}=\lim_{y\to 2}\frac{1}{y^4+2y^3+4y^2+8y+16}=\frac{1}{80}.$$

4) En este caso tiene lugar la indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Transformemos la función dada de la forma siguiente:

$$\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}=$$

$$=\frac{x^4+8x^2+3-(x^4+x^2)}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=\frac{7+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

Como

$$\lim_{x\to\infty}\left(7+\frac{3}{x^2}\right)=7,$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1,$$

entonces,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)=7/2. \ \blacktriangle$$

6. Ciertos límites notables. En muchos casos, el cálculo de los límites se efectúa con ayuda de dos importantes fórmulas:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \tag{10}$$

También se emplean con frecuencia las siguientes fórmulas que son el corolario de la fórmula (10):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{11}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\quad a>0,\ a\neq 1, \tag{12}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad a>0. \tag{13}$$

En particular, con $a=e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \tag{14}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{15}$$

Ejemplo 6. Hallen:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}$, $\alpha\neq 0$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$. 4) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{ctg} 2x\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

$\triangle$ 1) Haciendo $\alpha x=y$, de acuerdo con la fórmula (9), obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha x}=\alpha\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}=\alpha.$$

2) Como

$$\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=2\,\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$$

y

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}=5,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}=2$$

(véase el p. 1)), entonces, según el teorema del límite de un producto (4), hallamos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=20.$$

3) Pasemos a una nueva variable $y=\operatorname{arctg} x$, entonces, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}.$$

De la continuidad de la función $\cos y$ en el punto $y=0$ se desprende que $\lim\limits_{y\to 0}\cos y=1$. De acuerdo con la fórmula (9) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}=1$. Por ello, según el teorema del límite de un cociente (6), obtenemos

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}\cos y}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}=1.$$

4) La función dada es el producto de la función $\operatorname{ctg} 2x$, infinitamente pequeña con $x\to\pi/4$, por la función $\operatorname{ctg}(\pi/4-x)$ infinitamente grande.

En semejantes casos, se dice que tiene lugar la indeterminación del tipo $0\cdot\infty$. Para calcular el límite pasamos a la nueva variable $y=\pi/4-x$:

$$\lim_{x\to\pi/4}\operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)\operatorname{ctg}y=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}2y}{\operatorname{sen}y}\cdot\frac{\cos y}{\cos 2y}.$$

Como $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}2y}{\operatorname{sen}y}=2$ y $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos y}{\cos 2y}=1$, entonces,

$$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}2y}{\operatorname{sen}y}\cdot\frac{\cos y}{\cos 2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}2y}{\operatorname{sen}y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\cos 2y}=2. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 7. Demuestren las fórmulas ($a>0$, $a\neq 1$):

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

$\triangle$1) Escribamos la función dada en la forma $\log_a(1+x)^{1/x}$. Debido a la continuidad de la función logarítmica (véase (8))

$$\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

y, como de acuerdo con la fórmula (10), $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$, entonces,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

2) Para la demostración pasemos a una nueva variable $y=a^x-1$.

Entonces, $x=\log_a(1+y)$ y si $x\to 0$, entonces, asimismo, $y\to 0$; por esto

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\ln a. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 8. Hallen:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{1/x^3}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$. 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)^x$.

$\triangle$1) Según la definición de una función exponencial-potencial, tenemos

$$(1-2x^3)^{1/x^3}=e^{(\ln(1-2x^3))/x^3}.$$

Haciendo uso de la continuidad del exponente (véase (8)), escribamos la igualdad

$$\lim_{x\to 0}(1-2x^3)^{1/x^3}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1-2x^3))/x^3}$$

Con el fin de calcular el último límite hagamos $y=-2x^3$, entonces (véase la fórmula (14)), obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x^3)}{x^3}=-2\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=-2,$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0}(1-2x^3)^{1/x^3}=e^{-2}.$$

2) Empleando la definición de función exponencial-potencial y la continuidad del exponente (véase (8)), tenemos

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\ln\cos x)/x^2}$$

Para calcular $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\cos x)/x^2$ escribamos la igualdad

$$\frac{\ln\cos x}{x^2}=\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}.$$

Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\,\mathrm{sen}^2(x/2)}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}(x/2)}{x/2}\right)^2=-\frac{1}{2},$$

entonces, según el teorema del límite de un producto (4), obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=e^{-1/2}.$$

3) Representemos la función dada en forma de la diferencia de dos funciones:

$$\frac{2^x-x^2}{x-2}=\frac{2^x-2^2-(x^2-2^2)}{x-2}=4\,\frac{2^{x-2}-1}{x-2}-\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Como

$$\lim_{x\to 2}4\,\frac{2^{x-2}-1}{x-2}=4\lim_{y\to 0}\frac{2^y-1}{y}=4\ln 2,$$

(fórmula (13), $a=2$),

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4,$$

entonces, según el teorema del límite de una diferencia (3), obtenemos

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}=4\ln 2-4.$$

4) Pasemos a la nueva variable $y=1/x$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}(e^y+y)^{1/y}.$$

De acuerdo con la definición de la función exponencial-potencial y, debido a la continuidad del exponente (véase 8)), tenemos

$$\lim_{y\to 0}(e^y+y)^{1/y}=e^{\lim\limits_{y\to 0}(\ln(e^y+y))/y}.$$

Con el fin de calcular $\lim\limits_{y\to 0}(\ln(e^y+y))/y$ empleamos la igualdad

$$\frac{\ln(e^y+y)}{y}=\frac{\ln(1+e^y+y-1)}{e^y+y-1}\cdot\frac{e^y+y-1}{y}.$$

Haciendo $t=e^y+y-1$, obtenemos

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+e^y+y-1)}{e^y+y-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

Hallamos

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y+y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\left(1+\frac{e^y-1}{y}\right)=2.$$

Según el teorema del límite de un producto (4)

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(e^y+y)}{y}=2$$

y, por lo tanto, el límite buscado es igual a e^2. ▲

7. Límites unilaterales. Sea que el campo de definición de la función $f(x)$ contiene el intervalo $(\alpha;\ x_0)$. El número a recibe el nombre de *límite por la izquierda* de la función $f(x)$ en el punto x_0 (o bien con $x\to x_0-0$) si, para cada número $\varepsilon>0$, existe tal número $\delta>0$ que para todas las x, que satisfacen las desigualdes $x_0-\delta<x<x_0$, se cumple la desigualdad $|f(x)-a|<\varepsilon$. El límite por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x_0\neq 0$ se designa $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ o bien $f(x_0-0)$. Si $x_0=0$, se escribe $\lim\limits_{x\to -0}f(x)$ o bien $f(-0)$.

Por analogía, cuando el campo de definición de la función $f(x)$ contiene el intervalo (x_0, β) se introduce la noción de *límite por la derecha*. Este se designa así: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ o bien $f(x_0+0)$ si $x_0 \neq 0$ y $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ o bien $f(+0)$ si $x_0 = 0$.

La función $f(x)$ tiene límite en el punto x_0 cuando y sólo cuando existen los límites por la izquierda y por la derecha y ellos son iguales; con ello

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0).$$

Para aquellas funciones cuyo campo de definición contiene el intervalo $(\alpha; +\infty)$ o bien el intervalo $(-\infty; \beta)$, se introduce la noción de *límite con* $x \to +\infty$ y, respectivamente, *con* $x \to -\infty$. Estos límites se designan $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

P. ej., el número a lleva el nombre de límite de la función $f(x)$ con $x \to +\infty$ si para cada número $\varepsilon > 0$ existe tal número $\delta > 0$ que para todas las x, que satisfagan la desigualdad $x > \delta$, se cumple la desigualdad $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Para los límites unilaterales son válidos los teoremas de los límites de una suma (diferencia), un producto, un cociente y del límite de una composición de funciones.

Por analogía, con los límites unilaterales finitos se definen también los límites unilaterales infinitos:

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{etc.}$$

P. ej., la anotación $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty$ significa que para cada número ε existe semejante número $\delta > 0$ que para todas las x, que satisfagan a las desigualdades $x_0 < x < x_0 + \delta$, se cumple la desigualdad $f(x) < \varepsilon$.

Ejemplo 9. Demuestren las fórmulas:

1) $\lim\limits_{x \to -0} a^{1/x} = 0$, $a > 1$, 2) $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

△1) Tomemos $\varepsilon > 0$ y para $x < 0$ resolvamos la desigualdad $a^{1/x} < \varepsilon$. Si $\varepsilon \geqslant 1$, la desigualdad es cierta para toda $x < 0$. Por ello, para cada $\varepsilon \geqslant 1$ como δ podemos tomar cualquier número positivo, p.ej., $\delta = 1$. Si $\varepsilon < 1$, tomando el logaritmo de ambos miembros de la desigualdad, obtenemos $\dfrac{1}{x} \ln a < \ln \varepsilon$, de donde $x > \dfrac{\ln a}{\ln \varepsilon}$. Así, pues, del mismo modo, para $\varepsilon < 1$ existe tal δ y,

precisamente, $\delta = -\frac{\ln a}{\ln \varepsilon} > 0$, que para toda x, que satisfaga las desigualdades $-\delta < x < 0$, se cumple la desigualdad $a^{1/x} < \varepsilon$. Por lo tanto, el límite por la izquierda de la función $a^{1/x}$, $a > 1$, en el punto $x = 0$ es igual a cero.

2) Tomemos el número positivo ε y, para $x > 0$, resolvamos la desigualdad

$$\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon. \tag{16}$$

Si $\varepsilon \geqslant \pi/2$ la desigualdad es cierta para cualquier $x > 0$. Por ello, para todo $\varepsilon \geqslant \pi/2$, es posible tomar en calidad de δ cualquier número positivo, p. ej., $\delta = 1$.

Si $\varepsilon < \pi/2$, al resolver la desigualdad (16), obtenemos

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}<\varepsilon,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$
$$\frac{1}{x}>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right),\ x<\operatorname{tg}\varepsilon,$$

es decir, para cada $\varepsilon < \pi/2$ podemos tomar $\delta = \operatorname{tg}\varepsilon$ como δ. Así, pues, para cada número $\varepsilon > 0$ hay tal número δ que para todas las x que satisfagan las desigualdades $0 < x < \delta$, se cumple la desigualdad $\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$. Esto significa que el límite por la derecha de la función $\operatorname{arctg}(1/x)$ en el punto $x = 0$ es igual a $\pi/2$.▲

Ejemplo 10. Hallen:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$. 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$. 3) $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{th}(1/x)$.

4) $\lim\limits_{x\to-0}\operatorname{th}(1/x)$.

△1) Con $x\to+\infty$ la función dada es la razón de dos funciones infinitamente grandes $\left(\text{indeterminación del tipo } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$. Después de dividir el numerador y el denominador entre x, obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+1}=1.$$

2) Con $x\to-\infty$ las funciones $\sqrt{x^2+14}+x$ y $\sqrt{x^2-2}+x$ son una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Para calcular el límite

pasemos a la nueva variable $t = -x$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^2+14}-t}{\sqrt{t^2-2}-t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{(\sqrt{t^2+14}-t)(\sqrt{t^2+14}+t)(\sqrt{t^2-2}+t)}{(\sqrt{t^2-2}-t)(\sqrt{t^2-2}+t)(\sqrt{t^2+14}+t)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{14\left(\sqrt{1-\frac{2}{t^2}}+1\right)}{-2\left(\sqrt{1+\frac{14}{t^2}}+1\right)} = -7.$$

3) $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{th} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{1-e^{-2/x}}{1+e^{-2/x}} = 1,$

ya que $\lim\limits_{x\to+0} e^{-2/x} = \lim\limits_{t\to-0} e^{1/t} = 0$ (ejemplo 9, 1)).

4) $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{th} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-0} \frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}} = \lim\limits_{x\to-0} \frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1} = -1,$

ya que $\lim\limits_{x\to-0} e^{2/x} = 0$ (ejemplo 9,1)). ▲

8. Comparación de funciones. Símbolos $O(f)$ y $o(f)$. *La función $g(x)$ se denomina acotada en comparación con la función $f(x)$ con* $x \to x_0$, si existe tal intervalo $(\alpha; \beta)$ que contiene el punto x_0 y tal constante C que

$$|g(x)| \leqslant C\,|f(x)|, \quad x \in (\alpha;\ \beta), \quad x \neq x_0.$$

La acotación de $g(x)$ en comparación con $f(x)$ con $x \to x_0$ se escribe con brevedad del modo siguiente:

$$g(x) = O(f(x)), \quad x \to x_0. \tag{17}$$

Esta anotación se lee: «$g(x)$ es O grande de $f(x)$ cuando x tiende a x_0».

Por analogía se define el sentido de la anotación $g(x) = O(f(x))$ con

$$x \to x_0 - 0,\ x \to x_0 + 0,\ x \to \infty,\ x \to -\infty,\ x \to +\infty.$$

En caso particular, cuando $f(x) = 1$, la anotación $g(x) = O(1)$, $x \to x_0$ significa que en cierto entorno del punto x_0, que no contiene x_0, la función $g(x)$ *es acotada*.

Si $g(x)$ es acotada en comparación con $f(x)$, mientras que $f(x)$ es acotada en comparación con $g(x)$ con $x \to x_0$, entonces $g(x)$ y $f(x)$ llevan el nombre de *funciones de un mismo grado con* $x \to x_0$.

En semejante caso se escribe

$$g(x) \asymp f(x), \quad x \to x_0. \tag{18}$$

Teorema. Para que las funciones $g(x)$ y $f(x)$ sean de un mismo grado con $x \to x_0$ es suficiente que con $x \to x_0$ exista el límite finito y no igual a cero de la razón entre dichas funciones.

Ejemplo 11. ¿Cuáles de los siguientes pares de funciones son funciones de un mismo grado con $x \to 0$:

1) $f(x) = e^x$, $g(x) = 100 + x$.
2) $f(x) = 13/x$, $g(x) = 1/\ln(1 + x)$.
3) $f(x) = x(2 + \operatorname{sen}(1/x))$, $g(x) = x$.
4) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$?

△1) Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{100+x}{e^x} = 100,$$

$e^x \asymp 100 + x$, $x \to 0$.

2) Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{13\ln(1+x)}{x} = 13,$$

$13/x \asymp 1/\ln(1 + x)$, $x \to 0$.

3) En este caso

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

no existe.

Pero, a pesar de todo, las funciones dadas son funciones de un mismo grado. En efecto, ya que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 3, \quad x \neq 0,$$

la desigualdad

$$|f(x)| \leqslant C\,|g(x)|$$

se cumple con $C = 3$ y, por consiguiente, la función $f(x) = x(2 + \operatorname{sen}(1/x))$ es acotada en comparación con la función $g(x) = x$ con $x \to 0$.

Por otro lado

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = \frac{1}{2+\operatorname{sen}\frac{1}{x}} \leqslant 1, \quad x \neq 0,$$

es decir, la desigualdad

$$|g(x)| \leqslant C\,|f(x)|$$

es cierta con $C = 1$ y, por lo tanto, la función $g(x) = x$ es acotada en comparación con la función $f(x) = x(2 + \operatorname{sen}(1/x))$ con $x \to 0$. Así, pues, $x(2 + \operatorname{sen}(1/x)) \asymp x$, $x \to 0$.

4) Las funciones dadas no son de un mismo grado con $x \to 0$, ya que cualquiera que sea la constante C la desigualdad

$$|x| \leqslant C\,|x^2|, \quad x \neq 0$$

no se cumple, por lo visto, en ningún entorno del punto $x = 0$ y, por consiguiente, la función $g(x) = x$ no es acotada en comparación con la función $f(x) = x^2$ con $x \to 0$. ▲

Si

$$g(x) \asymp (x - x_0)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \to x_0, \tag{19}$$

entonces, la función $g(x)$ recibe el nombre de *infinitamente pequeña del grado* n con $x \to x_0$.

Si

$$g(x) \asymp \frac{1}{(x-x_0)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \ x \to x_0, \tag{20}$$

la función $g(x)$ lleva el nombre de *infinitamente grande del grado* n con $x \to x_0$.

P. ej., las funciones

$$f(x) = \frac{13}{x} \ \text{ y } \ g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)}$$

con $x \to 0$ (ejemplo 11.2)) son infinitamente grandes de 1er grado, en tanto que las funciones $f(x) = x(2 + \operatorname{sen}(1/x))$ y $g(x) = x$ con $x \to 0$, infinitamente pequeñas de 1er grado (ejemplo 11.3)).

La función $g(x)$ se denomina *equivalente* (*asintóticamente igual*) a la función $f(x)$ con $x \to x_0$ si en cierto intervalo $(\alpha; \beta)$, que contiene el punto x_0, existe tal función $\varphi(x)$ que

$$g(x) = \varphi(x) f(x), \quad x \in (\alpha; \beta), \ x \neq x_0 \ \text{ y } \\ \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{21}$$

Si $g(x)$ es equivalente a $f(x)$ con $x \to x_0$, se escribe

$$g(x) \sim f(x), \quad x \to x_0. \tag{22}$$

La relación de equivalencia de las funciones es:

1) reflexiva, es decir, $f(x) \sim f(x)$, $x \to x_0$;

2) simétrica, es decir, si $g(x) \sim f(x)$, $x \to x_0$, entonces $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$;

3) transitiva, es decir, si $g(x) \sim f(x)$ y $f(x) \sim h(x)$ con $x \to x_0$, entonces $g(x) \sim h(x)$ con $x \to x_0$.

De forma análoga se define la equivalencia de las funciones en los casos cuando $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Teorema. Para que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sean equivalentes con $x \to x_0$ es suficiente que el límite de su razón con $x \to x_0$ sea igual a uno.

Con $x \to 0$ son válidas las siguientes equivalencias que encuentran frecuente aplicación:

$$x \sim \operatorname{sen} x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arcsen} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1. \tag{23}$$

Ejemplo 12. ¿Cuáles de los siguientes pares de funciones son equivalentes con $x \to 0$:

1) $f(x) = e^x$; $g(x) = 2x + 1$.

2) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ $g(x) = \sqrt[4]{x}$.

3) $f(x) = a^x - 1$, $a > 0$, $a \neq 1$; $g(x) = x$.

4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \text{ si } x \text{ es racional,} \\ 0 \text{ si } x \text{ es irracional;} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \text{ es racional,} \\ 0 \text{ si } x \text{ es irracional?} \end{cases}$

△ 1) Como $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x+1}{e^x} = 1$,
$e^x \sim 2x + 1$ con $x \to 0$.

2) Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x \to 0} \sqrt{1 + \sqrt{x}} = 1,$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} \sim \sqrt[4]{x} \text{ con } x \to 0.$$

3) Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

las funciones $f(x) = a^x - 1$ y $g(x) = x$ con $x \to 0$ son equivalentes cuando y sólo cuando $a = e$.

4) En este caso no existe $\lim\limits_{x \to 0} (f(x)/g(x))$. Pero, a pesar de todo, las funciones dadas con $x \to 0$ son equivalentes, ya que con $x \neq 0$ existe la función $\varphi(x)$ y, precisamente $\varphi(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, tal que

$$g(x) = \varphi(x) f(x) \text{ y } \lim_{x \to 0} \varphi(x) = 1,$$

lo que significa que $g(x) \sim f(x)$, $x \to 0$. ▲

La función $g(x)$ se llama *infinitamente pequeña en comparación con la función* $f(x)$ *con* $x \to x_0$, si en cierto intervalo $(\alpha; \beta)$ que contiene el punto x_0 existe tal función $\varphi(x)$ que

$$g(x) = \varphi(x) f(x), \quad x \in (\alpha; \beta), \ x \neq x_0, \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0. \quad (24)$$

De esta definición se desprende que cuando

$$f(x) \neq 0, \quad x \in (\alpha; \beta), \quad x \neq x_0,$$

la función $g(x)$ será infinitamente pequeña en comparación con $f(x)$ con $x \to x_0$ cuando y sólo cuando

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Si $g(x)$ es una función infinitamente pequeña en comparación con $f(x)$ cuando $x \to x_0$, se escribe

$$g(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0. \quad (25)$$

Esta anotación se lee: «$g(x)$ es *o* pequeña de $f(x)$ cuando x tiende a x_0».

De manera análoga se define el sentido de la anotación $g(x) = o(f(x))$ con $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

En caso particular, cuando $f(x) = 1$, la anotación $g(x) = o(1)$, $x \to x_0$ significa que la función $g(x)$ es *infinitamente pequeña* con $x \to x_0$.

Si $g(x) = o(f(x))$, $x \to x_0$, donde $f(x)$ es infinitamente pequeña con $x \to x_0$, $g(x)$ lleva el nombre de *infinitamente pequeña de más alto grado en comparación con* $f(x)$, *cuando* $x \to x_0$.

Ejemplo 13. Demuestren o refuten las afirmaciones:

1) $\operatorname{sen} x^3 = o(x^2)$, $x \to 0$. 2) $x^2 = o(\operatorname{sen} x^3)$, $x \to 0$.

3) $1 + x = o(1/x)$, $x \to 0$.

4) $x^2 D(x) = o(xD(x))$, $x \to 0$,

donde

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ es racional,} \\ 0 \text{ si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

$\triangle$1) La afirmación es cierta, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3} = 0.$$

2) La afirmación no es cierta, ya que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x^3} \neq 0$.

3) La afirmación es cierta, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{1/x} = \lim_{x \to 0} x(x+1) = 0.$$

4) Aquí la función $f(x) = xD(x)$ se reduce a cero en los puntos cuan se quiera próximos al punto $x = 0$. Por ello, hagamos uso de la definición del símbolo $o(f)$. Ya que existe tal función $\varphi(x)$ y, precisamente $\varphi(x) = x$, que

$$g(x) = x^2D(x) = \varphi(x) f(x) \text{ y } \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0,$$

entonces $x^2D(x) = o(xD(x))$, $x \to 0$, es decir, la afirmación es cierta. ▲

Al hacer uso del símbolo $o(f)$, $x \to x_0$, es conveniente tener en cuenta las siguientes reglas:

1) $o(Cf) = o(f)$, C es una constante.
2) $o(f) + o(f) = o(f)$.
3) $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$.
4) $o(o(f)) = o(f)$.

Debido a estas relaciones, el primer miembro de cada una de estas igualdades puede ser sustituido por el segundo; hablando en general, no se puede sustituir el segundo miembro por el primero.

En múltiples casos, el cálculo de los límites de las funciones se simplifica notoriamente si se hace uso de la equivalencia de las funciones, las reglas de empleo del símbolo $o(f)$ y el siguiente teorema: $g(x) \sim f(x)$, $x \to x_0$, cuando y sólo cuando

$$g(x) = f(x) + o(f(x)), \quad x \to x_0.$$

Al calcular el límite del cociente de dos funciones, con frecuencia, resulta ser útil el siguiente teorema:

Si $f(x) \sim f_1(x)$ y $g(x) \sim g_1(x)$, $x \to x_0$ y si existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Ejemplo 14. Calculen:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \operatorname{sen}^2 x) + xe^x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos x}{\operatorname{tg} x^2}$. 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\ln\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) - \ln \dfrac{x}{2}\right)$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg} x}$.

△ 1) Con $x \to 0$ tenemos

$$\operatorname{sen} 2x \sim 2x, \quad \operatorname{arctg} 3x \sim 3x, \quad xe^x \sim x.$$

Como $\ln(1 + u) \sim u$ con $u \to 0$, entonces

$$\ln(1 + 3x + \operatorname{sen}^2 x) \sim 3x + \operatorname{sen}^2 x \sim 3x \text{ con } x \to 0.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} 2x = 2x + o(2x), \ \operatorname{arctg} 3x = 3x + o(3x),$$
$$\ln(1 + 3x + \operatorname{sen}^2 x) = 3x + o(3x), \ xe^x = x + o(x)$$

y, por ello,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\operatorname{sen}^2 x) + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(2x) + 6x + 2\cdot o(3x) + 3x^2}{3x + o(3x) + x + o(x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x + o(x)}{4x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{8 + \frac{o(x)}{x}}{4 + \frac{o(x)}{x}} = \frac{8 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x)}{x}}{4 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x)}{x}} = 2.$$

Aquí hemos hecho uso de la relación $o(2x) + 2\cdot o(3x) + 3x^2 = o(x)$ y $o(3x) + o(x) = o(x)$ con $x \to 0$.

La solución puede escribirse de manera más corta. Como con $x \to 0$

$$\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{arctg} 3x + 3x^2 \sim 8x,$$
$$\ln(1 + 3x + \operatorname{sen}^2 x) + xe^x \sim 4x,$$

entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\operatorname{sen}^2 x) + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{8x}{4x} = 2.$$

2) Hacemos uso de la equivalencia

$$2\ln\cos x = \ln(1 - \operatorname{sen}^2 x) \sim -\operatorname{sen}^2 x \sim -x^2,$$
$$\operatorname{tg} x^2 \sim x^2 \text{ con } x \to 0,$$

obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{tg} x^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(-x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln\frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2}{x} + o\left(\frac{2}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{o(1/x)}{1/x}\right) = 2.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg} x} = e^a,$

donde

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{o(x^2)}{x}}{1+\frac{o(x)}{x}}=0.$$

Por lo tanto, el límite buscado es igual a 1. ▲

9. Límite parcial de una función. El número a recibe el nombre de *límite parcial de la función $f(x)$ con $x\to x_0$* si existe la sucesión $\{x_n\}$, $x_n\neq x_0$ tal que $x_n\to x_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$.

De forma análoga se definen los límites infinitos y parciales unilaterales.

Los límites parciales mínimo y máximo de la función $f(x)$ con $x\to x_0$ se denominan *límite inferior y superior* de la función y se designan $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ y $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$.

Ejemplo 15. Hallen todos los límites parciales de la función $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ con $x\to 0$.

△ Si $|a|\leqslant 1$, $x_n=\frac{1}{\arcsin a+2\pi n}\to 0$ y $f(x_n)=\operatorname{sen}\frac{1}{x_n}\to a$, es decir, cada número a tal que $|a|\leqslant 1$ es un límite parcial.

De las desigualdades $|\operatorname{sen}(1/x)|\leqslant 1$, $x\neq 0$, se desprende que la función no tiene otros límites parciales. Por ello, $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x)=$

$=-1$ y $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x)=1$. ▲

9.1. Determinen con qué valores positivos de δ de la desigualdad $0<|x-x_0|<\delta$ se deduce la desigualdad $|f(x)-a|<\varepsilon$ si:

1) $f(x)=x^2$; $x_0=2$; $a=4$; $\varepsilon=0{,}001$.

2) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$; $x_0=3$; $a=\frac{1}{2}$; $\varepsilon=0{,}01$.

3) $f(x)=\operatorname{sen} x$; $x_0=\pi/2$; $a=1$; $\varepsilon=0{,}01$.

4) $f(x)=\operatorname{sign} x$; $x_0=0$; $a=1$; $\varepsilon=1{,}5$.

9.2. Determinen con qué valores positivos de δ de la desigualdad $|x-1|<\delta$ se deduce la desigualdad:

1) $|\log x|<2$. 2) $|\log x|<1$.
3) $|\log x|<0{,}1$. 4) $|\log x|<0{,}01$.

9.3. Para cada número $\varepsilon>0$ hallen tal número $\delta>0$ con el que de la desigualdad $0<|x-1|<\delta$ se deduce la desigualdad

$$\left|\frac{3x^2-4x+1}{x-1}-2\right|<\varepsilon.$$

9.4. Para cada número $\varepsilon>0$ hallen tal número $\delta>0$ con el que de la desigualdad $0<|x-3|<\delta$ se deduce la desigualdad

$$\left|\frac{x^3-3x^2}{x-3}-9\right|<\varepsilon.$$

9.5. ¿Con cuáles δ de la desigualdad $|x|>\delta$ se deduce la desigualdad $1/(1+x^2)<\varepsilon$, donde ε es cierto número positivo?

9.6. ¿Con cuáles δ de la desigualdad $x<\delta$ se deduce la desigualdad $\operatorname{arctg} x+\pi/2<\varepsilon$, donde ε es cierto número positivo? ¿A qué es igual $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x$?

9.7. Demuestren que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe si:

1) $f(x)=\operatorname{arcctg}(1/x)$. 2) $f(x)=\operatorname{sign}\operatorname{sen}(1/x)$.

9.8. Demuestren que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ no existe si:

1) $f(x)=\cos x$. 2) $f(x)=x-E(x)$.

9.9. Sea que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no tienen límite en el punto x_0. ¿Se desprende de esto que $f(x)+g(x)$ y $f(x)\,g(x)$ tampoco tienen límite en dicho punto?

9.10. Demuestren que si para cualquier sucesión $\{x_n\}$, convergente hacia el punto x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge, entonces, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe.

9.11. Demuestren que si de cualquier sucesión $\{x_n\}$, convergente hacia el punto x_0, es posible formar la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ para la que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=a$, entonces, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

9.12. Demuestren que si la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 límite finito, $f(x)=O(1)$ con $x\to x_0$.

9.13. Demuestren que si la función $f(x)$ satisface la desigualdad $f(x)\geqslant C$, $x\in(\alpha;\beta)$, $x\neq x_0\in(\alpha;\beta)$, C es una constante y existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, entonces es válida la desigualdad

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\geqslant C.$$

9.14. Demuestren que si la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 límite finito positivo igual al número a, entonces, existe tal intervalo $(\alpha;\beta)$ que contiene el punto x_0, que

$$f(x)>a/2,\quad x\in(\alpha;\beta),\quad x\neq x_0.$$

9.15. Demuestren que si en el intervalo $(\alpha;\beta)$ que contiene el punto x_0, es válida la desigualdad

$$g_1(x)\leqslant f(x)\leqslant g_2(x),\quad x\neq x_0,$$

y las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ tienen en el punto x_0 un mismo límite finito igual a a, entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a.$$

9.16. Enuncien las afirmaciones:

1) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a$. 2) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$. 4) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-\infty$.

9.17. Haciendo uso de los símbolos de lógica escriban las afirmaciones:

1) $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=0$. 2) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=4$.

3) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=-\infty$. 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty$.

9.18. Haciendo uso de los símbolos de lógica escriban las afirmaciones:

1) $\lim\limits_{x\to -0} f(x)\neq 0$. 2) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)\neq 4$.

3) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)\neq -\infty$. 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\neq \infty$.

9.19. Haciendo uso de los símbolos de lógica escriban las afirmaciones:

1) La función $f(x)$ tiene en el punto x_0 límite finito.

2) La función $f(x)$ no tiene en el punto x_0 límite finito.

Hallen los límites de las funciones (**9.20—9.38**):

9.20. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$. 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$. 3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$.

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$.

9.21. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+5x^6+4x^3}{x^7+2x^3}$. 2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x+1}{x^8-2x+1}$. 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}$.

6) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15}{x^4-29x^2+100}$.

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$. 8) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$.

9.22. 1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+5)^5+(x+6)^5+(x+7)^5}{x^5+5^5}$.

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)^3(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$. 3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x^3+7x-1)^4}{(2x^4-13x^2+x)^3}$.

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(1+x^{11}+7x^{13})^3}{(1+x^4)^{10}}$. 5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$.

9.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_k(x)}$, $P_n(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$, $Q_k(x)=b_0x^k+\ldots$
$\ldots+b_k$ son polinomios.

9.24. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x^k-1}$, $n,\ k\in\mathbb{N}$.

2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-x^{k+1}+x^k-nx+n-1}{(x-1)^2}$, $n,\ k\in\mathbb{N}$.

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)}$, $n,\ k\in\mathbb{N},\ k\leqslant n$.

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{k}{1-x^k}\right)$, $n,\ k\in\mathbb{N}$.

9.25. 1) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$.

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$. 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}-2-x}{x^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$. 6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{7+2x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}$.

7) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt[3]{9+x}+x+7}{\sqrt[3]{15+2x}+1}$.

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{2x^2+10x+1}-\sqrt[7]{x^2+10x+1}}{x}$.

9.26. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+14x}{2x+\sqrt[3]{x^2}}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6-1}{\sqrt{x^{12}+5x^5-1}}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6}+|x|}{\sqrt[5]{x^4+2}-|x|}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}$.

9.27. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1})$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2)$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4})$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2x^4}\right)$.

9.28. 1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1}$, $n,\ k\in\mathbb{N}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $a>0$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[k]{1+bx}}{x}$, $n,\ k\in\mathbb{N}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[n]{1+ax}\,\sqrt[k]{1+bx}-1}$, $n,\ k\in\mathbb{N}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$, $n\in\mathbb{N}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[n]{(1+x^2)(2+x^2)\ldots(n+x^2)}-x^2)$, $n\in\mathbb{N}$.

9.29. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{sen} x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} 5x$. 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha x}{\operatorname{sen} \beta x}$, $\beta\neq 0$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 6x-\operatorname{sen} 7x}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)$.

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x^3-1}{\operatorname{sen}^6 2x}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}+2x\right)-1}{\operatorname{sen} x}$.

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(1+x) \operatorname{tg}(1-x)-\operatorname{tg}^2 1}{\operatorname{tg}^2 x}$.

9.30. 1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen} 7\pi x}{\operatorname{sen} 2\pi x}$. 2) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\pi^2-x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$. 4) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 (\cos(1/x)-\cos(3/x))$.

5) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$. 6) $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$.

7) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{\cos x}-2x\,\mathrm{tg}\,x\right)$.

8) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1+\cos x}$.

9.31. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2 x}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\,\mathrm{sen}\,3x}-\sqrt{1-4\,\mathrm{sen}\,5x}}{\mathrm{sen}\,6x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\mathrm{tg}\,x^2}$. 5) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\sqrt[4]{\mathrm{sen}\,x}-\sqrt[3]{\mathrm{sen}\,x}}{\cos^2 x}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{sen}\sqrt{x^2+1}-\mathrm{sen}\sqrt{x^2-1}\right)$.

9.32. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}\,2x}{x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x-3\,\mathrm{arcsen}\,4x}{\mathrm{sen}\,5x-6\,\mathrm{arctg}\,7x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi-4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\mathrm{arcsen}\,x}-\sqrt[3]{1+\mathrm{arctg}\,2x}}{\sqrt{1+\mathrm{arctg}\,3x}-\sqrt{1-\mathrm{arcsen}\,4x}}$.

9.33. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{x/(2x+1)}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x}$. 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$.

9.34. 1) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{x-10}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\log_2\frac{10+x}{5+x}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1-\mathrm{sen}\,x}{\ln(1+x)}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)}{x}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 1/4}\frac{1-\mathrm{ctg}\,\pi x}{\ln\mathrm{tg}\,\pi x}$. 8) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln\cos\frac{\pi}{x}$.

9.35. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^x-1}{2^x-1}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(3^{1/x}-1)$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\,(4^{1/x}-4^{1/(x+1)})$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{2x}}{\mathrm{tg}\,x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\mathrm{sen}\,5x}-e^{\mathrm{sen}\,x}}{\ln(1+2x)}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\mathrm{sen}\,x^2}-1}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

9.36. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+x}-x)^{1/x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x^4)^{1/\operatorname{sen}^2 x}$. 4) $\lim\limits_{x\to\pi/2} (1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{-1/x^2}$. 6) $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. 8) $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}$.

9) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2}$. 10) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+\operatorname{arctg}^2 x)^{1/\operatorname{arctg} x^2}$.

9.37. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} 2x-1}{\cos x-1}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} 5x}{x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 3x}-e^{\operatorname{sh} x}}{\operatorname{th} x}$. 5) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-\ln \operatorname{ch} x^2)$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$.

9.38. 1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$, $a>0$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a^x-b^x)^2}{a^{x^2}-b^{x^2}}$, $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x^2}$, $a>0$, $b>0$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{1/x}$, $a>0$, $b>0$.

9.39. Hallen a) $f(-0)$, b) $f(+0)$:

1) $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$. 2) $f(x)=\arccos(x-1)$.

3) $f(x)=e^{-1/x^2}$. 4) $f(x)=2^{\operatorname{ctg} x}$.

9.40. Hallen a) $f(x_0-0)$, b) $f(x_0+0)$:

1) $f(x)=\dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}$, $x_0=1$.

2) $f(x)=\operatorname{sign}\cos x$, $x_0=\pi/2$.

3) $f(x)=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$, $x_0=\pi/2$.

4) $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{1/(3-x)}}$, $x_0=3$.

9.41. Hallen a) $f(x_0-0)$, b) $f(x_0+0)$:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$, $x_0=-1$.

2) $f(x)=x+[x^2]$, $x_0=10$.

3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $x_0=1$.

4) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x^n-3}{x^n-1}$, $x_0=1$.

9.42. Hallen a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

1) $f(x)=\operatorname{arctg} x$. 2) $f(x)=\operatorname{arcctg} x$. 3) $f(x)=e^x$.

4) $f(x)=\operatorname{arcsen}\frac{1+x}{1-x}$. 5) $f(x)=\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^x$.

6) $f(x)=\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^x$.

7) $f(x)=\sqrt{1+7x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$.

8) $f(x)=\frac{\ln(1+4^x)}{x}$.

9.43. Calculen los límites:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{\frac{x^3+2x^2}{x+1}}\right)$. 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2-7x+4})$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcsen}(\sqrt{x^2+x}+x)$. 5) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$.

6) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1+\operatorname{sen} x-\cos x}{1+\operatorname{sen} 4x-\cos 4x}\right)^{1/x}$. 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+\sqrt{x})}{(\ln 6+\sqrt[4]{x})}$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(4+5e^{4x})}{\ln(1+2e^{3x})}$. 9) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

10) $\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

9.44. ¿Cuáles de las siguientes funciones son infinitamente pequeñas:

1) $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, $x\to1$.

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$; a) $x\to+\infty$, b) $x\to-\infty$.

3) $f(x)=\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$, $x\to+0$.

4) $f(x)=\frac{1}{1+2^x}$; a) $x\to+\infty$; b) $x\to-\infty$.

5) $f(x)=\operatorname{sen}\ln(x^2+1)-\operatorname{sen}\ln(x^2-1)$, $x\to\infty$.

6) $f(x)=\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^4+x+1)}$, $x\to\infty$?

9.45. ¿Cuáles de las siguientes funciones son infinitamente randes:

1) $f(x)=\frac{1}{x^3-4x^2+4x}-\frac{1}{x^2-3x+2}$, $x\to2$.

2) $f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; a) $x\to+\infty$, b) $x\to-\infty$.

3) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\operatorname{sen} x)^2}}$, $x\to\pi/2$.

4) $f(x)=\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x$; a) $x\to+\infty$, b) $x\to-\infty$.

5) $f(x)=\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$; a) $x\to+\infty$, b) $x\to-\infty$.

6) $f(x)=(1-x)^{1/x^2}$; a) $x\to+0$, b) $x\to-0$?

9.46. ¿Con qué valores de α y β la función $f(x)$ será infinitamente pequeña:

1) $f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}-\alpha x-\beta$; $x\to\infty$.

2) $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x-\beta$; a) $x\to+\infty$, b) $x\to-\infty$.

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}-\alpha x-\beta$; $x\to\infty$.

4) $f(x)=\frac{xe^x}{e^x-1}-\alpha x-\beta$; a) $x\to+\infty$, b) $x\to-\infty$.

5) $f(x)=(x+4)\,e^{1/x}-\alpha x-\beta$; a) $x\to\infty$, b) $x\to-0$.

6) $f(x)=\ln(1+e^{3x})-\alpha x-\beta$; a) $x\to+\infty$, b) $x\to-\infty$.

7) $f(x)=x\operatorname{arctg} x-\alpha x-\beta$; a) $x\to+\infty$; b) $x\to-\infty$?

9.47. ¿Con qué valores de α y β la función $f(x)$ es infinitamente pequeña con $x\to+0$:

1) $f(x)=x^\alpha\operatorname{sen}(1/x^\beta)$. 2) $f(x)=\frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$.

3) $f(x)=x^\alpha\operatorname{arctg}(1/x^\beta)$. 4) $f(x)=(1-x^\alpha)^{x^\beta}$?

9.48. Determinen el orden n de la función infinitamente pequeña con $x\to0$:

1) $f(x)=3\operatorname{sen}^2 x^2-5x^5$. 2) $f(x)=\sqrt{4-x^4}+x^2-2$.

3) $f(x)=1-x^4-\cos x^2$. 4) $f(x)=2\operatorname{sen} x-\operatorname{tg} 2x$.

5) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)$. 6) $f(x)=2^{x^2}-1$.

9.49. Determinen el orden n de la función infinitamente grande:

1) $f(x)=\frac{x^5}{1+x+2x^2}$, $x\to\infty$.

2) $f(x)=\sqrt{x^4+x+1}$, $x\to\infty$.

3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, $x\to+\infty$.

4) $f(x)=\frac{\ln x}{(x-1)^2}$, $x\to1$.

5) $f(x)=\operatorname{ctg}^2 x^3$, $x\to0$.

6) $f(x)=\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^5}$, $x\to0$.

9.50. Establezcan cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $x^2 = o(x)$ con a) $x \to 0$, b) $x \to \infty$.
2) $x = o(x^2)$ con a) $x \to 0$, b) $x \to \infty$.
3) $\sqrt{x^2+1} - x = o(1)$ con a) $x \to +\infty$, b) $x \to -\infty$.
4) $\ln(1+e^x) = o(1)$ con a) $x \to +\infty$, b) $x \to -\infty$.

9.51. Sean $x \to 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant k$. Muestren que

1) $o(x^n) + o(x^k) = o(x^k)$.
2) $o(x^n) \cdot o(x^k) = o(x^{n+k})$.

9.52. ¿Cuáles de los siguientes pares de funciones son de un mismo orden:

1) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x$, a) $x \to 1$, b) $x \to \infty$.
2) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$, $g(x) = \frac{3}{x}$; a) $x \to 1$, b) $x \to \infty$.
3) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$, $g(x) = 1/x$, $x \to \infty$.
4) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $g(x) = 1/x$; a) $x \to +\infty$, b) $x \to -\infty$.
5) $f(x) = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2+x+1}$, $g(x) = 1$, $x \to \infty$.
6) $f(x) = x\cos(1/x)$, $g(x) = x$, $x \to 0$?

9.53. Establezcan cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas con $x \to \infty$:

1) $100x + x \operatorname{sen} x = O(x)$. 2) $x = O(100x + x \operatorname{sen} x)$.
3) $x + x \operatorname{sen} x = O(x)$. 4) $x = O(x + x \operatorname{sen} x)$.
5) $\sqrt{x^2+1} - |x| = O(1/x)$. 6) $1/x = O(\sqrt{x^2+1} - |x|)$.

9.54. Demuestren:

1) $O(O(f)) = O(f)$. 2) $o(O(f)) = o(f)$.
3) $O(o(f)) = o(f)$. 4) $o(f) + O(f) = O(f)$.
5) $o(f) \cdot O(f) = o(f^2)$.

9.55. Sean $x \to 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > k$. Muestren que:

1) $O(x^n) + O(x^k) = O(x^k)$. 2) $O(x^n) \cdot O(x^k) = O(x^{n+k})$.

9.56. Sean $x \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > k$. Muestren que:

1) $O(x^n) + O(x^k) = O(x^n)$. 2) $O(x^n) \cdot O(x^k) = O(x^{n+k})$.

9.57. Determinen con qué valores de α y β las funciones $f(x)$ y $g(x) = \alpha x^\beta$ son equivalentes:

1) $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; a) $x \to +0$, b) $x \to +\infty$.
2) $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$, $x \to 0$.
3) $f(x) = 2e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^5 - 2$, $x \to 0$.

4) $f(x)=\operatorname{sen}^2 2x+\arcsin^2 x+2\operatorname{arctg} x^2, \quad x\to 0.$

5) $f(x)=1-\cos(1-\cos(1/x)), \quad x\to\infty.$

6) $f(x)=E(1/x), \quad x\to\infty.$

9.58. Calculen:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(2-x)+\operatorname{sen}(x-2)^2}{x^2-4}.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}+x^3-1}{\ln\cos x}.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sqrt[10]{x}\cos x+\operatorname{sen}^2 x}{1-\sqrt{1+x^3}}.$

4) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{2\operatorname{sen}\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}+\ln(1+x)}{x+\sqrt{x\sqrt{x}}}.$

5) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}\,(e^{7\sqrt[3]{x}}-1)}{\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+3x)}.$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{sen}2x-2\operatorname{tg}x)^2+(1-\cos 2x)^3}{\operatorname{tg}^7 6x+\operatorname{sen}^6 x}.$

9.59. Sea $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=a$, con la particularidad de que $\varphi(t)\neq a$ con $t\neq t_0$ en cierto entorno del punto t_0. Demuestren que

1) si $f(x)=o(g(x))$ con $x\to x_0$, entonces $f(\varphi(t))=o(g(\varphi(t)))$ con $t\to t_0$;

2) si $f(x)=O(g(x))$ con $x\to x_0$, entonces $f(\varphi(t))=O(g(\varphi(t)))$ con $t\to t_0$.

9.60. Hallen el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $x_0\in\mathbb{R}$, si

$$f(x)=\begin{cases} 1/q \text{ con } x=p/q, \text{ donde } p \text{ y } q \text{ son números enteros primos entre sí} \\ 0 \text{ con } x \text{ irracional.}\end{cases}$$

9.61. Sean $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ y $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$. ¿Se desprende de aquí que $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))=a$?

9.62. Demuestren que si la función $f(x)$, $x\in(x_0;+\infty)$ es acotada en cada intervalo $(x_0;x_1)$ y existe el límite finito o infinito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}\quad(n=0,1,2,\ldots),$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}.$$

9.63. Demuestren que no existe la función racional $R(x)$ con coeficientes enteros tal que para cualquier número racional r se hallará número entero k tal que $R(k) = r$.

9.64. Calculen

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\begin{pmatrix} 1 & x/n \\ -x/n & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{x}.$$

9.65. Hallen $\overline{\lim\limits_{x\to 0}} f(x)$ y $\underline{\lim\limits_{x\to 0}} f(x)$:

1) $f(x) = e^{\cos(1/x^2)}$. 2) $f(x) = \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$.

3) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$. 4) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \frac{1}{x}$.

9.66. Hallen $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)$ y $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)$ si:

1) $f(x) = \frac{\pi}{2} \cos^2 x + \operatorname{arctg} x$.

2) $f(x) = \frac{1+x+6x^2}{1-x+2x^2} \operatorname{sen} x^2$.

3) $f(x) = (\sqrt{4x^2+x+1} - \sqrt{4x^2-x+1})(1+\cos 2x)$.

4) $f(x) = (1+\cos^2 x)^{1/\cos^2 x}$.

9.67. Demuestren que $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} (\cos x + \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x) = 2$.

§ 10. Continuidad de una función

1. Continuidad de una función en un punto.

Definición 1. La función f, definida en el entorno del punto x_0, recibe el nombre de *continua en el punto* x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La definición 1 es equivalente a la siguiente (en el lenguaje «$\varepsilon - \delta$»).

Definición 1'. La función f, definida en el entorno del punto x_0, es continua en dicho punto si para cada $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que para cualquier $x \in D(f)$, que satisfaga la condición $|x - x_0| < \delta$, es cierta la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; abreviando

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) \; (|x - x_0| < \delta \Rightarrow \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

La diferencia $x - x_0$ lleva el nombre de *incremento del argumento* y se designa Δx, en tanto que la diferencia $f(x) - f(x_0)$ se denomina

incremento de la función, correspondiente al incremento dado del argumento Δx, y se designa Δy, es decir,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Con semejantes designaciones, la definición 1 tiene la forma:

Definición 1". La función f, definida en el entorno del punto x_0, se denomina *continua en el punto* x_0 si

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

La función f, definida en el intervalo $(a; x_0]$, lleva el nombre de *continua por la izquierda en el punto* x_0 si

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

La función f, definida en el intervalo $[x_0; b)$, lleva el nombre de *continua por la derecha en el punto* x_0 si

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Ejemplo 1. Demuestren que la función $\sqrt{x}$ es continua en cada punto $x_0 > 0$ y continua por la derecha en el punto $x_0 = 0$.

△ Demostremos la continuidad de $\sqrt{x}$ en el punto $x_0 > 0$ haciendo uso de la definición 1. Transformemos y estimemos el módulo de la diferencia:

$$0 \leqslant |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}.$$

Como el $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$ y $1/\sqrt{x_0}$ es constante, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} = 0.$$

De aquí se desprende que

$$\lim_{x \to x_0} |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = 0,$$

por lo que

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

De modo que la función $\sqrt{x}$ es continua en cada punto $x_0 > 0$.

Demostremos que la función $\sqrt{x}$ es continua en el punto $x_0 = 0$ por la derecha. Sea ε un número positivo tomado al azar. La desigualdad $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ es equivalente a la desigualdad $0 \leqslant x < \varepsilon^2$. Tomemos $\delta = \varepsilon^2$, entonces de la desigualdad $0 \leqslant x < \delta$ se deduce

la desigualdad $\sqrt{x} < \varepsilon$. De forma que $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt{x} = 0$ y, por lo tanto, la función $\sqrt{x}$ es continua por la derecha en el punto $x_0 = 0$. ▲

Ejemplo 2. Demuestren que la función $y = x^4$ es continua en cada punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

△ Hagamos uso de la definición 1''. Para todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y cualquiera Δx tenemos

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^4 - x_0^4 = 4x_0^3 \Delta x + 6x_0^2 (\Delta x)^2 + 4x_0 (\Delta x)^3 + (\Delta x)^4.$$

Empleando los teoremas del límite de la suma y el producto de una función, obtenemos

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} (4x_0^3 \Delta x + 6x_0^2 (\Delta x)^2 + 4x_0 (\Delta x)^3 + (\Delta x)^4) = 0,$$

por consiguiente, la función $y = x^4$ es continua en cada punto $x_0 \in \mathbb{R}$. ▲

Ejemplo 3. Indiquen tal frontera de las desviaciones δ del argumento t de su valor t_0 que la desviación del valor de la función $y = \sigma t^4$ $(\sigma > 0)$ del valor $y_0 = \sigma t_0^4$ no sobrepase ε, es decir, que de la desigualdad $|t - t_0| < \delta$ se desprenda la desigualdad

$$|y(t) - y_0| < \varepsilon. \tag{1}$$

△ Estimemos el módulo de la diferencia

$$|y(t) - y_0| = \sigma |t^4 - t_0^4| \leqslant \sigma |t - t_0| (|t|^3 + t^2 |t_0| + |t| t_0^2 + |t_0|^3).$$

Consideremos sólo tales valores de t para los que

$$|t - t_0| < 1. \tag{2}$$

Entonces, $|t| < |t_0| + 1$ y, como $|t_0| < |t_0| + 1$,

$$|y(t) - y_0| < 4\sigma (|t_0| + 1)^3 |t - t_0|.$$

De aquí se deduce que la desigualdad (1) será cierta si, además de (2), se verificará la desigualdad

$$4\sigma (|t_0| + 1)^3 |t - t_0| < \varepsilon,$$

o sea,

$$|t - t_0| < \frac{\varepsilon}{4\sigma (|t_0| + 1)^3}. \tag{3}$$

Tomemos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{(4 + \varepsilon)\cdot\sigma\cdot(|t_0| + 1)^3}, \tag{4}$$

entonces de la desigualdad $|t - t_0| < \delta$ se deducen las desigualdades (3), (2) y, por lo tanto, también (1). La magnitud δ de (4) se puede tomar como frontera de las desviaciones del argumento. ▲

10.1. Rellenen para la función f la tabla

Δx	0,9	0,5	0,1	0,01
Δy				
Δx	−0,9	−0,5	−0,1	−0,01
Δy				

indicando para cada incremento $\Delta x = x - 1$ el correspondiente incremento de la función $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$; construyan el gráfico de la función f e indiquen en él los puntos correspondientes a $\Delta x = 0{,}5$ y $\Delta x = -0{,}5$:

1) $f(x) = 2x - 1$. 2) $f(x) = x^2$.

3) $f(x) = \sqrt{x}$. 4) $f(x) = 1/x$.

10.2. Para la función $f(x)$ rellenen la tabla

ε	2	0,5	0,01	0,001
δ				

indicando para cada valor dado de ε cierto valor de δ de forma que, para cualquier $x \in D(f)$, de la desigualdad $|x - 1| < \delta$ se desprenda la desigualdad $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$:

1) $f(x) = 2x - 1$. 2) $f(x) = x^2$.

3) $f(x) = \sqrt{x}$. 4) $f(x) = 1/x$.

10.3. Para la función f rellenen la tabla, indicando para cada valor de x_0 el máximo valor de $\delta_{\text{máx}}$ de forma que, para cualquier $x \in D(f)$, de la desigualdad $|x - x_0| < \delta_{\text{máx}}$ se desprenda la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < 0{,}5$:

1) $f(x) = 2x - 1$

x_0	0,01	0,1	1	10
$\delta_{\text{máx}}$				

2) $f(x) = x^2$

x_0	1/4	7/8	17/12	31/16	$(2l^2-1)/4l,\ l \in \mathbb{N}$
$\delta_{\text{máx}}$					

3) $f(x) = 1/x$

x_0	0,1	0,25	1	2	8
$\delta_{\text{máx}}$					

4) $f(x) = \sqrt{x}$

x_0	0	1/16	1/4	25/81	1	4
$\delta_{\text{máx}}$						

10.4. La función $\delta(x_0)$, $x_0 > 0$, está definida del modo siguiente: $\delta(x_0)$ es el mayor de todos los números δ tales que, para cualquier $x \in D(f)$, de la desigualdad $|x - x_0| < \delta$ se desprende la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < 1/2$. Construyan el gráfico $\delta(x_0)$, $x_0 > 0$ si:

1) $f(x) = 1/x$. 2) $f(x) = \sqrt{x}$.

10.5. Demuestren que la función $y(x)$ es continua en cada punto de su campo de definición si:

1) $y = 2x - 1$. 2) $y = x^2$. 3) $y = \sqrt{x}$.
4) $y = 1/x$. 5) $y = ax + b$, $a \neq 0$. 6) $y = |x|$.
7) $y = x^3$. 8) $y = \sqrt[3]{x}$. 9) $y = 1/x^2$.

10.6. Haciendo uso de la desigualdad $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$ demuestren la continuidad de la función y en cada punto del campo de definición si:

1) $y = \operatorname{sen} x$. 2) $y = \cos x$. 3) $y = \operatorname{sen}(ax + b)$.

10.7. Enuncien en el lenguaje «$\varepsilon - \delta$», la definición de continuidad 1) por la izquierda, 2) por la derecha, en el punto x_0 de la función y escríbanla empleando los símbolos $\exists$, $\forall$.

10.8. 1) Demuestren que la función $\sqrt[4]{1 - x}$ es continua en cada punto $x_0 < 1$ y continua por la izquierda en el punto $x_0 = 1$.

2) Demuestren que la función $xE(x)$ es continua por la derecha en cada punto $x_0 = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

10.9. Haciendo uso de las propiedades del límite y de los resul-

tados de los problemas **10.5—10.6**, demuestren la continuidad de la función $y(x)$ en cada punto del campo de definición si:

1) $y=\frac{2x-1}{x^2+2}$. 2) $y=\operatorname{tg} x$. 3) $y=x^2+2\operatorname{sen} x$.

4) $y=\sqrt{x}\operatorname{sen} 2x$. 5) $y=x^n$, $n\in\mathbb{N}$. 6) $y=1/x^n$, $n\in\mathbb{N}$.

10.10. Empleando la monotonía de la función $y=a^x$, $x\in\mathbb{R}$, y que $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}=1$ (véase § 8 ejemplo 9 y el problema 8.26), demuestren la continuidad en cada punto $x\in\mathbb{R}$ de la función

$$y=a^x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

10.11. La función f está definida en el entorno del punto x_0, salvo en el propio punto x_0. Realicen la definición «definitiva» de la función f, prefijando $f(x_0)$ de modo que la función obtenida sea continua en el punto x_0 si:

1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$, $x_0=-1$. 2) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$, $x_0=1$.

3) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $x_0=0$. 4) $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $x_0=0$.

5) $f(x)=x\operatorname{ctg} x$, $x_0=0$. 6) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$, $x_0=0$.

10.12. Enuncien la definición de función continua en un punto, haciendo uso de la definición de límite de una función según Heine (es decir, en el lenguaje de las sucesiones).

10.13. Demuestren que si la función es continua en un punto, entonces ella es acotada en cierto entorno de dicho punto.

10.14. Sea la función f continua en el punto x_0 y $f(x_0)\neq 0$. Demuestren que existen un número $C>0$ y el entorno del punto x_0 tales que para cualquier x de ese entorno es cierta la desigualdad $|f(x)|\geqslant C$.

10.15. La función f es continua en el punto x_0 y en cualquier entorno de él hay tantos valores de x en los que la función es positiva, como valores de x en los que la función es negativa. Hallen $f(x_0)$.

10.16. Sea que la función está definida en el entorno del punto x_0. Haciendo uso de los símbolos $\exists$, $\forall$ enuncien la afirmación de que la función no es continua en el punto x_0.

10.17. Demuestren que la función f no es continua en el punto x_0; construyan el gráfico de esa función si:

$$1)\quad f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0,\quad x_0=0.\end{cases}$$

$$2)\quad f(x)=\begin{cases} 1/x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\quad x_0=0.\end{cases}$$

3) $f(x)=\operatorname{sign}(x+1)$, $x_0=-1$.

4) $f(x)=\begin{cases} 1/x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0, \quad x_0=0. \end{cases}$

5) $f(x)=E(x),\ x_0=2.$

---

2. Puntos de discontinuidad de una función.

Definición 2. Sea que la función f está definida en el entorno del punto x_0, excepto, posiblemente, el propio punto x_0. El punto x_0 se denomina *punto de discontinuidad de la función* f en los casos siguientes:

1) la función f no está definida en dicho punto;

2) la función f está definida en el punto x_0, pero

a) no existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

b) existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, pero $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

Si existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, pero bien $f(x)$ no está definida en el punto x_0, o bien $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, entonces x_0 se llama *punto de discontinuidad evitable*.

Si en el punto de discontinuidad x_0 existe

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0), \tag{5}$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0), \tag{6}$$

entonces x_0 se denomina *punto de discontinuidad de primer género*, mientras que la diferencia

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+0)-f(x_0-0), \tag{7}$$

salto de la función f en el punto x_0. Se designa también $\Delta_{x_0} f$.

Si en el punto de discontinuidad x_0 no existe al menos uno de los límites $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ o bien $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, entonces x_0 recibe el nombre de *punto de discontinuidad de segundo género*.

Si el punto x_0 es el punto de discontinuidad de una función, ésta lleva el nombre de *discontinua en el punto* x_0.

Se emplean los términos: *función continua*, *función discontinua*. Se denomina continua una función continua en cada punto del campo de definición (si la función está definida en el extremo del intervalo, se tiene en cuenta la continuidad por la izquierda y por la derecha, respectivamente). Se denomina discontinua una función que tenga al menos un punto de discontinuidad.

Ejemplo 4. Hallen los puntos de discontinuidad de la función, establezcan su género, calculen los saltos en los puntos de discontinuidad de 1er género, construyan el gráfico:

1) $y=(\text{sign } x)^2$. 2) $y=E(x)$. 3) $y=\dfrac{|x|-x}{x^2}$.

△ 1) De la definición de la función sign x se desprende que:

$$(\text{sign } x)^2=\begin{cases} 1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

El gráfico de esta función se ofrece en la fig. 56. La función $y=(\text{sign } x)^2$ es continua en todos los puntos, salvo $x=0$. En ese mismo punto $y(-0)=y(+0)\neq y(0)$. Es decir, $x=0$ es el punto de discontinuidad evitable.

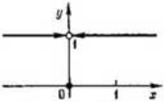


Fig. 56

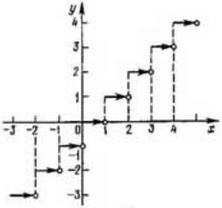


Fig. 57

2) Sea $n\in\mathbb{Z}$. Si $n-1\leqslant x<n$, entonces $E(x)=n-1$, pero si $n\leqslant x<n+1$, $E(x)=n$. El gráfico se muestra en la fig. 57. Si x_0 no es un número entero, existirá un entorno del punto x_0 (que no contiene números enteros), en el que la función es constante, por lo que, además, es continua en el punto x_0. Si, por lo contrario, $x_0=n$ es un número entero, entonces $E(n-0)=n-1$, $E(n+0)=n$, y, por consiguiente, $x_0=n$ es un punto de discontinuidad de 1er género, con ello, $\Delta E(n)=1$.

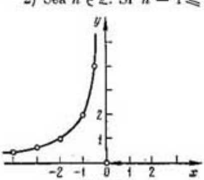


Fig. 58

3) La función $y=(|x|-x)/x^2$ está definida para toda $x\in\mathbb{R}$, excepto $x=0$. Por lo tanto, $x=0$ es el punto de discontinuidad de dicha función. Ya que

$$y=\frac{|x|-x}{x^2}=\begin{cases} 0, & x>0,\\ -2/x, & x<0,\end{cases}$$

entonces, $\lim\limits_{x\to+0} y=0$, $\lim\limits_{x\to-0} y=+\infty$, lo que significa que $x=0$

es un punto de discontinuidad de 2° género. El gráfico de esta función se muestra en la fig. 58. ▲

10.18. Hallen los puntos de discontinuidad de la función, establezcan su género, hallen los saltos de la función en los puntos de discontinuidad de 1^er^ género, construyan el gráfico de la función:

1) $y=\begin{cases} 1/(x-1), & x<0, \\ (x+1)^2, & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 1-x, & 2<x. \end{cases}$

2) $y=\dfrac{|x+2|}{x+2}$. 3) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$. 4) $y=\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$.

5) $y=x-E(x)$. 6) $y=\dfrac{1}{x-E(x)}$. 7) $y=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}$.

8) $y=\dfrac{2\,\text{sign}\,(1-x)}{(\text{sign}\,(x+1))^2\,(x+1+(x-1)\,\text{sign}\,x)}$.

9) $y = 1/\cos x$. 10) $y = x/\text{sen}\, x$.

10.19. Establezcan existe o no el valor a con el que la función f es continua en el punto x_0 si:

1) $f(x)=\begin{cases} x\,\text{sen}\,(1/x), & x\neq 0, \\ a, & x=0, \quad x_0=0. \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, & x\neq -1, \\ a, & x=-1, \quad x_0=-1. \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} ax^2+1, & x>0, \\ -x, & x\leqslant 0, \quad x_0=0. \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leqslant 0, \\ a(x-1), & x>0, \quad x_0=0. \end{cases}$

10.20. Establezcan existen o no los valores a y b con los que la función f es continua en su campo de definición si:

1) $f(x)=\begin{cases} (x-1)^3, & x\leqslant 0, \\ ax+b, & 0<x<1, \\ \sqrt{x}, & x\geqslant 1. \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant 1, \\ x^2+ax+b, & |x|>1. \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}, & |x|\neq 1, \\ a, & x=-1, \\ b, & x=1. \end{cases}$

$$4)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos(x/2)}{\operatorname{sen} x}, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right],\ x\neq 0,\ x\neq\pi,\\ a, & x=0,\\ b, & x=\pi.\end{cases}$$

10.21. Demuestren que si la función es monótona, cualquiera de sus puntos de discontinuidad es de 1er género.

10.22. Demuestren que la función

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ es un número racional},\\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional},\end{cases}$$

es discontinua en cada punto.

10.23. Demuestren que la función

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x \text{ es un número racional},\\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional},\end{cases}$$

es continua en el punto $x = 0$ y discontinua en el resto de los puntos.

---

3. Propiedades de las funciones continuas en un punto. Si las funciones f y g son continuas en el punto x_0, entonces en cierto entorno de dicho punto están definidas las funciones cf (c es una constante) $f+g$, fg y ellas son continuas en el punto x_0. Si, además, $g(x_0)\neq 0$, en cierto entorno del punto x_0 está definida la función f/g y ella es continua en el punto x_0.

Si la función $y = g(x)$ es continua en el punto x_0 y la función $f(y)$ es continua en el punto $y_0 = g(x_0)$, entonces, en cierto entorno del punto x_0 está definida la composición $f(g(x))$ y ella es continua en el punto x_0.

De estas propiedades se desprende que el signo de límite se puede permutar con el signo de función continua y también se deduce la regla de cambio de la variable durante el cálculo del límite (véase § 9).

10.24. Demuestren la continuidad de una función en cada punto de su campo de definición:

1) $y=3x^5+\dfrac{1}{x^3}$. 2) $y=\operatorname{sh} x$. 3) $y=\sqrt[3]{x^2-6x^5}$.

4) $y=\dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x^4+2x^2}$. 5) $y=\cos\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$.

6) $y=xe^{(\operatorname{sen} x)/x}$.

10.25. Analicen la continuidad de las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$ en los puntos donde están definidas las composiciones si:

1) $f(x) = \text{sign}\, x$, $g(x) = 1 + x^2$.
2) $f(x) = \text{sign}\, x$, $g(x) = x^3 - x$.
3) $f(x) = \text{sign}\,(x - 1)$, $g(x) = \text{sign}\,(x + 1)$.
4) $f(x) = \text{sign}\, x$, $g(x) = 1 + x - E(x)$.

10.26. Demuestren que un polinomio es una función continua en cada punto.

10.27. Demuestren que la función

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P y Q son polinomios no nulos, es continua en cada punto x_0, donde $Q(x_0) \neq 0$.

10.28. 1) La función f es continua en el punto x_0, en tanto que la función g es discontinua en el punto x_0. Demuestren que la función $f + g$ es discontinua en dicho punto.

2) Aduzcan un ejemplo de las funciones f y g, discontinuas en el punto x_0, cuya suma: a) es discontinua en el punto x_0; b) es continua en el punto x_0.

10.29. 1) Aduzcan un ejemplo de la función f continua en el punto x_0 y de la función g discontinua en el punto x_0, cuyo producto: a) es discontinuo en el punto x_0; b) continuo en el punto x_0.

2) Aduzcan un ejemplo de las funciones f y g discontinuas en el punto x_0, cuyo producto: a) es discontinuo en el punto x_0; b) es continuo en el punto x_0.

10.30. Aduzcan un ejemplo de las funciones f y g continuas en el punto x_0, cuyo cociente f/g es discontinuo en el punto x_0.

10.31. Demuestren la regla de cambio de la variable para los límites de funciones continuas: sea la función $y = g(x)$ continua en el punto x_0, en tanto que la función $f(y)$ es continua en el punto $y_0 = g(x_0)$; entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y).$$

10.32. Demuestren la permutabilidad del signo de límite y del signo de función continua. Sea que para la función $y = g(x)$ existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, mientras que la función $f(y)$ es continua en el punto y_0; entonces, en cierto entorno del punto x_0, excepto, posiblemente, ese propio punto, está definida la composición $f(g(x))$ y existe

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(y_0).$$

---

4. Propiedades de funciones continuas en un segmento. La función recibe el nombre de *continua en el segmento* $[a; b]$ si ella es conti-

nua en cada punto del intervalo $(a; b)$ y es continua en el punto a por la derecha y en el punto b, por la izquierda.

Sea que la función está definida y es continua en el segmento $[a; b]$. Entonces esta función

1) es acotada en $[a; b]$;

2) alcanza en $[a; b]$ sus cotas superior e inferior, es decir, existen tales $x_1, x_2 \in [a; b]$ que

$$f(x_1) = \sup_{[a;\, b]} f(x), \quad f(x_2) = \inf_{[a;\, b]} f(x)$$

(*teoremas de Weierstrass*).

Sea que la función está definida y es continua en el segmento $[a, b]$. Entonces, para cualquier número C contenido entre $f(a)$ y $f(b)$ habrá tal punto $\xi \in [a; b]$ que $f(\xi) = C$ (*teorema de valores intermedios*).

Sea que la función f está definida, estrictamente crece (decrece) y es continua en el segmento $[a; b]$. Entonces, ella tiene una función inversa que está definida, estrictamente crece (decrece) y es continua en el segmento $[f(a); f(b)]$ (correspondientemente $[f(b); f(a)]$) (*teorema de la continuidad de la función inversa*).

Sea que la función f está definida, estrictamente crece (decrece) y es continua en el intervalo $(a; b)$ y sean

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Entonces, ella tiene una función inversa que está definida, estrictamente crece (decrece) y es continua en el intervalo $(c; d)$ (correspondientemente en $(d; c)$).

Con ello, si $a = -\infty$, por el límite $\lim\limits_{x \to -\infty+0} f(x)$ se entiende $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, mientras que si $b = +\infty$, por el límite $\lim\limits_{x \to +\infty-0} f(x)$, el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

5. Continuidad de una función prefijada paramétricamente. Sea que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ están definidas y son continuas en el intervalo $(\alpha; \beta)$ y que la función $\varphi(t)$ es estrictamente monótona en $(\alpha; \beta)$. Entonces el sistema de ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

define la función única y continua

$$y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

en el intervalo $(a; b)$, donde

$$a = \lim_{t \to \alpha+0} \varphi(t), \quad b = \lim_{t \to \beta-0} \varphi(t).$$

6. Continuidad de funciones elementales. Todas las funciones elementales fundamentales: constante, exponencial, logarítmica, potencial, trigonométricas, trigonométricas inversas, son continuas en su campo de definición.

Ejemplo 5. Sea que la función f está definida y es continua en el segmento $[a; b]$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f$. Demuestren que para cualquiera $C \in [m; M]$ habrá tal $\xi \in [a; b]$ que $f(\xi) = C$.

△ Según el primer teorema de Weierstrass la función f es acotada en $[a; b]$, por ello sus cotas superior e inferior son números y tiene sentido hablar del segmento $[m; M]$. Según el segundo teorema de Weierstrass, existen tales x_1, $x_2 \in [a; b]$ que $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. Supongamos que $x_1 < x_2$. Según el teorema de los valores intermedios en el segmento $[x_1; x_2]$ habrá tal número ξ que $f(\xi) = C$. Si $x_1 > x_2$, el teorema de los valores intermedios debe aplicarse al segmento $[x_2; x_1]$. Pero si $x_1 = x_2$, $m = M$ y f será constante también en este caso la afirmación es evidente. ▲

Ejemplo 6. Sea $a > 1$, $b > 1$. Demuestren que la ecuación

$$a^y + b^y = x \tag{8}$$

prefija la única función continua $y(x)$ definida en $(0; +\infty)$.

△ Las funciones a^y y b^y crecen estrictamente y son continuas en $\mathbb{R}$. Esto significa que, asimismo, su suma crece estrictamente y es continua en $\mathbb{R}$. Además,

$$\lim_{y\to-\infty} (a^y + b^y) = 0, \quad \lim_{y\to+\infty} (a^y + b^y) = +\infty.$$

Debido a esto, según el segundo de los indicados teoremas sobre la continuidad de la función inversa, existe una función inversa a la función $a^y + b^y$, $y \in \mathbb{R}$, definida, estrictamente creciente y continua sobre $(0; +\infty)$. Este resultado puede ser expresado también de otra forma: para cualquier $x > 0$, la ecuación (8) tiene la raíz y, que es única, dependiente continuamente de x y creciente estrictamente con el crecimiento de x. ▲

Ejemplo 7. Demuestren que la sucesión prefijada con procedimiento recurrente:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \cos x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge y su límite es la solución de la ecuación $x = \cos x$.

△ Es evidente que x_2 y todos los términos de grandes números satisfacen la condición $0 < x_n \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión dada es acotada (fig. 59). Con $n \geqslant 3$ transformemos la diferencia

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \cos x_n - \cos x_{n-2} = -2 \operatorname{sen} \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x_n + x_{n-2}}{2}.$$

Como

$$0 < \frac{x_n + x_{n-2}}{2} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \leqslant 1,$$

tendremos

$$\operatorname{sen} \frac{x_n + x_{n-2}}{2} > 0, \ \operatorname{sign}\left(\operatorname{sen} \frac{x_n - x_{n-2}}{2}\right) = \operatorname{sign}(x_n - x_{n-2}).$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{sign}(x_{n+1} - x_{n-1}) = -\operatorname{sign}(x_n - x_{n-2})$$

con $n \geqslant 3$, mientras que con $n \geqslant 4$

$$\operatorname{sign}(x_{n+1} - x_{n-1}) = -(-\operatorname{sign}(x_{n-1} - x_{n-3})) = \\ = \operatorname{sign}(x_{n-1} - x_{n-3}). \qquad (9)$$

Consideremos la subsucesión $\{x_{2k-1}\}$ con números impares. Tenemos

$$x_3 = \cos x_2 = \cos \cos 0 = \cos 1 > 0,$$

es decir, $x_3 > x_1$. De aquí y de (9) se desprende, de acuerdo con el principio de inducción matemática, que $\{x_{2k-1}\}$ es una sucesión creciente: $x_{2k+1} > x_{2k-1}$; $k \in \mathbb{N}$. Para la subsucesión con números pares $\{x_{2k}\}$, tenemos

$$x_4 = \cos x_3 = \cos \cos 1 < 1,$$

es decir, $x_4 < x_2$; de aquí y de (9), llegamos a la conclusión de que $\{x_{2k}\}$ es una sucesión decreciente. Así, pues, las subsucesiones $\{x_{2k-1}\}$ y $\{x_{2k}\}$ son acotadas y monótonas, por lo tanto, ellas convergen. Designemos

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = a, \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = b.$$

De la igualdad $x_{2k} = \cos x_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, debido a la continuidad de la función $\cos x$, se desprende que

$$b = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \cos x_{2k-1} = \cos\left(\lim_{k\to\infty} x_{2k-1}\right) = \cos a,$$

mientras que de la igualdad $x_{2k+1} = \cos x_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, se deduce que

$$a = \lim_{k\to\infty} \cos x_{2k} = \cos\left(\lim_{k\to\infty} x_{2k}\right) = \cos b,$$

es decir,

$$b = \cos a, \quad a = \cos b. \qquad (10)$$

Señalemos que como $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, entonces también $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$. De la relación (10), tendremos para la diferencia $a - b$

$$a - b = \cos b - \cos a = 2 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}.$$

Tomando en consideración que $0 \leqslant (a + b)/2 \leqslant 1$ y, por consiguiente,

$$0 \leqslant \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \leqslant \operatorname{sen} 1$$

y que

$$\left| \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \right| \leqslant \left| \frac{a-b}{2} \right|,$$

obtenemos

$$| a - b | \leqslant | a - b | \cdot \operatorname{sen} 1.$$

Esto sólo es posible cuando $| a - b | = 0$, es decir, $a = b$. Así, pues, ambas subsucesiones $\{x_{2k}\}$ y $\{x_{2k-1}\}$ convergen hacia un mismo

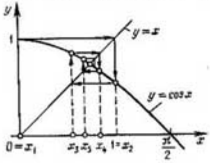


Fig. 59

límite a y, por lo tanto, toda la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia este límite. De (10) y de que $a = b$ se desprende que ese límite es la solución de la ecuación $a = \cos a$. ▲

10.33. Partiendo de la continuidad de la función exponencial demuestren la continuidad de las funciones hiperbólicas:

$$1)\ y = \operatorname{ch} x. \quad 2)\ y = \operatorname{th} x. \quad 3)\ y = \operatorname{cth} x.$$

10.34. Partiendo de la continuidad de la función exponencial demuestren la continuidad de la función logarítmica $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

10.35. Partiendo de la continuidad de las funciones trigonométricas demuestren la continuidad de las funciones trigonométricas inversas:

1) $y = \arcsen x$. 2) $y = \arccos x$. 3) $y = \operatorname{arctg} x$.
4) $y = \operatorname{arcctg} x$.

10.36. Partiendo de la continuidad de la función exponencial demuestren la continuidad de la función potencial $y = x^{\mu}$ $(x > 0, \mu \in \mathbb{R})$.

10.37. Demuestren que si $y = f(x)$ es una función continua, también lo son las funciones $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$.

10.38. Sea f una función continua en el intervalo X. Demuestren que las funciones

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0, \\ 0 & \text{si } f(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geqslant 0, \\ f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

son continuas en el intervalo X.

10.39. Aduzcan un ejemplo de función continua en cada uno de los intervalos X_1 y X_2, pero que no es continua en el conjunto $X_1 \cup X_2$.

10.40. Aduzcan un ejemplo de una función continua en un intervalo: 1) no acotada en ese intervalo; 2) acotada en ese intervalo, pero que no alcanza su cota superior ni inferior.

10.41. 1) La función f está definida y es continua en el segmento $[a; b]$, y todos sus valores son positivos. Demuestren que existe tal número $\mu > 0$ que $f(x) \geqslant \mu$ para cualquier $x \in [a; b]$.

2) Aduzcan un ejemplo de función f continua en el intervalo $(a; b)$, que sólo toma valores positivos y que es tal que para cualquier $\mu > 0$ habrá el valor de $f(x) < \mu$, $x \in (a; b)$.

3) Aduzcan un ejemplo de la función f definida en el segmento $[a; b]$ que sólo toma valores positivos y que es tal que para cualquier $\mu > 0$ habrá una función $f(x) < \mu$, $x \in (a; b)$.

10.42. La función f es continua en el intervalo $(a; b)$

$$m = \inf_{(a;\, b)} f, \quad M = \sup_{(a;\, b)} f$$

Demuestren que para cualquier $y \in (m; M)$ hay tal $x \in (a; b)$ que $f(x) = y$.

10.43. Demuestren que si la función está definida y es continua en un segmento, entonces, el conjunto de sus valores es el segmento.

10.44. Aduzcan un ejemplo de función discontinua, definida en un segmento y que tiene el segmento como conjunto de sus valores.

10.45. Aduzcan un ejemplo de función continua que toma valores iguales a 1 y 3, pero que no toma el valor 2.

10.46. Sea una función definida y monótona en un intervalo y que el conjunto de sus valores es un intervalo. Demuestren que dicha función es continua.

10.47. Demuestren que la ecuación $x^5 - 3x = 1$: 1) tiene al menos una raíz en $(1; 2)$; 2) tiene no menos de tres raíces en $\mathbb{R}$.

10.48. 1) Demuestren que cualquier polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

2) Demuestren que si un polinomio de grado par toma al menos un valor de signo opuesto al coeficiente del término mayor, él tiene no menos de dos raíces reales.

10.49. Demuestren que la ecuación $x = y - \varepsilon \operatorname{sen} y$, donde $0 < \varepsilon \leqslant 1$, prefija una función continua $y = f(x)$.

10.50. Demuestren que la función discontinua $y = e^{|x|} \operatorname{sign} x$ tiene función inversa continua.

10.51. Demuestren que el sistema dado de ecuaciones define la función continua $y(x)$ o bien $x(y)$; construyan el gráfico de esta función:

1) $x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

2) $x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t$.

3) $x = \ln(1+e^{-t}), \quad y = \ln(1+e^{t})$.

10.52. Demuestren que el sistema de ecuaciones

$$x = \frac{t^2+1}{2t}, \quad y = \frac{t^2-1}{2t}$$

define dos funciones $x(y)$ continuas sobre $\mathbb{R}$ y cuatro funciones $y(x)$ continuas sobre el conjunto $\{x: |x| \geqslant 1\}$.

10.53. Sea que la función f está definida en el entorno del punto x_0. ¿Estará continua la función f en el punto x_0 si:

1) $\exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

2) $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x)_0)| < \varepsilon)$.

3) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta)$.

4) $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta)$.

5) $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \forall x (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$?

10.54. La función f está definida en el entorno del punto x_0 y existe la sucesión $\{\varepsilon_n\}$ tal que $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ y para cada ε_n existe $\delta_n > 0$ tal que si $x \in D(f)$ y $|x - x_0| < \delta_n$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_n$. Demuestren que la función f es continua en el punto x_0.

10.55. La función f es continua en el punto x_0. Sean

$$S(\delta)=\sup_{(x_0-\delta;\ x_0+\delta)} f,\quad s(\delta)=\inf_{(x_0-\delta;\ x_0+\delta)} f.$$

Demuestren que $\lim\limits_{\delta\to 0}(S(\delta)-s(\delta))=0.$

10.56. Indiquen un conjunto de puntos en los que es continua la función, hallen sus puntos de discontinuidad, establezcan su género diseñen el gráfico de la función:

1) $y=\begin{cases} x^2+2, & x\leqslant 0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} 1-x^3, & x<0,\\ (x-1)^3, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 4-x, & 2<x.\end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -1/x, & x<0,\\ 5x-x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} -x, & x\leqslant -1,\\ 2/(x-1), & x>-1.\end{cases}$

5) $y=\begin{cases} 2^x, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 4.\end{cases}$

6) $y=\begin{cases} \cos x, & -\pi/2\leqslant x<\pi/4,\\ 1, & x=\pi/4,\\ x^2-\pi^2/16, & \pi/4<x\leqslant\pi.\end{cases}$

Hallen los puntos de discontinuidad, establezcan su género, definan definitivamente la función según la continuidad en los puntos de la discontinuidad evitable (**10.57—10.59**):

10.57. 1) $y=\dfrac{x}{x^2+x-6}$. 2) $y=\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$.

3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. 4) $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

5) $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$. 6) $y=\dfrac{2x-1}{2x^2+3x-2}$. 7) $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$.

10.58. 1) $y=\dfrac{x}{\cos x}$. 2) $y=(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen}(1/x)$.

3) $y=\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} 2x}$. 4) $y=\dfrac{\cos(\pi x/2)}{x^3-x^2}$. 5) $y=\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$.

10.59. $y=\dfrac{2}{1-2^x}$. 2) $y=\dfrac{1}{\log x}$. 3) $y=\log(x^2+3x)$.

4) $y=\log(x-1)^2$. 5) $y=2^{1/x}$. 6) $y=\dfrac{1}{\ln|x-1|}$.

7) $y=3^{x/(1-x^2)}$. 8) $y=e^{-1/|x|}$. 9) $y=\ln\ln(1+x^2)$.

10.60. Hallen los puntos de discontinuidad, establezcan su especie, hallen los saltos en los puntos de discontinuidad de 1er género.

1) $y = \operatorname{sign}(x^2 - 2x - 3)$. 2) $y = \operatorname{sign} \cos x$.

3) $y = (-1)^{E(x)}$. 4) $y = (-1)^{E(1/x)}$. 5) $y = \operatorname{arcsen}(1/x)$.

6) $y = \operatorname{arctg}(1/x)$. 7) $y = \operatorname{arcctg}(1/x^2)$.

8) $y = \dfrac{x+1}{\operatorname{arctg}(1/x)}$. 9) $y = \dfrac{|x|}{\operatorname{arctg} x}$. 10) $y = \dfrac{1}{1 + 2^{1/(x-1)}}$.

11) $y = \dfrac{3^{1/x} + 2^{1/x}}{3^{1/x} - 2^{1/x}}$. 12) $y = \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

10.61. Demuestren que la función es continua en cada punto de su campo de definición:

1) $y = \operatorname{sen}(x - \log(\sqrt{x} - 1))$. 2) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4 \operatorname{ctg} x}\, 2^{\operatorname{tg}(\pi/x)}$.

3) $y = \dfrac{x^{-5/3} - \cos \sqrt{x}}{\operatorname{tg} \operatorname{arcsen} |x|}$.

10.62. ¿Con qué valor de a la función $y(x)$ es continua si:

1) $y = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x \operatorname{ctg} 2x, & x \neq 0, \ |x| < \pi/2, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} (\pi + 2x) \operatorname{tg} x, & -\pi < x < \pi/2, \quad x \neq -\pi/2, \\ a, & x = -\pi/2. \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} (\operatorname{arcsen} x) \operatorname{ctg} x, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} \dfrac{c^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \ 0 < c. \end{cases}$

6) $y = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+2x)}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$ 8) $y = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

9) $y = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$ 10) $y = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0? \end{cases}$

10.63. ¿Es posible definir definitivamente une función en el punto de discontinuidad x_0 de forma que ella se haga continua en dicho punto:

1) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$. 2) $y = 2^{-2^{1/(1-x)}}$, $x_0 = 1$.

3) $y=\frac{1}{x}e^{-1/x^2}$, $x_0=0$. 4) $y=\frac{\operatorname{th}(\sqrt{x}-1)}{x^2-1}$, $x_0=1$.

5) $y=2^{-E(1/x)}$, $x_0=0$?

10.64. Investiguen la continuidad y construyan el gráfico de la función f si:

1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. 2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n+1}}$.

3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x$. 4) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\operatorname{sen} x)^{2n}}$.

5) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$. 6) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+xe^{nx}}$.

7) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

8) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg} x))$.

9) $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$. 10) $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\operatorname{th} tx$.

10.65. ¿En qué puntos es continua la función:

$$y(x)=\begin{cases} x^2-1, & x \text{ es un número irracional,}\\ 0, & x \text{ es un número racional?}\end{cases}$$

10.66. Sea

$$y(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ es un número irracional,}\\ 1/q, & x=p/q,\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\end{cases}$$

donde p/q es una fracción irreducible (semejante función se denomina de Riemann). Demuestren que:

1) Esta función es continua en cada punto irracional.

2) Cada punto racional es para la función dada punto de discontinuidad de 1[er] género.

10.67. Investiguen la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} |x|, & x \text{ es un número irracional,}\\ qx/(q+1), & x=p/q,\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\end{cases}$$

donde p/q es una fracción irreducible.

10.68. Investiguen la continuidad de las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$ si

$$f(x)=1-|x-1|,$$

$$g(x)=\begin{cases} x, & x \text{ es un número racional,}\\ 2-x, & x \text{ es un número irracional.}\end{cases}$$

10.69. La función f crece en el segmento $[a; b]$ y es discontinua en el punto $x_0 \in [a; b]$. La función $g(x)$ es monótona en el segmento $[f(a); f(b)]$.

1) Aduzcan un ejemplo de tales funciones f y g que $g(f(x))$ sea continua en x_0.

2) Demuestren que si $g(x)$ es estrictamente monótona en el entorno del punto $f(x_0)$, $g(f(x))$ es discontinua en el punto x_0.

10.70. La función f es continua en el segmento $[a; b]$. Demuestren que:

1) $\inf\limits_{(a;\,b)} f = \inf\limits_{[a;\,b]} f$. 2) $\sup\limits_{(a;\,b)} f = \sup\limits_{[a;\,b]} f$.

10.71. La función f es continua en el segmento $[a; b]$. Demuestren que las funciones $m(x)$ y $M(x)$ son continuas en $[a; b]$:

1) $m(x) = \min\limits_{[a;\,x]} f$. 2) $M(x) = \max\limits_{[a;\,x]} f$.

10.72. La función f es continua en el intervalo $[a; b)$. Demuestren que las funciones $m(x)$ y $M(x)$ son continuas en $[a; b)$:

1) $m(x) = \inf\limits_{[a;\,x)} f$. 2) $M(x) = \sup\limits_{[a;\,x)} f$.

10.73. La función f está definida y es acotada en el segmento $[a; b]$. Demuestren que las funciones

$$m(x) = \inf_{[a;\,x)} f \text{ y } M(x) = \sup_{[a;\,x)} f$$

son continuas por la izquierda en cada punto $x \in [a; b)$.

10.74. Sean f y g funciones continuas en X. Demuestren que las funciones $M(x)$ y $m(x)$ también son continuas en X:

1) $M(x) = \max\ \{f(x), g(x)\}$. 2) $m(x) = \min\ \{f(x), g(x)\}$.

10.75. 1) Sea f una función continua en X, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Demuestren que la función

$$f(a; b; x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } a \leqslant f(x) \leqslant b, \\ a & \text{si } f(x) < a, \\ b & \text{si } f(x) > b, \end{cases}$$

también es continua en X.

2) Sea la función f definida en $\mathbb{R}$. Demuestren que con el fin de que f sea continua en $\mathbb{R}$ es necesario y suficiente que para cualquier $a > 0$ la función $f(-a; a; x)$, definida en 1), sea continua en $\mathbb{R}$.

10.76. La función f es continua en $[a; +\infty)$ y existe el $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ finito. Demuestren que f es acotada en $[a; +\infty)$.

10.77. La función f es continua en el intervalo $(a; b)$ (finito o infinito) y existen los $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ finitos. Demuestren que la función f es acotada en $(a; b)$.

10.78. 1) Demuestren que la función

$$y=\begin{cases}(x+1)\,2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}, & x\neq 0,\ |x|\leqslant 2,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

toma todos los valores entre $f(-2)$ y $f(2)$, pero es discontinua. Construyan el gráfico de dicha función.

2) Demuestren que la función

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}(1/x), & x\neq 0,\\ -1, & x=0\end{cases}$$

toma en cualquier segmento $[0;\,a]$ todos los valores intermedios entre $f(0)$ y $f(a)$, pero no es continua en $[0;\,a]$.

10.79. La función f está definida en el segmento $[a;\,b]$ y tiene la siguiente propiedad: para cualesquiera $x_1,\ x_2\in[a;\,b]$ y para cualquier número C situado entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ existe tal punto $\xi\in(x_1;\,x_2)$ que $f(\xi)=C$.

1) Indiquen una función que posea tal propiedad, pero que no sea continua en $[a;\,b]$.

2) Demuestren que la función que tiene la indicada propiedad no puede tener puntos de discontinuidad de 1er género.

10.80. Demuestren que si la función está definida y es continua en un intervalo, el conjunto de sus valores es un intervalo (es decir, un segmento, o un intervalo, o bien un semiintervalo).

10.81. Aduzcan un ejemplo de función continua en un intervalo, cuyo conjunto de valores es: 1) un segmento; 2) un intervalo; 3) un semiintervalo.

10.82. Sea la función definida en el segmento $[a;\,b]$ continua e inversible. Demuestren que esta función es estrictamente monótona en $[a;\,b]$.

10.83. Demuestren que si una función está definida y es estrictamente monótona en un intervalo, su función inversa no tiene puntos de discontinuidad.

10.84. Aduzcan un ejemplo de la función f, continua en el punto x_0, que tiene función inversa discontinua en el punto $y_0=f(x_0)$.

10.85. Aduzcan un ejemplo de una función continua, estrictamente creciente, cuya función inversa es discontinua.

10.86. Demuestren que la función acotada, convexa (véase el problema 7.272) en un intervalo es en éste continua.

10.87. Demuestren que el sistema dado de ecuaciones define la función continua $y(x)$ o bien $x(y)$:

1) $x=\dfrac{t-1}{\sqrt{t}},\quad y=\dfrac{t+1}{\sqrt{t}}.$

2) $x=\dfrac{1}{4}(t-4)\,e^{t},\quad y=\sqrt{t}\,e^{t}.$

3) $x=\frac{t^3}{t^2+1}$, $y=\frac{t}{t^4+1}$.

10.88. Aduzcan un ejemplo de tal sistema de ecuaciones

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

en el que las funciones φ y ψ no sean invertibles, pero que define la única función $y(x)$ continua.

10.89. La función f es continua en el intervalo $(a; b)$. Demuestren que para cualesquiera números $x_1<x_2<\ldots<x_n$ de $(a; b)$ y cualesquiera números

$$\alpha_i\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$$

habrá un número ξ, $x_1\leqslant\xi\leqslant x_n$ tal que

$$f(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i).$$

10.90. La función f está definida en el segmento $[a; b]$. Para cualquier segmento $[c; d]$, $a\leqslant c<d\leqslant b$, el conjunto de los valores de $f(x)$, $x\in[c; d]$ es un segmento. ¿Se desprende de aquí la continuidad de la función f en $[a; b]$?

10.91. La función f es continua y acotada en el intervalo $(a; +\infty)$ y no tiene límite cuando x tiende hacia $+\infty$. Demuestren que habrá un número a para el que la ecuación $f(x)=a$ tiene infinitamente muchas raíces.

10.92. La función f es continua en el intervalo $(a; b)$ $l=\varliminf_{x\to b} f(x)$, $L=\varlimsup_{x\to b} f(x)$, $L>l$. Demuestren que para todo número C, $l<C<L$, la ecuación

$$f(x)=C$$

tiene infinitamente muchas raíces en cualquier entorno de b.

10.93. La función f es continua y acotada en el intervalo $[a; +\infty)$. Demuestren que para todo número T habrá una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$ y que

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n+T)-f(x_n))=0.$$

10.94. El conjunto $A\in\mathbb{R}$ se denomina *abierto* si cada punto de A tiene un entorno perteneciente a A. El punto x_0 recibe el nombre de *punto adherente* del conjunto A si en cualquier entorno de x_0 hay al menos un punto de A. Un conjunto se llama *cerrado* si él contiene todos sus puntos adherentes. El conjunto de todos los puntos adherentes del conjunto A lleva el nombre de *adherencia* de A y se designa con $\overline{A}$.

La función f es continua en el segmento $[a; b]$, el número C está contenido entre $f(a)$ y $f(b)$, $f(a) \neq f(b)$. Demuestren que:

1) Cada uno de los conjuntos:

a) $A = \{x \in (a; b): f(x) < C\}$,

b) $B = \{x \in (a; b): f(x) > C\}$

es abierto.

2) El conjunto $\{x \in [a; b]: f(x) = C\}$ tiene elementos tanto máximo como mínimo.

10.95. Sea la función f continua sobre $\mathbb{R}$, $A \subset E(f)$, $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$. Demuestren que:

1) Si A es cerrado, entonces lo será asimismo $f^{-1}(A)$.

2) Si A es abierto, entonces lo será asimismo $f^{-1}(A)$.

10.96. El conjunto B lleva el nombre de *denso en el conjunto A* si la adherencia de B contiene A, es decir, $\overline{B} \supset A$. Sean la función f continua en X, el conjunto A denso en X, $f(X)$, el conjunto de todos los valores de la función $f(x)$ con $x \in X$, $f(A)$, el conjunto de todos los valores de la función con $x \in A$. Demuestren que $f(A)$ es denso en $f(X)$.

10.97. 1) ¿Existe la aplicación continua: a) de un segmento sobre un intervalo; b) de un intervalo sobre un segmento?

2) Construyan la aplicación biunívoca de un segmento sobre un intervalo.

10.98. 1) Demuestren que la función definida sobre $\mathbb{R}$ no puede ser continua en todos los puntos racionales y discontinua en todos los irracionales.

2) ¿Existe una función continua en todos los puntos racionales del segmento $[0; 1]$ y discontinua en todos sus puntos irracionales?

10.99. Demuestren que la ecuación $x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ tiene una sola raíz; hállenla con una precisión hasta 0.1.

10.100. Demuestren que la ecuación $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ tiene dos raíces reales (y no más).

10.101. Demuestren que la ecuación

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} + c = 0,$$

donde $a_k \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, $a_n > 0$, sólo tiene una raíz real.

10.102. Demuestren que la ecuación $x^n = P_{n-1}(x)$, donde $P_{n-1}(x)$ es un polinomio de $(n-1)$-ésimo grado con coeficientes positivos, tiene una sola raíz positiva.

10.103. Demuestren que:

1) La ecuación

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0,$$

donde $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, tiene en cada uno de los intervalos $(\lambda_1; \lambda_2)$ y $(\lambda_2; \lambda_3)$ una sola raíz real.

2) La ecuación

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{x-\lambda_j} = 0,$$

donde $a_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$, tiene en los intervalos $(\lambda_j; \lambda_{j+1})$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ una sola raíz real.

10.104. Demuestren que la ecuación tiene solución y, con ello, única:

1) $x \cdot 2^x = 1$. 2) $xe^x = 2$.

3) $x = \varepsilon \operatorname{sen} x + a$, $0 < \varepsilon < 1$.

4) $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, $a \neq 0$.

10.105. Demuestren que la ecuación $x = a \operatorname{sen} x + b$, donde $0 < a < 1$, $b > 0$, tiene al menos una raíz en $[0; a + b]$.

10.106. Demuestren que la ecuación $10^{x-1} = x$ sólo tiene una raíz $x_0 \neq 1$.

10.107. Demuestren que la ecuación $2^x = 4x$ tiene al menos dos raíces reales.

10.108. Demuestren que la ecuación $x \operatorname{sen} x - 0{,}5 = 0$ tiene un número infinitamente grande de soluciones.

10.109. 1) Demuestren que existe un número infinitamente grande de funciones definidas en $(a; b)$ y que satisfacen la ecuación

$$y^2 = 1.$$

2) Sea f una función continua y positiva en $(a; b)$. Demuestren que existe una sola función $y = \varphi(x)$ continua en $(a; b)$ que satisface la ecuación

$$y^2 = f(x)$$

y la condición de que $\varphi(x_0) > 0$ en cierto punto $x_0 \in (a; b)$.

3) ¿Cuántas funciones continuas existen en $\mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación $y^2 = (x^2 - 1)^2$?

4) ¿Cuántas funciones continuas existen en el segmento $[0; n]$, $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen la ecuación

$$y^2 + 2y + \cos^2 \pi x = 0?$$

10.110. Demuestren que existe una sola función $y(x)$ continua que satisface la ecuación

$$y = \operatorname{arcctg} xy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

10.111. Hallen todas las funciones f continuas en $\mathbb{R}$ que satisfacen la condición: para cualquier $x \in \mathbb{R}$ es cierta la igualdad:

1) $f\left(\frac{1}{3}x\right) + f\left(\frac{2}{3}x\right) = x$. 2) $f(x) + f(3x) = x$.

3) $f(\alpha x) + f(\beta x) = ax + b$, $\alpha\beta \neq 0$. 4) $f(3x) - f(2x) = x$.
5) $f(x^2) + f(x) = x^2 + x$. 6) $f(x^2) - f(x) = x^2 - x$.

10.112. Hallen todas las funciones f continuas en $\mathbb{R}$ tales que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ es cierta la igualdad

$$Af(\alpha x) + Bf(\beta x) = ax + b,$$

donde $a\alpha\beta AB \neq 0$, $A\alpha + B\beta \neq 0$, $A + B \neq 0$.

10.113. ¿Con qué valores de a existen tales funciones f continuas sobre $\mathbb{R}$, diferentes de la constante, que para cualquier $x \in \mathbb{R}$:
1) $f(x^2 + a) = f(x)$. 2) $f(ax^2 + 1) = f(x)$?

10.114. ¿Con qué valores de a, b, c existe tal función f continua sobre $\mathbb{R}$, distinta de la constante, que para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$f(ax^2 + bx + c) = f(x)?$$

10.115. 1) Hallen todas las funciones f continuas sobre $\mathbb{R}$ que, para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$, satisfacen la igualdad $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

2) Aduzcan un ejemplo de la función discontinua f que, para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$, satisface la igualdad $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

10.116. Hallen todas las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ que, para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$, satisfacen la igualdad $f(x + y) = f(x)f(y)$.

10.117. Hallen todas las funciones continuas en $(0; +\infty)$ que, para cualesquiera x, $y \in (0; +\infty)$, satisfacen la igualdad:
1) $f(xy) = f(x) + f(y)$. 2) $f(xy) = f(x)f(y)$.

10.118. Hallen todas las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ que, para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$, satisfacen la igualdad

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

y la condición: 1) $f(x) \leqslant 1$; 2) $f(x) \geqslant 1$.

10.119. Hallen todas las soluciones continuas sobre $\mathbb{R}$ de la ecuación funcional

$$f(x + f(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

10.120. La función f está definida y es continua sobre $\mathbb{R}$, y para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$ es cierta la igualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Demuestren que f es una función lineal, es decir, existen tales a y b que $f(x) = ax + b$.

10.121. Demuestren que la función periódica, continua por todo el eje numérico, distinta de la constante, tiene el período positivo mínimo. Aduzcan un ejemplo de función periódica definida por todo el eje numérico y distinta de la constante, que no tiene período positivo mínimo.

10.122. Sean f y g funciones continuas, periódicas con período T y $\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Demuestren que $f = g$.

10.123. La función continua f tiene dos períodos inconmensurables T_1 y T_2 (es decir, T_1/T_2 es un número irracional). Demuestren que $f = \text{const}$.

10.124. Construyan tales funciones f y g continuas sobre $\mathbb{R}$ que, para cualquier $T > 0$, las funciones $f(x + T)$ y $g(x)$ sean diferentes, pero para cada $\varepsilon > 0$ exista tal $T_\varepsilon > 0$ que, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, sea cierta la igualdad

$$|f(x + T_\varepsilon) - g(x)| < \varepsilon.$$

10.125. Sea la función f continua en $[-1; 1]$ y $|f(x)| < 1$, $x \in [-1; 1]$. Demuestren que la función

$$f(x) - \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N},$$

(véase el problema 7.261) no menos de n veces se reduce a cero en el segmento $[-1; 1]$.

10.126. Sea $P(x) = 2^{n-1}x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Demuestren que habrá tal $\xi \in [-1; 1]$ que $|P(\xi)| \geqslant 1$.

10.127. La función f es continua en $[0; 1]$ y $f(0) = f(1) = 0$. Demuestren que existe tal función g continua, convexa hacia las y positivas (problema 7.272), que $g(0) = g(1) = 0$ y $g(x) \geqslant f(x)$ en $[0; 1]$.

10.128. La función f es continua y periódica con período T. Demuestren que hay tal punto x_0 que

$$f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0).$$

10.129. La función f es continua, monótona en $[0; 1]$ y $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Demuestren que si para cierto $n \in \mathbb{N}$ con cualquier $x \in [0; 1]$

$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ veces}}(x) = x,$$

entonces, asimismo, $f(x) = x$ en $[0; 1]$.

10.130. Sea la función f continua en $[0; 1]$ y el conjunto de sus valores está contenido en $[0; 1]$. Demuestren que existe tal punto $c \in [0; 1]$ que $f(c) = c$ (toda aplicación continua de un segmento tiene un punto inmóvil).

10.131. Sea que f y g están definidas y son continuas en el segmento $[a; b]$ y $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demuestren que hay tal punto $c \in (a; b)$ que $f(c) = g(c)$.

10.132. Las funciones f y g están definidas y son continuas en $[0; 1]$ y $f \circ g = g \circ f$. Demuestren que existe tal punto $c \in [0; 1]$ que $f(c) = g(c)$.

10.133. Las funciones continuas f y g aplican el segmento $[0; 1]$ sobre sí mismo. Demuestren que existe tal punto $c \in [0; 1]$ que $f(g(c)) = g(f(c))$.

10.134. La función f es continua sobre $\mathbb{R}$ y $f(f(x)) = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Demuestren que existe tal punto c en el que $f(c) = c$.

10.135. Aduzcan un ejemplo de la función: 1) continua en el intervalo $(0; 1)$, 2) continua sobre $\mathbb{R}$ para la cual la ecuación $f(x) = x$ no tiene soluciones.

10.136. La función f es monótona, continua en $[0; 1]$ y $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para cualquier $x \in [0; 1]$. Demuestren que para cualquier $a_1 \in [0; 1]$ la sucesión a_1, $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, converge hacia una de las soluciones de la ecuación $f(x) = x$.

10.137. Sea la función f continua en $[a; b]$ y sea definida la sucesión $\{x_n\}$: $x_0 \in [a; b]$, $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, (es decir, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ $f(x_{n-1}) \in [a; b]$). Demuestren que:

1) Si f crece, $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y existe tal $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ que $c = f(c)$.

2) Si f decrece, $\{x_{2k}\}$ y $\{x_{2k-1}\}$ son subsucesiones monótonas que tienen límite. Obtengan las ecuaciones para estos límites.

10.138. La función f crece estrictamente, mientras que la g, decrece estrictamente sobre $[a; b]$ y $E(f) \cap E(g) \neq \varnothing$.

1) Demuestren que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene solución y, con ello, única.

2) Sea $x_0 \in [a; b]$ tal que $f(x_0) \in E(g)$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ la ecuación $g(x_n) = f(x_{n-1})$ tiene la raíz x_n, es decir, está definida la sucesión $\{x_n\}$. Demuestren que las subsucesiones $\{x_{2k}\}$ y $\{x_{2k-1}\}$ convergen, cada una de ellas, hacia una de las soluciones de la ecuación $g^{-1}(f(x)) = f^{-1}(g(x))$.

10.139. Para la sucesión $\{x_n\}$, prefijada según el procedimiento recurrente: $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} (2-3x)/5, & x < -1/6, \\ -3x, & |x| \leqslant 1/6, \\ -(2+3x)/5, & x > 1/6, \end{cases}$$

hallen los límites de las subsucesiones $\{x_{2k}\}$ y $\{x_{2k-1}\}$. Construyan el gráfico de la función f y muestren en el diseño la construcción de los cinco primeros términos de la sucesión.

10.140. La función f, definida sobre $\mathbb{R}$, satisface la condición de Lípshits: existe tal $k > 0$ que, para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, es cierta la desigualdad

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k\,|x_1 - x_2|.$$

Demuestren que si $k < 1$, existe y, con ello, sólo una solución de la ecuación $f(x) = x$.

10.141. El conjunto de los valores de la función f, determinada sobre $[a; b]$, está contenido en $[a; b]$. Para cualesquiera $x, y \in [a; b]$, $x \neq y$, es cierta la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

1) Demuestren que la ecuación $f(x) = x$ tiene y, con ello, sólo una solución c.

2) Sean $x_0 \in [a; b]$, $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que:
a) la sucesión $\{|x_n - c|\}$ decrece y tiene límite $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - c| = \Delta$;
b) existe la subsucesión $\{x_{n_k}\}$, convergente hacia d, que es igual bien a $c + \Delta$, o bien a $c - \Delta$;
c) $|f(d) - c| = \Delta$ y $\Delta = 0$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

10.142. 1) Demuestren que la ecuación $\operatorname{tg} x = a/x$, $a > 0$, tiene en cada intervalo $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, una solución.

2) Sea x_n la solución de la ecuación $\operatorname{tg} x = a/x$, $a > 0$, del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que

$$0 < x_n - \pi n < \frac{2a}{\pi n + \sqrt{\pi^2 n^2 + 4a}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

10.143. 1) Demuestren que la ecuación

$$\operatorname{tg} x = ax, \quad a > 0,$$

tiene en cada intervalo $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, una solución x_n.

2) Sea x_n la solución de la ecuación $\operatorname{tg} x = ax$, $a > 0$, del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que con $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes

$$0 < \frac{\pi}{2} + \pi n - x_n < \frac{2/a}{\frac{\pi}{2} + \pi n + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 - \frac{4}{a}}}.$$

3) Hallen $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)$, donde la sucesión $\{x_n\}$ está definida en 1) y 2).

10.144. Para la sucesión prefijada por procedimiento recurrente demuestren la existencia del límite y hállenlo:

1) $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n - \operatorname{sen} x_n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_{n+1} = x_n + \cos x_n - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

4) $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

5) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n - \operatorname{arctg} x_n + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}$.

6) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 1 + \ln x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

10.145. 1) Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

2) Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$. Demuestren que

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{1/x_n} = e.$$

10.146. Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Analicen la convergencia de la sucesión

$$\left\{\left(\frac{a_1 n + b_1}{a_2 n + b_2}\right)^n\right\}$$

y hallen su límite si él existe.

10.147. Haciendo uso de la continuidad de las correspondientes funciones calculen el límite de la sucesión:

1) $\left\{\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n\right\}$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.

2) $\left\{\left(\cos\frac{x}{n} + \lambda \operatorname{sen}\frac{x}{n}\right)^n\right\}$, donde $x, \lambda \in \mathbb{R}$.

3) $\left\{\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\right\}$, donde $a > 0$, $b > 0$.

4) $\left\{\left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)\left(1 + \frac{2a}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{ka}{n}\right)\right)^n\right\}$ donde $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$.

5) $\left\{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)\right\}$.

6) $\left\{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right\}$.

7) $\left\{\operatorname{sen}^2\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right)\right\}$. 8) $\left\{n - \frac{1}{\operatorname{sen}(1/n)}\right\}$.

9) $\{n - \operatorname{ctg}(1/n)\}$. 10) $\{(\cos(x/\sqrt{n}))^n\}$.

10.148. Las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son tales que $0 < a_n < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $0 < b_n < \pi/2$, $\cos b_n = a_n$. Hallen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\sqrt{1-a_n}}.$$

§ 11. Asíntotas y gráficos de las funciones

El empleo de la noción de límite permite con frecuencia reflejar con mayor precisión las propiedades de las funciones al confeccionar su gráfico. Antes de comenzar el diseño del gráfico es preciso aclarar si la función tiene límites izquierdos o derechos (finitos o infinitos) en los puntos extremos de su campo de definición y en los puntos de discontinuidad. Si la función tiene límite con $x \to x_0$ ($x \to x_0 + 0$ o bien $x \to x_0 - 0$), entonces, en ciertas ocasiones, empleando el método de separación de la parte principal, se consigue establecer el «parecido» entre su gráfico en el entorno del punto x_0 y el gráfico de una función más sencilla. P. ej., si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y si $g(x)$ es la *parte principal de la función con* $x \to x_0$, es decir,

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \tag{1}$$

donde $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, el gráfico de la función $f(x)$ «se parece» al de la función $g(x)$ en el entorno del punto x_0.

Si

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \text{ o bien } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty, \tag{2}$$

entonces, la recta $x = x_0$ recibe el nombre de *asíntota vertical* del gráfico de la función $f(x)$. P. ej., la recta $x = 0$ es la asíntota vertical de los gráficos de la función $1/x$ (fig. 14, § 7) y $\ln x$, ya que $\lim\limits_{x\to 0} (1/x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to +0} \ln x = -\infty$. El gráfico de la función $\operatorname{tg} x$ tiene un número infinitamente grande de asíntotas verticales y, precisamente, cada recta $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, es una asíntota. La separación de la parte principal suele asimismo ser útil cuando

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \text{ o bien } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty.$$

Si en estos casos

$$f(x) = g(x) + o(1)$$

con $x \to x_0 - 0$ (o bien $x \to x_0 + 0$), entonces el gráfico de la función $f(x)$ «se parece» al de la función $g(x)$.

Ejemplo 1. Hallen las asíntotas verticales del gráfico de la función f y constrúyanlo si

1) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 2) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

3) $f(x)=\sqrt{x^4-1}$.

△ 1) La función está definida y es continua en el intervalo $(-1;\ 1)$. Como

$$\lim_{x\to1-0}\sqrt{1-x^2}=\lim_{x\to-1+0}\sqrt{1-x^2}=0,$$

entonces

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty \text{ y } \lim_{x\to-1+0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty.$$

Por lo tanto, las rectas $x=-1$ y $x=1$ son las asíntotas verticales del gráfico.

La función dada es impar. Ella estrictamente crece en el intervalo $(0;\ 1)$. En efecto, si $0<x<1$,

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1}{1-x^2}-1},$$

de donde se desprende que al crecer x desde 0 hasta 1 la función $1/(1-x^2)$ y, junto con ella, la función $f(x)$, estrictamente crecen. Señalemos, además, que $x/\sqrt{1-x^2}>x$ cuando $x>0$. Con el fin de precisar el tipo del gráfico junto al punto $x=0$ separemos la parte principal de la función con $x\to0$. Como

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1,$$

entonces $f(x)/x=1+o(1)$, de donde

$$f(x)=x+o(x).$$

Esto significa que junto a $x=0$ el gráfico de la función dada «se parece» al gráfico de la función $g(x)=x$ (los puntos de estos gráficos, correspondientes al valor de x, se aproximan por la vertical con mayor rapidez que con la que x decrece). El gráfico de la función se ofrece en la fig. 60.

2) La función está definida y es continua en el intervalo $(0;\ 1]$. Como

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{1-x}{x}}=+\infty,$$

la recta $x=0$ es la asíntota vertical del gráfico. Además,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-x}$$

y

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x}=1.$$

Para la diferencia $f(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}$, tenemos

$\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}+1}=o(1)$, con $x\to 0$, por lo que

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+o(1).$$

Así, pues, la función $1/\sqrt{x}$ es la parte principal de la función dada $f(x)$ con $x\to +0$ y, más aún, la distancia por la vertical entre los puntos de los gráficos de las funciones $\sqrt{(1-x)/x}$ y $1/\sqrt{x}$ tienden

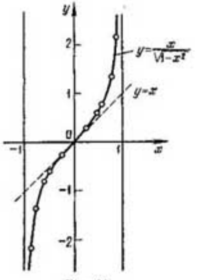


Fig. 60

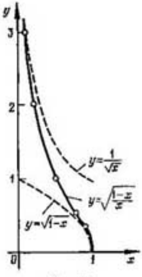


Fig. 61

a cero cuando $x\to +0$. Como se dice en ocasiones, el gráfico de la función $1/\sqrt{x}$ es la asíntota curvilínea del gráfico de la función dada (fig. 61). Empleando la igualdad

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

y, tomando en consideración, que $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$ con $x \to 1-0$, obtenemos

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 + o(1),$$

de donde

$$f(x) = \sqrt{1+x} + o(\sqrt{1-x}).$$

Por consiguiente, en el entorno del punto $x = 1$ ($x < 1$), el gráfico de la función dada «se parece» al gráfico de la función más sencilla $\sqrt{1-x}$ (fig. 61). Como

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1},$$

es evidente que la función dada decrece en $(0; 1]$.

3) La función está definida y es continua en los intervalos $(-\infty; -1]$ y $[1; +\infty)$, es decir, su gráfico no tiene asíntotas verticales. La función es par. Analicémosla en el intervalo $[1; +\infty)$. Aquí la función x^4 y, por lo tanto, asimismo la función $\sqrt{x^4-1}$ estrictamente crecen. Utilicemos la fórmula

$$f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{(x+1)(x^2+1)}$$

y, tomando en consideración que

$$\lim_{x\to 1+0} \sqrt{(x+1)(x^2+1)} = 2,$$

con $x \to 1+0$ obtenemos

$$f(x) = \sqrt{x-1}\,(2 + o(1)) = 2\sqrt{x-1} + o(\sqrt{x-1}).$$

Por lo tanto, en el entorno del punto $x = 1$ ($x > 1$), el gráfico de la función dada «se parece» al de la función $2\sqrt{x-1}$ (fig. 62). Además, $f(x) > 2\sqrt{x-1}$ con $x > 1$, es decir, cuando $x \to 1+0$, los puntos del gráfico de la función dada se aproximan superiormente al gráfico de la función $y = 2\sqrt{x-1}$. Como

$$f(x) = x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}}, \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^4}} = 1,$$

cuando $x \to +\infty$, obtenemos

$$f(x) - x^2 = x^2\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}} - 1\right) =$$

$$= x^2 \cdot \frac{-1/x^4}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}} + 1} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}} + 1} = o(1),$$

de donde

$$f(x) = x^2 + o(1).$$

Con ello, $f(x) < x^2$, es decir, los puntos del gráfico de la función dada se aproximan inferiormente a la parábola $y = x^2$ (fig. 62). ▲

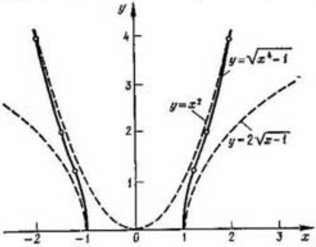


Fig. 62

La recta $y = kx + b$ se denomina *asíntota* del gráfico de la función $y = f(x)$, $x \in (a; +\infty)$, *con* $x \to +\infty$, si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0. \quad (3)$$

La recta $y = kx + b$ se denomina *asíntota* del gráfico de la función $y = f(x)$, $x \in (-\infty; a)$, *con* $x \to -\infty$, si

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0. \quad (4)$$

Si $k \neq 0$, la asíntota $y = kx + b$ lleva el nombre de *oblicua*. Si $k = 0$, la asíntota $y = b$ recibe el nombre de *horizontal*.

Para que la recta $y = kx + b$ sea la asíntota del gráfico de la función $y = f(x)$ con $x \to +\infty$ (con $x \to -\infty$) es necesario y suficiente que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \right), \quad (5)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b \, (\lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = b). \quad (6)$$

En el caso de la asíntota horizontal ($k = 0$) en lugar de (5) y (6), tenemos: con el fin de que la recta $y = b$ sea la asíntota horizontal

del gráfico de la función $y = f(x)$ con $x \to +\infty$ (con $x \to -\infty$) es necesario y suficiente que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad (\lim_{x \to -\infty} f(x) = b). \tag{7}$$

Son ejemplos de funciones, cuyos gráficos tienen asíntotas horizontales, arctg x y arcctg x (figs. 42 y 43, § 7). El gráfico de la fun-

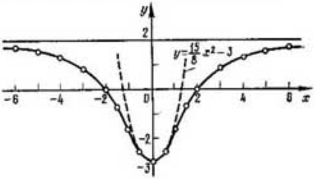


Fig. 63

ción arctg x tiene la asíntota horizontal $y = \pi/2$ con $x \to +\infty$ y la asíntota horizontal $y = -\pi/2$ con $x \to -\infty$.

Ejemplo 2. Hallen las asíntotas del gráfico de la función f y constrúyanlo si:

1) $f(x) = \dfrac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$. 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

△ 1) Ya que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6(x^2-4)}{3x^2+8} = 2,$$

la recta $y = 2$ es la asíntota horizontal del gráfico tanto cuando $x \to +\infty$ como cuando $x \to -\infty$. La función es continua sobre $\mathbb{R}$, por consiguiente, su gráfico no tiene asíntotas verticales. La función dada es par. De la igualdad

$$f(x) = 2 - \frac{40}{3x^2+8}$$

se desprende que en $(0; +\infty)$, con el crecimiento de x los valores de la función estrictamente crecen. De esa misma igualdad se deduce que los puntos del gráfico, cuando $x \to \infty$, se aproximan inferiormente a la recta $y = 2$ ($f(x) < 2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$). Con $x = 0$ la función toma su valor mínimo $f(0) = -3$. Para precisar

la forma del gráfico en las proximidades del punto $x = 0$, representemos la función en la forma

$$f(x) = \frac{3(5x^2 - (3x^2+8))}{3x^2+8} = \frac{15x^2}{3x^2+8} - 3$$

y hagamos uso de que con $x \to 0$

$$\frac{x^2}{ax^2+b} = \frac{x^2}{b} + o(x^2), \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{8}$$

La última igualdad se demuestra con facilidad:

$$\frac{x^2}{ax^2+b} - \frac{x^2}{b} = -\frac{ax^4}{b(ax^2+b)} = -\frac{ax^2}{b(ax^2+b)}x^2$$

y, como $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-ax^2}{b(ax^2+b)} = 0$, $\frac{-ax^2}{b(ax^2+b)}x^2 = o(x^2)$, de donde se desprende (8).

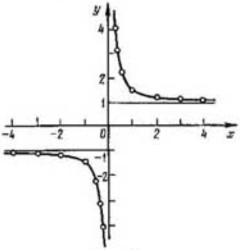


Fig. 64

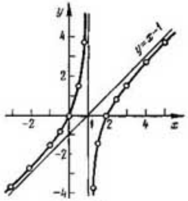


Fig. 65

Haciendo uso de (8) con $a = 3$, $b = 8$, obtenemos la igualdad

$$f(x) = \frac{15}{8}x^2 - 3 + o(x^2),$$

lo que significa que haciendo $x \to 0$ el gráfico de la función dada «se parece» a la parábola $y = \frac{15}{8}x^2 - 3$. El gráfico se muestra en la fig. 63.

2) La función está definida en todo lugar salvo el punto $x = 0$. Como

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=-\infty,$$

la recta $x=0$ es la asíntota vertical del gráfico. Seguidamente,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=-1,$$

por ello $y = 1$ es la asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$ e $y = -1$, la asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$. Ya que con $x\neq 0$ $|\sqrt{1+x^2}/x|>1$, los puntos del gráfico $x\to+\infty$ se aproximan superiormente a la recta $y=1$, en tanto que con $x\to-\infty$, inferiormente a la recta $y=-1$. La función dada es impar. Si $x>0$, entonces

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1},$$

por lo que al crecer x desde 0 hasta $+\infty$, los valores de $f(x)$ estrictamente decrecen desde $+\infty$ hasta 1. El gráfico de la función se muestra en la fig. 64. ▲

Ejemplo 3. Hallen todas las asíntotas del gráfico de la función $f(x)$ y constrúyanlo si:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$. 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$.

3) $f(x)=3\sqrt{\dfrac{x^2}{4}-1}$.

△ 1) La función está definida y es continua en todo lugar salvo $x=1$ y

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-2x}{x-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2-2x}{x-1}=-\infty,$$

por lo tanto, el gráfico sólo puede tener una asíntota vertical $x = 1$. Ya que

$$\frac{x^2-2x}{x-1}=x-1-\frac{1}{x-1}, \tag{9}$$

la recta $y = x - 1$ es, por lo visto, la asíntota oblicua del gráfico tanto con $x\to+\infty$ como con $x\to-\infty$. Con $x>1$ las funciones $x-1$ y $-1/(x-1)$ estrictamente crecen y, por lo tanto, también su suma, es decir, la función dada estrictamente crece. Por analogía, con $x<1$ la función dada estrictamente crece. De (9) se deduce que

con $x \to +\infty$ los puntos del gráfico se aproximan a la asíntota inferiormente ($f(x) < x-1$), en tanto que con $x \to -\infty$, superiormente. El gráfico se muestra en la fig. 65.

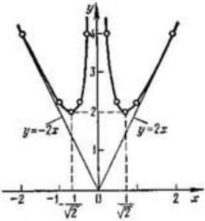


Fig. 66

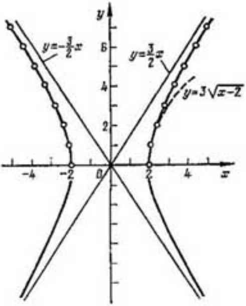


Fig. 67

2) La función está definida y es continua en todos los puntos salvo $x=0$ y

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|} = +\infty,$$

es decir, $x=0$ es la asíntota vertical del gráfico. Aclaremos si con $x \to \infty$ también hay asíntotas. Hallamos (véanse las fórmulas (5) y (6))

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{4+\frac{1}{x^4}} \to 2 \text{ con } x \to +\infty,$$

$$f(x)-2x = \frac{\sqrt{4x^4+1}-2x^2}{x} = \frac{1}{x\left(\sqrt{4x^4+1}+2x^2\right)} \to 0$$

$$\text{con } x \to +\infty.$$

Esto significa que $y=2x$ es la asíntota oblicua del gráfico con $x \to +\infty$, con ello $f(x) > 2x$, o sea, con $x \to +\infty$ los puntos del

gráfico se aproximan a la asíntota superiormente. Seguidamente,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x^4}}\right)=-2,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4x^4+1}+2x^2}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x(2x^2+\sqrt{4x^4+1})}=0,$$

lo que quiere decir que $y=-2x$ es la asíntota oblicua con $x\to-\infty$. Señalemos que $f(x)>-2x$, es decir, con $x\to-\infty$ los puntos del gráfico se aproximan a la asíntota $y=-2x$ superiormente. Ahora analicemos la función en lo que atañe a su monotonía. Como

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}=\sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}\geqslant\sqrt{2\sqrt{4x^2\cdot\frac{1}{x^2}}}=2,$$

con la particularidad de que el signo de igualdad sólo tiene lugar con $4x^2=1/x^2$, o sea, con $x=\pm 1/\sqrt{2}$, el valor de la función $f(1/\sqrt{2})=2$ es el mínimo en el intervalo $(0;\ +\infty)$. En el intervalo $(0;\ 1/\sqrt{2})$ la función decrece estrictamente, ya que si $0<x_1<x_2<1/\sqrt{2}$, entonces $f^2(x_2)-f^2(x_1)=4(x_2^2-x_1^2)-$ $-\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2}=(x_2^2-x_1^2)\frac{4x_1^2x_2^2-1}{x_1^2x_2^2}<0$. De modo análogo se demuestra que en el intervalo $(1/\sqrt{2};\ +\infty)$ la función estrictamente crece. La función es par. Su gráfico está representado en la fig. 66.

3) La función está definida y es continua con $|x|\geqslant 2$, lo que significa que ella no tiene asíntotas verticales. La función es par y vamos a analizarla con $x\geqslant 2$. Aquí la función estrictamente crece. Haciendo uso de la igualdad

$$f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}$$

y teniendo en cuenta que

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x+2}=2,$$

con $x\to 2$ hallamos

$$f(x)=3\sqrt{x-2}+o(\sqrt{x-2}),$$

es decir, el gráfico de la función dada «se parece» al de la función $y=3\sqrt{x-2}$ (fig. 67). Consecuentemente hallamos los límites

(fórmulas (5) y (6))

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{x^2-4}}{2x}=\frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{3}{2}x\right)=\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0;$$

de aquí se desprende que el gráfico tiene la asíntota oblicua $y = 3x/2$ (fig. 67). El gráfico de la función dada, ofrecido en la fig. 67, es parte de una hipérbola prefijada con la ecuación

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1;$$

la otra parte de la hipérbola ($y<0$) también está representada en la indicada figura. ▲

Al construir las curvas prefijadas paramétricamente también se emplea la noción de asíntota.

La recta $x = x_0$ recibe el nombre de *asíntota vertical* de la curva

$$x = x(t),\quad y = y(t) \tag{10}$$

si existe tal a (número, $+\infty$ o bien $-\infty$) que

$$\lim_{t\to a} x(t)=x_0,\quad \lim_{t\to a} y(t)=\infty, \tag{11}$$

o bien

$$\lim_{t\to a+0} x(t)=x_0,\quad \lim_{t\to a+0} y(x)=\infty, \tag{12}$$

o bien

$$\lim_{t\to a-0} x(t)=x_0,\quad \lim_{t\to a-0} y(x)=\infty. \tag{13}$$

La recta $y = b$ recibe el nombre de *asíntota horizontal* de la curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ *con* $x\to+\infty$ si existe tal a (número, $+\infty$ o bien $-\infty$) que

$$\lim_{t\to a} x(t)=+\infty,\quad \lim_{t\to a} y(t)=b, \tag{14}$$

o bien

$$\lim_{t\to a-0} x(t)=+\infty,\quad \lim_{t\to a-0} y(t)=b, \tag{15}$$

o bien

$$\lim_{t\to a+0} x(t)=+\infty,\quad \lim_{t\to a+0} y(t)=b. \tag{16}$$

La recta $y = kx + b$, $k \neq 0$ recibe el nombre de ***asíntota oblicua*** de la curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ *con* $x \to +\infty$ si existe tal a (número, $+\infty$ o bien $-\infty$) que

$$\lim_{t\to a} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a} y(t) = \infty, \tag{17}$$

$$\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = k, \tag{18}$$

$$\lim_{t\to a} (y(t) - kx(t)) = b, \tag{19}$$

o bien las condiciones (17)—(19) son cumplidas con $t \to a-0$, o bien las condiciones (17)—(19) son cumplidas con $t \to a+0$.

Por analogía se ofrecen las definiciones de las asíntotas con $x \to -\infty$.

Ejemplo 4. Hallen todas las asíntotas de la curva

$$x = \frac{t^2-2t}{t-1}, \quad y = \frac{\sqrt{t^4+1}}{t}$$

y constrúyanla.

△ Las funciones $x(t)$ e $y(t)$ están definidas para todos los valores de t salvo $t = 0$ y $t = 1$. Hallemos los límites de estas funciones cuando $t \to -\infty$, $t \to +\infty$, así como los límites izquierdo y derecho de los puntos $t = 0$ y $t = 1$:

1) $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$.

2) $\lim\limits_{t\to-0} x(t) = -0$, $\lim\limits_{t\to-0} y(t) = -\infty$;
$\lim\limits_{t\to+0} x(t) = +0$, $\lim\limits_{t\to+0} y(t) = +\infty$.

3) $\lim\limits_{t\to1-0} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to1-0} y(t) = \sqrt{2}+0$.
$\lim\limits_{t\to1+0} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to1+0} y(t) = \sqrt{2}+0$.

4) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.

De 2) se desprende que la recta $x = 0$ es la asíntota vertical de la curva, con la particularidad de que con $y \to -\infty$ la curva se aproxima a la asíntota por la izquierda ($x(t) < 0$), mientras que con $y \to +\infty$, por la derecha ($x(t) > 0$) (fig. 68). De 3) llegamos a la conclusión de que la recta $y = \sqrt{2}$ es la asíntota horizontal de la curva tanto con $x \to -\infty$ como con $x \to +\infty$, con ello, en los dos casos, la curva se aproxima a la asíntota superiormente (fig. 69). En

los casos 1) y 4) analicemos si tiene la curva asíntotas oblicuas. Hallamos (véanse (18) y (19))

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\sqrt{t^4+1}\,(t-1)}{t^2(t-2)}=1,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}(y(t)-x(t))=\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{t^4+1}}{t}-\frac{t^2-2t}{t-1}\right)=$$

$$=\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{t^4+1}}{t}-t+\frac{t}{t-1}\right)=\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{t^4+1}-t^2}{t}+\frac{t}{t-1}\right)=$$

$$=\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{t(\sqrt{t^4+1}+t^2)}+\frac{t}{t-1}\right)=1.$$

Por consiguiente, la curva tiene la asíntota $y=x+1$ tanto con $x\to-\infty$ como con $x\to+\infty$. Ya que

$$y(t)-x(t)-1=\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t(\sqrt{t^4+1}+t^2)},$$

entonces $y(t)-x(t)-1\to-0$ con $t\to-\infty$ (correspondientemente, $x(t)\to-\infty$) e $y(t)-x(t)-1\to+0$ con $t\to+\infty$ (correspondientemente, $x(t)\to+\infty$). Por ello, con $x\to-\infty$ la curva se

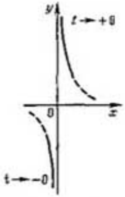


Fig. 68

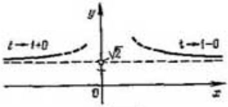


Fig. 69

aproxima a la asíntota inferiormente, y con $x\to+\infty$, superiormente (fig. 70). Así, pues, la curva tiene la asíntota vertical $x=0$, la horizontal $y=\sqrt{2}$ y la oblicua $y=x+1$ (tanto con $x\to+\infty$ como con $x\to-\infty$). Representemos en un mismo sistema de coordenadas los gráficos de las funciones dadas $x(t)$ e $y(t)$. El primero de ellos fue construido en el ejemplo 3, 1) (fig. 65), el segundo se construye como en el ejemplo 3, 2), la única diferencia radica en que la función $y(t)$ es impar. En la fig. 71 el primer gráfico está representado

con línea llena, el segundo, con línea de puntos y rayas. Haciendo uso de estos dos gráficos y tomando en consideración la anterior investigación de las asíntotas, es posible, hablando en lenguaje de mecánica, imaginarse el movimiento del punto $(x(t); y(t))$ por el plano xOy al variar t desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Tracemos en el plano las asíntotas rectas $y = x + 1$ e $y = \sqrt{2}$. Analicemos los tres intervalos en el eje t: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$. Al crecer t desde $-\infty$

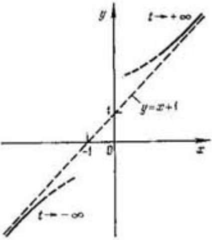


Fig. 70

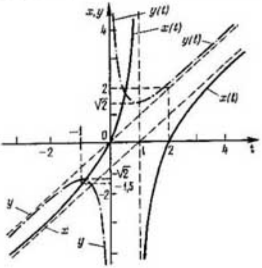


Fig. 71

hasta 0 los valores de $x(t)$ (fig. 71) estrictamente crecen desde $-\infty$ hasta 0, los valores de $y(t)$ inicialmente crecen desde $-\infty$, alcanzando el máximo con $t = -1$ $(y(-1) = -\sqrt{2},\ x = (-1) = -1{,}5)$ y, a continuación, decrecen hasta $-\infty$. Con $t \to -\infty$ el punto de la curva $(x(t); y(t))$ se aproxima a la asíntota $y = x + 1$ inferiormente (fig. 70), en tanto que con $t \to -0$, a la asíntota $x = 0$ por la izquierda (fig. 68). Después de hallar varios puntos intermedios, diseñamos esta parte de la curva (fig. 72). En el segundo intervalo, al crecer t desde 0 hasta 1, los valores de $x(t)$ crecen desde 0 hasta $+\infty$, y los de $y(t)$ decrecen desde $+\infty$ hasta $\sqrt{2}$ (con $t = 1$ el punto de la curva no está definido, por ello sólo podemos hablar acerca de los límites de $x(t)$ e $y(t)$ cuando $t \to 1 \pm 0$). El punto de la curva se mueve en el primer cuadrante pasando de la asíntota $x = 0$ (con $t \to +0$) a la asíntota $y = \sqrt{2}$ (superiormente) con $t \to 1 - 0$. Por fin, al crecer t desde 1 hasta $+\infty$, los valores de $x(t)$ crecen desde $-\infty$ hasta $+\infty$, los valores de $y(t)$ crecen desde $\sqrt{2}$ hasta $+\infty$. Esta parte de la curva está situada en los 1º y 2º

cuadrantes, el punto de la curva se mueve pasando de la asíntota $y = \sqrt{2}$ (con $t \to 1 + 0$) a la asíntota $y = x + 1$ (superiormente) con $t \to +\infty$. Tomando todo esto en consideración está representada la curva en la fig. 72. Por supuesto, ciertos detalles de la figura («uniformidad o bien suavidad», conducta en las proximidades de los puntos del máximo $x = -1{,}5$, $y = -\sqrt{2}$, etc.) requieren aún fundamentación. Ella puede ser aducida según los métodos de

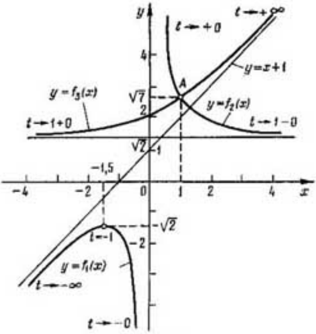


Fig. 72

cálculo diferencial y los correspondientes ejemplos serán examinados en el § 21. Señalemos que los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ fueron elegidos de tal forma que en cada uno de ellos estén definidas y sean continuas ambas funciones $x(t)$ e $y(t)$, con ello la función $x(t)$ estrictamente crezca. Por esto, para la función $x = x(t)$ existe en el intervalo $(-\infty; 0)$ la función inversa $t = t_1(x)$, $x \in (-\infty; 0)$, continua y creciente, para la que el intervalo $(-\infty; 0)$ es el conjunto de sus valores. Por consiguiente, el par de funciones $x(t)$, $y(t)$, $t \in (-\infty; 0)$, prefija de forma paramétrica la función $y = f_1(x) = y(t_1(x))$, $x \in (-\infty; 0)$. El gráfico de esta función es una parte de la curva que corresponde a los valores de $t \in (-\infty; 0)$ (fig. 72). Por analogía, para $x = x(t)$, $t \in (0; 1)$, está definida la función inversa $t = t_2(x)$, $x \in (0; +\infty)$, continua y creciente, con el conjunto de valores $(0; 1)$. El par de funciones $x(t)$, $y(t)$, $t \in$

$\in (0;\ 1)$ prefija de forma paramétrica la función $y = f_2(x) = y(t_2(x)),\ x \in (0;\ +\infty)$. El gráfico de esta función es una parte de la curva correspondiente a $t \in (0;\ 1)$, (fig. 72). Para $x = x(t)$, $t \in (1;\ +\infty)$ hay una función inversa $t = t_3(x),\ x \in \mathbb{R}$, con el conjunto de valores $(1;\ +\infty)$. Con $t \in (1;\ +\infty)$ parte de la curva es el gráfico de la función $y = f_3(x) = y(t_3(x)),\ x \in \mathbb{R}$ (fig. 72). Las indicadas partes de la curva son denominadas, en ciertas ocasiones, *ramas* de la curva. En lugar de los sectores de monotonía de la función $x(t)$ suele ser cómodo considerar sectores de monotonía de la función $y(t)$ y, respectivamente, las funciones de la forma $x = g(y)$, prefijadas de modo paramétrico. Señalemos que la curva construida tiene el llamado *punto múltiple* (el punto A en la fig. 72). Con el fin de determinar los puntos múltiples es preciso hallar todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x(u) = x(v), \\ y(u) = y(v), \\ u > v \end{cases}$$

respecto de u y v. En nuestro caso, este sistema tiene una sola solución $u = (3 + \sqrt{5})/2,\ v = (3 - \sqrt{5})/2$, y el punto múltiple tiene las coordenadas $x(u) = 1,\ y(u) = \sqrt{7}$. ▲

En coordenadas polares la recta prefijada con la ecuación

$$r = \frac{d}{\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0)}, \quad d \neq 0 \tag{20}$$

es la asíntota del gráfico de la función $r = r(\varphi)$ si se cumplen las condiciones

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} r(\varphi) = +\infty, \tag{21}$$

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} r(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) = d. \tag{22}$$

Esta recta está alejada del centro a una distancia $|d|$; la perpendicular bajada desde el centro a la recta compone con el rayo polar un ángulo igual a

$$\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} d.$$

Si junto con la condición (21) en lugar de (22) se cumple la condición

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} r(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) = 0, \tag{23}$$

la asíntota del gráfico de función $r = r(\varphi)$ es una recta que pasa por el centro y que contiene el rayo $\varphi = \varphi_0$

Ejemplo 5. Hallen las asíntotas del gráfico de la función

$$r(\varphi)=\frac{3\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\operatorname{sen}^3\varphi}$$

y construyan este gráfico en coordenadas polares.

△ La función dada es periódica con período 2π, por ello es suficiente considerar el segmento $[-\pi/2;\ 3\pi/2]$ de una longitud 2π. Aquí la función está definida para

$$\varphi\in[-\pi/2;\ -\pi/4)\cup[0;\ \pi/2]\cup(3\pi/4;\ \pi],$$

con la particularidad de que

$$\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0} r(\varphi)=+\infty \text{ y } \lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0} r(\varphi)=+\infty.$$

Respectivamente, hallamos

$$\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0} r(\varphi)\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0}\frac{3\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{2}\,(1-\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi)}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0} r(\varphi)\operatorname{sen}\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)=\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0} r(\varphi)\left(-\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Así, pues, con $\varphi\to-\pi/4-0$ la asíntota es la recta

$$r=-\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\varphi+(\pi/4))},$$

mientras que con $\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0$, la recta

$$r=\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\varphi-(3\pi/4))}.$$

Como $\operatorname{sen}(\varphi-(3\pi/4))=-\operatorname{sen}(\varphi+(\pi/4))$ ésta es una misma recta. Construyámosla: el segmento OA (fig. 73) de longitud $1/\sqrt{2}$ se hace girar al ángulo $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(-1)=-\frac{3\pi}{4}$ y por el punto obtenido A_1 trazamos una recta perpendicular a OA_1 que es la asíntota. Determinemos cómo se dispone la curva respecto de su asíntota. Con $\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0$, tenemos (fig. 73)

$$|MQ|=\left|r(\varphi)\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{3}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{1-\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}-1\right|<$$

$$<\frac{3}{\sqrt{2}}\left(+1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

De forma que $|MQ| < |PQ|$, es decir, los puntos de la curva se encuentran sobre la asíntota. Si $\varphi \to 3\pi/4 + 0$, entonces

$$|NS| = r(\varphi)\operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{1-\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}\right) <$$

$$< \frac{3}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

por esta razón, $|NS| < |RS|$ y los puntos de la curva se disponen también sobre la asíntota. De los cálculos realizados más arriba se desprende que

$$|PM| = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{2}{2-\operatorname{sen} 2\varphi}\right)$$

y se ve que $|PM|$ estrictamente decrece al crecer φ desde $-\pi/2$ hasta $-\pi/4$. De manera análoga establecemos que $|RN|$ (fig. 73)

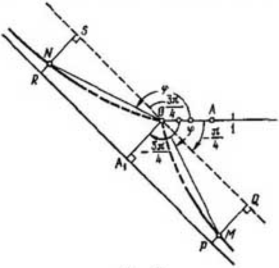


Fig. 73

estrictamente decrece al decrecer φ desde π hasta $3\pi/4$. Esquemáticamente esto se muestra en la fig. 73. La curva pasa dos veces por el centro O, ya que $r = 0$ con $\varphi = -\pi/2$ y $\varphi = \pi$ (o sea, O es el punto múltiple de la curva). Investiguemos la forma de la curva cerca del punto O. Si $\varphi \to -\pi/2$, entonces

$$\cos\varphi = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sim \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \operatorname{sen}\varphi \sim -1;$$

por ello, $\cos^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi \sim -1$, y

$$r(\varphi) \sim \frac{-3(\pi/2+\varphi)}{-1} = 3\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

Pasando a las coordenadas cartesianas, obtenemos

$$x=r(\varphi)\cos\varphi\sim 3\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)^2,$$

$$y=r(\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\sim -3\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right),$$

de donde $x\sim y^2/3$, es decir, con $\varphi\to-\pi/2$ la curva «se funde» con la parábola $x=y^2/3$ (fig. 74). Por analogía, cuando $\varphi\to\pi$, tenemos

$$\mathrm{sen}\,\varphi=\mathrm{sen}\,(\pi-\varphi)\sim\pi-\varphi,\quad \cos\varphi\sim-1,$$
$$\mathrm{sen}^3\varphi+\cos^3\varphi\sim-1,\quad r(\varphi)\sim 3(\pi-\varphi),$$

de donde

$$x\sim-3(\pi-\varphi),\quad y\sim 3(\pi-\varphi)^2\sim x^2/3,$$

es decir, el gráfico de la función dada $r=r(\varphi)$ «se parece» a la parábola $y=x^2/3$ (fig. 74). De esta misma forma hallaremos que $y\sim x^2/3$

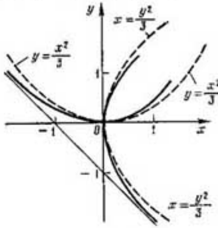


Fig. 74

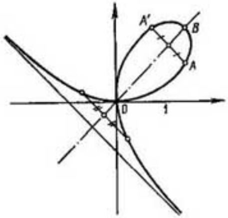


Fig. 75

con $\varphi\to 0$ y $x\sim y^2/3$ con $\varphi\to\pi/2$. La parte restante del gráfico ($\varphi\in[0;\ \pi/2]$) se construye por puntos (fig. 75). Señalemos que esta parte, igual que todo el gráfico, es simétrica con relación a la recta $\varphi=\pi/4$, ya que $r\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=r(\varphi)$, lo que es equivalente a la igualdad $r\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=r\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Una construcción más fundamentada del «lazo» $OABA'O$ se efectuará más adelante haciendo uso de la noción de derivada.

La curva construida recibe el nombre de *folio de Descartes* del que se ha aludido por vez primera en las cartas de R. Descartes. En las coordenadas cartesianas esta curva se prefija con la ecuación $x^3+y^3=3xy$, lo que es fácil de comprobar. ▲

Durante el análisis y la construcción de una curva, prefijada con la ecuación $F(x, y) = 0$, en ocasiones, se consigue representar la curva o bien parte de ella como el gráfico de la función $y = f(x)$ (ella satisface la igualdad $F(x; f(x)) = 0$) o como el gráfico de la función $r = r(\varphi)$ en coordenadas polares (esta función satisface la igualdad $F(r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\operatorname{sen}\varphi) = 0$). A veces, es posible prefijar la curva paramétricamente. En semejantes casos, para el análisis y la construcción de la curva es posible aplicar el método de separación de la parte principal y los procedimientos de cálculo de las asíntotas, indicados anteriormente (ejemplo 3, 3), ejemplo 5).

Recibe el nombre de *curva algebraica de n-ésimo orden* aquella que en el sistema cartesiano de coordenadas se puede prefijar con la ecuación de la forma

$$\sum a_{kl} x^k y^l = 0, \qquad (24)$$

donde la suma está compuesta de todos los enteros k y l tales que $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant l \leqslant n$, $k + l \leqslant n$ y hay al menos un sumando no nulo para el que $k + l = n$. Si la recta $y = kx + b$ es la asíntota de una curva algebraica, los coeficientes k y b pueden ser hallados de la forma siguiente. Pongamos en la ecuación (24) $y = kx + b$ y en el polinomio obtenido respecto de x, igualamos a cero los coeficientes de las dos mayores potencias de x, los coeficientes k y l son las soluciones de este sistema de dos ecuaciones.

Si la recta $x = x_0$ es la asíntota vertical de una curva algebraica, x_0 es la raíz del polinomio respecto de x y que es el coeficiente de la potencia mayor de y en la ecuación de la curva.

Ejemplo 6. Hallen las asíntotas de la curva

$$x^3 - 3xy^2 = R(x^2 + y^2), \quad R > 0, \quad x \neq 0.$$

△ El coeficiente de la potencia mayor de y (es decir, de y^2) es igual a $3x + R$. Por consiguiente, la asíntota vertical sólo puede ser la recta $x = -R/3$. Con el fin de hallar las asíntotas oblicuas, pongamos en la ecuación dada $y = kx + b$. Obtenemos

$$(3k^2 - 1)x^3 + (6kb + Rk^2 + R)x^2 + (3b^2 + 2Rkb)x + Rb^2 = 0$$

e igualando a cero los coeficientes de las potencias mayores de x (es decir, de x^3 y x^2), llegamos al sistema

$$\begin{cases} 3k^2 - 1 = 0, \\ 6kb + Rk^2 + R = 0. \end{cases}$$

Este sistema nos proporciona dos soluciones

$$k = \pm 1/\sqrt{3}, \quad b = \mp 2R/3\sqrt{3}.$$

Esto quiere decir que las rectas

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2R}{3\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2R}{3\sqrt{3}}$$

pueden ser las asíntotas oblicuas de la curva. En efecto, las tres rectas halladas son asíntotas de la curva dada. De esto es fácil cerciorarse, p. ej., pasando a las coordenadas polares, entonces la ecuación de la curva dada tomará la forma

$$r = R/\cos 3\varphi.$$

También se puede emplear la prefijación de esta curva con ayuda del parámetro $t = y/x$. Poniendo $y = tx$ en la ecuación de la curva, hallamos que

$$x=R\,\frac{1+t^2}{1-3t^2}, \quad y=R\,\frac{t\,(1+t^2)}{1-3t^2},$$

estas funciones prefijan la curva inicial. La curva considerada lleva el nombre de *trisectriz de Langan*. Ella puede ser utilizada para dividir el ángulo en tres partes iguales. ▲

Hallen las asíntotas del gráfico de la función $y = y\,(x)$ (**11.1**)—(**11.7**) si:

11.1. 1) $y=\frac{1}{1-x^2}$. 2) $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.

3) $y=\frac{x^3}{6x^2-8-x^4}$. 4) $y=\frac{x}{1+x^2}$.

5) $y=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$. 6) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$.

7) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$. 8) $y=(2-x)^{2/3}-(2+x)^{2/3}$.

11.2. 1) $y=x+\frac{1}{x^2}$. 2) $y=x+\frac{x^2}{x^2+1}$.

3) $y=\frac{x^2+8x-6}{x}$. 4) $y=\frac{x^2}{x+4}$. 5) $y=\frac{x^2}{|x|+1}$.

6) $y=\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$. 7) $y=\frac{x^3}{(x+1)^2}$.

8) $y=\frac{x^2-2x+3}{x+2}$. 9) $y=\frac{x^3-3ax^2+a^3}{x^2-3bx+2b^2}$.

10) $y=\frac{x^5}{x^4+1}$.

11.3. 1) $y=\sqrt{x^2-4}$. 2) $y=\sqrt{x^2+3x-1}$.

3) $y=\sqrt[3]{x^3-6x}$. 4) $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$.

5) $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$. 6) $y=x\sqrt{\frac{x}{x+4}}$.

7) $y=\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{x^4-x^3}$.

8) $y=\sqrt{x^2-1}-x$. 9) $y=x+\sqrt{4x^2+1}$.

11.4. 1) $y=e^{-1/x}$. 2) $y=0,1^{x^2}$. 3) $y=2^{-1/x^2}$.

4) $y=\dfrac{2^x}{x}$. 5) $y=x^2e^x$. 6) $y=e^{1/x}-x$.

7) $y=1-xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$. 8) $y=1+xe^{2/x}$.

9) $y=x2^{1/x^2}$. 10) $y=|e^x-1|$. 11) $y=|x+2|e^{-1/x}$.

11.5. 1) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. 2) $y=x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$. 3) $y=\operatorname{th} x$.

4) $y=\operatorname{cth} x$. 5) $y=\operatorname{th}^2 x$. 6) $y=x\operatorname{th} x$.

7) $y=2x+\operatorname{cth} x$. 8) $y=x\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

11.6. 1) $y=\log_3(4-x^2)$. 2) $y=\log_{0,5}(2x^2-3x+1)$.

3) $y=\log \operatorname{sen} 2x$. 4) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

5) $y=\ln(1+e^x)$. 6) $y=x\log\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$.

11.7. 1) $y=\dfrac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$. 2) $y=\operatorname{cosec} 2x$.

3) $y=\dfrac{\cos x}{x}$. 4) $y=x+\dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$. 5) $y=x\operatorname{sen}(1/x)$.

6) $y=2+\cos(2/x)$. 7) $y=\operatorname{arcctg} x$. 8) $y=\operatorname{arctg}(1/x)$.

9) $y=\operatorname{arcsen}(1/x^2)$. 10) $y=\dfrac{x}{2}+\arccos\dfrac{1}{x+1}$.

11) $y=2x-\operatorname{arctg}(x/2)$. 12) $y=x\operatorname{arcctg} x$.

13) $y=x\operatorname{arctg} x$. 14) $y=\dfrac{1}{\operatorname{arcctg}(1/x)}$.

11.8. Hallen la asíntota de la función inversa a la función f si:

1) $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{x+1}$, $x>-1$. 2) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

3) $f(x)=1-2\sqrt[3]{x^3+3x}$. 4) $f(x)=\operatorname{th} x$.

5) $f(x)=\operatorname{cth} x$. 6) $f(x)=2x+\operatorname{arctg} x$.

11.9. 1) La función f está definida en el intervalo $(a; +\infty)$. Demuestren que para que la recta $y=kx+b$ sea la asíntota del gráfico de la función f cuando $x\to+\infty$ es necesario y suficiente que la distancia $\rho(x)$ desde el punto $(x, f(x))$ hasta dicha recta tienda a cero cuando $x\to+\infty$.

2) Demuestren que en el caso de la asíntota vertical la necesidad de la anterior afirmación es cierta, mientras que la suficiencia no lo es.

11.10. ¿Puede tener el gráfico de la función dos diferentes asíntotas cuando $x \to +\infty$?

11.11. Empleando el método de separación de la parte principal construyan el gráfico de la función $y = y(x)$ si:

1) $y = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{1-x}}$. 2) $y = x\sqrt{4-x^2}$.

3) $y = \sqrt{x^2 - x^4}$. 4) $y = \sqrt[4]{9x^2 - x^4}$.

5) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{1+x^2}}$. 6) $y = \sqrt[4]{\frac{x^4}{3+x^4}}$.

7) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. 8) $y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$. 9) $y = x^{3/2} - 4x^{1/2}$.

11.12. La función f está definida en los entornos del punto x_0 y

$$f(x) = a(x - x_0) + o((x - x_0)), \quad a \neq 0.$$

Demuestren que:

1) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{a(x - x_0)} + o(\sqrt{|x - x_0|})$ con $a(x - x_0) \geqslant 0$, es decir, los gráficos de las funciones $\sqrt{f(x)}$ y $\sqrt{a(x - x_0)}$ "se aproximan" cuando $x \to x_0$.

2) Si $\alpha > 0$, entonces

$$(f(x))^\alpha = (a(x - x_0))^\alpha + o(|x - x_0|^\alpha)$$

con $a(x - x_0) > 0$, es decir, los gráficos de las funciones $(f(x))^\alpha$ y $(a(x - x_0))^\alpha$ "se aproximan" cuando $x \to x_0$.

11.13. 1) La función f está definida en los entornos del punto x_0 y

$$f(x) = a(x - x_0) + o((x - x_0)^2), \quad a \neq 0.$$

Demuestren que

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a(x - x_0)} + o(1),$$

es decir, los gráficos de las funciones $\frac{1}{f(x)}$ y $\frac{1}{a(x - x_0)}$ "se aproximan" cuando $x \to x_0$.

2) Comprueben que la función $f(x) = x + x^{4/3}$ satisface la condición

$$f(x) = x + o(x) \quad \text{cuando } x \to 0,$$

pero la igualdad

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + o(1) \quad \text{cuando } x \to 0$$

no es cierta.

11.14. Demuestren que la distancia entre los puntos $(x;\ f_1(x))$ y $(x;\ f_2(x))$ de los gráficos de las funciones f_1 y f_2 tienden a cero si:

1) $f_1(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$, $f_2(x)=\frac{x^2}{x-1}$, $x\to\infty$.

2) $f_1(x)=\sqrt{x^3+bx+c}$, $f_2(x)=x^{3/2}$, $x\to+\infty$.

3) $f_1(x)=\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}$, $f_2(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x-a}}$, $x\to+\infty$.

4) $f_1(x)=\sqrt{x^6+2x^4+bx^2+c}$, $f_2(x)=x^3+x$, $x\to+\infty$.

5) $f_1(x)=\operatorname{ch} x$, $f_2(x)=\frac{1}{2}e^x$, $x\to+\infty$.

6) $f_1(x)=\operatorname{sh} x$, $f_2(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}$, $x\to-\infty$.

7) $f_1(x)=\operatorname{ctg} x$, $f_2(x)=1/x$, $x\to 0$.

8) $f_1(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, $f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2(x-1)}}$, $x\to 1+0$.

11.15. ¿Cuáles de las funciones f, g tienen asíntota con $x\to+\infty$ si:

1) $f(x)=x+\sqrt{x}$, $g(x)=x+\sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

2) $f(x)=\ln(e^x\cdot x^{1/\sqrt{x}})$, $g(x)=\ln\frac{e^x}{x+2}$.

3) $f(x)=\frac{(x+1)\ln x+1}{\ln x+1}$, $g(x)=\frac{(x+1)\ln x+x}{\ln x+1}$.

4) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$, $g(x)=\sqrt[4]{x^4+bx}$?

11.16. Hallen las asíntotas de la función

$$y=\frac{a_{n+1}x^{n+1}+a_nx^n+P_{n-1}(x)}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+Q_{n-2}(x)}$$

cuando $x\to\infty$, si $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $a_{n+1}\neq 0$, $b_n\neq 0$, a_n, b_{n-1} son números prefijados mientras que $P_{n-1}(x)$ y $Q_{n-2}(x)$, polinomios de grado no mayor que $n-1$ y $n-2$, respectivamente.

11.17. Sean $P_k(x)=x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k$, $Q_l(x)=x^l+b_1x^{l-1}+\ldots+b_l$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Determinen con cuáles $k,\ l\in\mathbb{N}$ la función $y=\sqrt[n]{\frac{P_k(x)}{Q_l(x)}}$ tiene asíntota cuando $x\to+\infty$ y hállenla.

11.18. Establezcan si los puntos del gráfico de la función $y=y(x)$ se aproximan superior o inferiormente a la asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$ si:

1) $y=\frac{x^2+1}{x}$. 2) $y=\frac{x^3+1}{x^2}$. 3) $y=\frac{(x+1)^3}{(x+2)^2}$.

4) $y=\frac{x^2}{|x+1|}$. 5) $y=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$. 6) $y=\frac{x^3+2\,\text{sen}\,x}{x^2+1}$.

Hallen las asíntotas del gráfico de la función y constrúyanlo (11.19) —11.22):

11.19. 1) $y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$. 2) $y=\frac{x-1}{x^2-2x}$. 3) $y=\frac{x^3}{1-x^2}$.

4) $y=\frac{(x-3)^2}{4x-4}$. 5) $y=\frac{x^3}{1+x^2}$. 6) $y=\sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}$.

7) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. 8) $y=\frac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$. 9) $y=1-\sqrt{4x^2+1}$.

10) $y=\sqrt{x^2+4x+5}-2$. 11) $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$.

11.20. 1) $y=e^{1/(3+x)}$. 2) $y=\ln(4-x^2)$.

3) $y=\frac{e^x}{e^x-1}$. 4) $y=\log_{x^2-6x+7} 2$.

5) $y=\ln(1+2e^x)$. 6) $y=\ln\cos x$.

7) $y=\ln\,\text{arctg}\,x$. 8) $y=e^{1/\text{sen}\,x}$.

11.21. 1) $y=x+\frac{\text{sen}\,x}{x}$. 2) $y=x^2\,\text{sen}\,(1/x)$.

3) $y=(x+1)^2\,\text{sen}\,(2/x)$. 4) $y=x+\text{arctg}\,x$.
5) $y=(x+1)\,\text{arcctg}\,x$. 6) $y=x\,\text{arccos}\,(1/x)$.
7) $y=3x+\text{arctg}\,5x$. 8) $y=\text{arctg}\,(1/x)-x$.
9) $y=x^2\,\text{arctg}\,(1/x)$.

11.22. 1) $y=\frac{x-E(x)}{E(x)}$. 2) $y=\frac{\text{sen}\,x}{x^2-x}$.

3) $y=\frac{E(x^3)}{x^2+1}$. 4) $y=\frac{\text{sen}\,x}{E(x/\pi)+0{,}5}$.

11.23. Hallen la asíntota de la curva:

1) $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$, $a>0$.

2) $x=\frac{t-8}{t^2-4}$, $y=\frac{3}{t(t^2-4)}$.

3) $x=\frac{at^4}{1-t^3}$, $y=\frac{at^3}{1-t^3}$, $a>0$.

4) $x=\frac{t^3}{t^2+1}$, $y=\frac{t^3-2t^2}{t^2+1}$.

5) $x=\frac{5at^2}{1+t^5}$, $y=\frac{5at^3}{1+t^5}$, $a>0$.

6) $x=t^3+3t+1$, $y=t^3-3t+1$.

7) $x=t^3-3\pi$, $y=t^3-6\,\text{arctg}\,t$.

8) $x=t+\operatorname{sen} t,\ y=t+\cos t$. 9) $x=te^{t},\ y=te^{-t}$.

10) $x=t\ln t,\ y=t\ln(t+1)$.

11) $x=\dfrac{2e^{t}}{t-1},\ y=\dfrac{te^{t}}{t-1}$.

12) $x=t+e^{-t},\ y=2t+e^{-2t}$.

11.24. Hallen la asíntota de la curva y construyan ésta:

1) $x=\dfrac{1}{t},\ y=\dfrac{t}{t+1}$. 2) $x=\dfrac{2t}{1-t^{2}},\ y=\dfrac{t^{2}}{1-t^{2}}$.

3) $x=a\operatorname{ch} t,\ y=b\operatorname{sh} t$. 4) $x=2\cos t,\ y=\operatorname{tg} 2t$.

5) $x=\dfrac{1}{\operatorname{sen} t},\ y=\dfrac{1}{\operatorname{sen} 2t}$. 6) $x=\dfrac{t}{t^{2}+1},\ y=\dfrac{t^{2}}{t-1}$.

7) $x=\dfrac{2+t^{2}}{1+t^{2}},\ y=\dfrac{t^{3}}{1+t^{2}}$. 8) $x=\dfrac{t^{2}}{t-1},\ y=\dfrac{t}{t^{2}-1}$.

11.25. Hallen las asíntotas de los gráficos de las funciones prefijadas en coordenadas polares:

1) $r=\sqrt[4]{\dfrac{24}{\operatorname{sen} 2\varphi\,(1-\operatorname{sen} 2\varphi)}}$. 2) $r=\sqrt[4]{-\dfrac{4}{\operatorname{sen} 4\varphi}}$.

3) $r=\dfrac{2a\operatorname{sen}^{2}\varphi}{\cos\varphi}$. 4) $r=\dfrac{4\cos^{2}\varphi\operatorname{sen}\varphi}{\cos 2\varphi}$ (escifoide).

5) $r=\dfrac{3\cos^{2}\varphi}{\cos^{3}\varphi+\operatorname{sen}^{3}\varphi}$. 6) $r=\dfrac{\operatorname{sen}^{2}\varphi}{\cos^{2}\varphi\,(\cos\varphi-2\operatorname{sen}\varphi)}$.

11.26. Hallen las asíntotas de los gráficos de las funciones y construyan los gráficos en coordenadas polares:

1) $r=\dfrac{\pi}{\varphi-\dfrac{\pi}{4}}$. 2) $r=\sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$ (*lituus*).

3) $\varphi=\dfrac{r}{r-1},\ r>1$. 4) $\varphi=\dfrac{r}{r^{2}+1},\ r\geqslant 0$.

5) $r=2\operatorname{tg}\varphi$. 6) $r=\dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi},\ p>0,\ \varepsilon>1$.

7) $r=-\dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},\ p>0,\ \varepsilon>1$.

8) $r=2|1-\operatorname{tg}\varphi|$. 9) $r=\dfrac{2}{|\operatorname{sen} 2\varphi|}$.

10) $r=\dfrac{a}{\cos 3\varphi},\ a>0$. 11) $r=\dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}},\ a>0$.

12) $r=a\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi-1},\ a>0$.

13) $r=2R\operatorname{tg}\varphi\operatorname{sen}\varphi,\ R>0$ (*cisoide*).

14) $r=\frac{a}{\cos\varphi}\pm a\operatorname{tg}\varphi,\ a>0$ (*estrofoide*).

15) $r=a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$. 16) $r=\sqrt[3]{\frac{2\cos\varphi}{\cos^2 2\varphi}}$.

17) $r=\frac{\sqrt{2\operatorname{sen}2\varphi}}{|\cos 2\varphi|}$. 18) $r=\sqrt{-\frac{\operatorname{tg}2\varphi}{2}}$.

11.27. Hallen las asíntotas de la curva prefijada en la ecuación:
1) $x^2y^2+x-2y=0$. 2) $x^2y^2+y=1$.
3) $(x-1)(x-2)y^2=x^2$. 4) $x^2y+xy^2=1$.
5) $y^3-x^3=6x^2$. 6) $y^2(a-x)=x^2(a+x),\ a>0$.
7) $x^3-3xy^2=2$. 8) $(x^2-1)^3-x^4y^2=0$.
9) $x^4-y^4=x^2-2y^2$. 10) $xy(x-y)+x+y=0$.
11) $xy(x+y)+x^2=2y^2$. 12) $(x^2-1)y^2=x^2(x^2-4)$.
13) $y^3-x^3+y-2x=0$. 14) $x^4-y^4=4x^2y$.
15) $x^4-2x^2y^2+y^3=0$.
16) $\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(y^2-\frac{x^2}{3}\right)+\frac{4}{9}ax^2=0,\ a>0$. 17) $x^y=y^x$.

11.28. Sea M_0 un punto fijado y M, un punto variable de la curva de segundo orden

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Demuestren que las coordenadas del punto M son funciones racionales del coeficiente angular de la recta M_0M.

11.29. Hallen las asíntotas de la curva y construyan ésta:
1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. 2) $(y+x+1)^2=x^2+1$.
3) $2x^2-5xy+2y^2+x+y-3=0$.
4) $4x^2+9y^2=x^2y^2$. 5) $y^3+x^3=8$.
6) $y^2(x^2+1)=x^2(x^2-1)$. 7) $y^2(4-x)=x^3$ (*cisoide*).
8) $4x^{4/3}-y^{4/3}=1$. 9) $x^2y^2+y^4=4x^2$.
10) $xy(x^2-y^2)+1=0$. 11) $(x^2-y^2)^2+4xy=0$.
12) $(x^2+y^2)(y-1)^2-y^2=0$ (*concoide*).

§ 12. Continuidad uniforme de una función

Definición. La función f lleva el nombre de *continua uniformemente sobre el conjunto* $X\subset D(f)$ si para todo $\varepsilon>0$ existe tal $\delta>0$ que para cualesquiera $x',x''\in X$ que satisfacen la condición $|x'-x''|<\delta$ es cierta la desigualdad

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon;$$

más brevemente

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x'\in X\ \forall x''\in X$$
$$(|x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon). \quad (1)$$

Ejemplo 1. Demuestren que la función $y = \operatorname{sen} x$ es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$.

$\triangle$Sean x', x'' números arbitrarios; estimemos el módulo de la diferencia:

$$|\operatorname{sen} x' - \operatorname{sen} x''| = \left|2 \operatorname{sen} \frac{x'-x''}{2} \cdot \cos \frac{x'-x''}{2}\right| \leqslant |x' - x''|, \quad (2)$$

ya que

$$\left|\operatorname{sen} \frac{x'-x''}{2}\right| \leqslant \frac{|x'-x''|}{2}, \quad \left|\cos \frac{x'+x''}{2}\right| \leqslant 1.$$

Sea ε un número positivo tomado al azar. Tomemos $\delta = \varepsilon$, entonces para cualesquiera $x' \in R$, $x'' \in R$ de la desigualdad $|x' - x''| < \delta$, debido a (2), se deduce la desigualdad

$$|\operatorname{sen} x' - \operatorname{sen} x''| < \delta = \varepsilon.$$

Así, pues, la función $y = \operatorname{sen} x$ es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$. ▲

La negación de la definición de la continuidad uniforme de la función f sobre el conjunto X tiene la forma:

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x' \in X \exists x'' \in X$

$$(|x' - x''|) < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon). \quad (3)$$

Ejemplo 2. Demuestren que la función $y = 1/x$: 1) es uniformemente continua en cualquier intervalo $[a; +\infty)$, donde $a > 0$; 2) no es uniformemente continua en cualquier intervalo $(0; a]$.

$\triangle$1) Sea x', $x'' \in [a; +\infty)$, $a > 0$; entonces

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x'-x''|}{x' \cdot x''} \leqslant \frac{1}{a^2} |x' - x''|,$$

ya que $x' \geqslant a > 0$, $x'' \geqslant a > 0$. Sea ε un número positivo arbitrario; tomemos $\delta = a^2\varepsilon$, entonces para cualesquiera x', x'' de $[a; +\infty)$, de la desigualdad $|x' - x''| < \delta$ se desprende que

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| < \frac{1}{a^2} \delta = \varepsilon.$$

Esto significa la continuidad uniforme de la función $1/x$ en el intervalo $[a; +\infty)$, $a > 0$.

2) Sean x', $x'' \in (0; a]$, donde $a > 0$. De la igualdad

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x'-x''|}{x'x''}$$

se desprende que la magnitud $\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right|$ crecerá si con una diferencia $|x' - x''|$, cuan se quiera pequeña pero fijada, aproximar a cero el menor de los números x' o bien x''.

Tomemos $x'' = x'/2$, entonces $|x' - x''| = x'/2$,

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{1}{x'}.$$

Como $0 < x' < a$, entonces

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| > a.$$

Con el fin de satisfacer las desigualdades $x' < a$ y $|x' - x''| = x'/2 < \delta$ es suficiente tomar $x' = \delta a/(\delta + a)$. Así, pues, tomemos $\varepsilon = a$ y para el número positivo arbitrario δ tomemos $x' = \delta a/(\delta + a)$, $x'' = \delta a/2\,(\delta + a)$. En tal caso

$$|x' - x''| = \frac{\delta a}{2(\delta + a)} < \delta \quad \text{y} \quad \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| > a = \varepsilon.$$

Por lo tanto, la función $y = 1/x$ no es uniformemente continua en $(0; a]$. ▲

Teorema. Una función continua sobre un segmento es uniformemente continua.

P. ej., cualquier polinomio es continuo sobre un segmento tomado al azar y, por consiguiente, es uniformemente continuo sobre dicho segmento.

Es válido el siguiente más general

Teorema (*G. Cantor*). Una función continua sobre un compacto es una función uniformemente continua.

El compacto en $\mathbb{R}$ es un conjunto acotado, cerrado (véase **10.94**).

Ejemplo 3. Demuestren que la función $y = \sqrt{x}$ es uniformemente continua sobre $[0; +\infty)$.

△La función $y = \sqrt{x}$ es continua sobre $[0; +\infty)$, incluido también $[0; 2]$. Esto significa que, según el teorema de Cantor, ella es uniformemente continua sobre $[0; 2]$. Demostremos que la función dada es uniformemente continua sobre $[1; +\infty)$. Sean $x', x'' \in [1; +\infty)$; entonces

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \leqslant \frac{1}{2}|x' - x''|.$$

Para $\varepsilon > 0$ arbitrario tomemos $\delta = 2\varepsilon$, entonces, para cualesquiera $x', x'' \in [1; +\infty)$, de la desigualdad $|x' - x''| < \delta$ se desprende la desigualdad $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < 0{,}5\delta = \varepsilon$. De modo que la función $y = \sqrt{x}$ es uniformemente continua sobre $[1; +\infty)$. Demostremos que dicha función es uniformemente continua sobre todo el intervalo $[0; +\infty)$. Sea ε un número positivo arbitrario. Debido a la continuidad uniforme sobre $[0; 2]$

$$\exists \delta_1 > 0 \forall x' \in [0; 2] \forall x'' \in [0; 2)$$

$$(|x' - x''| < \delta_1 \Rightarrow |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \varepsilon), \quad (4)$$

y debido a la continuidad uniforme sobre $[1; +\infty)$

$$\exists\delta_2>0\forall x'\in[1; +\infty]\forall x''\in[1; +\infty]$$

$$(|x'-x''|<\delta_2\Rightarrow|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon). \quad (5)$$

Tomemos como δ el menor de los tres números δ_1, δ_2 y 1, es decir, $\delta=\min\{\delta_1; \delta_2; 1\}$. Entonces, para cualesquiera x', $x''\in[0; +\infty)$, de la desigualdad $|x'-x''|<\delta$ se desprenderá, primero (ya que $\delta<1$), que ambas x' y x'' pertenecen bien a $[0; 2]$, o bien a $[1; +\infty)$ y, segundo, de aquí, debido bien a (4) o bien a (5), se deducirá que $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon$. Por esta razón la función $y=\sqrt{x}$ es uniformemente continua sobre $[0; +\infty)$. ▲

Sea δ un número positivo arbitrario.

Se denomina *módulo de continuidad* de la función f sobre el conjunto $X\subset D(f)$

$$\omega(\delta; f; X)=\sup_{\substack{|x'-x''|\leq\delta\\ x'\in X,\ x''\in X,}}(f(x')-f(x'')), \quad (6)$$

donde la cota superior se toma por todos los pares de los puntos x' y x'' de X, entre los cuales la distancia es no más de δ.

A esta definición es equivalente la siguiente:

$$\omega(\delta; f; X)=\sup_{\substack{|x'-x''|\leq\delta\\ x'\in X,\ x''\in X.}}|f(x')-f(x'')|, \quad (7)$$

El módulo de continuidad también se designa para abreviar $\omega(\delta; f)$ o bien $\omega(\delta)$ si está claro de que X y f se trata.

Para δ dado el módulo de continuidad puede ser tanto un número como $+\infty$. En este sentido el módulo de continuidad está definido para todo $\delta>0$.

Teorema. Para que la función f sea uniformemente continua sobre el conjunto X es necesario y suficiente que, para cierto $\delta_0>0$, su módulo de continuidad $\omega(\delta)$ sea un número para cada $\delta\in(0; \delta_0)$ y que

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0.$$

Ejemplo 4. Hallen sobre $(0; +\infty)$ los módulos de continuidad de las funciones e investiguen con su ayuda las funciones prefijadas en lo que atañe a la continuidad uniforme:

1) $y=\sqrt{x}$. 2) $y=\operatorname{sen}(1/x)$. 3) $y=1/\sqrt{x}$.

△1) Sean $\delta>0$, x', $x''\in(0; +\infty)$, $|x'-x''|\leq\delta$. Para mayor determinación, hagamos $x'>x''$, es decir, $x'=x''+\Delta x$, donde

$0 < \Delta x \leqslant \delta$. Entonces, con cualquier $x'' > 0$, tenemos

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{x'' + \Delta x} - \sqrt{x''} \leqslant \sqrt{x'' + \delta} - \sqrt{x''}$$

y

$$\sqrt{x'' + \delta} - \sqrt{x''} = \frac{\delta}{\sqrt{x'' + \delta} + \sqrt{x''}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta},$$

ya que $\sqrt{x'' + \delta} + \sqrt{x''} > \sqrt{\delta}$. Así, pues, $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leqslant \sqrt{\delta}$ con $|x' - x''| \leqslant \delta$ y, por consiguiente, asimismo,

$$\omega(\delta) = \sup_{|x' - x''| \leqslant \delta} |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leqslant \sqrt{\delta}.$$

Pero al mismo tiempo con $x' = x'' + \delta$

$$\lim_{x'' \to 0} (\sqrt{x'' + \delta} - \sqrt{x''}) = \sqrt{\delta},$$

por lo que $\omega(\delta) \geqslant \sqrt{\delta}$. De aquí y de lo anterior se deduce que $\omega(\delta) = \sqrt{\delta}$, $\delta > 0$. Como

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta) = \lim_{\delta \to +0} \sqrt{\delta} = 0,$$

la función $y = \sqrt{x}$ es uniformemente continua sobre $(0; +\infty)$.

2) Sean $\delta > 0$, $x', x'' \in (0; +\infty)$, $|x' - x''| \leqslant \delta$. Es evidente que

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x'} - \operatorname{sen}\frac{1}{x''}\right| \leqslant 2, \quad x',\ x'' \in (0; +\infty),$$

por lo tanto también $\omega(\delta) \leqslant 2$.

Examinemos los puntos

$$x'_n = \frac{1}{-(\pi/2) + 2\pi n} \quad \text{y} \quad x''_n = \frac{1}{(\pi/2) + 2\pi n},$$

donde sen $(1/x)$ es igual a -1 y 1, respectivamente. Ya que

$$\lim_{n \to \infty} x'_n = \lim_{n \to \infty} x''_n = 0$$

habrá tal $n \in N$ que $0 < x'_n < \delta$, $0 < x''_n < \delta$. En este caso, $|x'_n - x''_n| < \delta$, mientras que

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x'_n} - \operatorname{sen}\frac{1}{x''_n}\right| = 2.$$

Esto significa que $\omega(\delta) = 2$ para todo $\delta > 0$. De aquí se deduce que

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 2 \neq 0$$

y, por ello, la función $y = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua sobre $(0; +\infty)$.

3) Sean $\delta > 0$, $x' > 0$, $x'' = x' + \delta$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x''}} = \frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x'+\delta}}.$$

Como

$$\lim_{x'\to+0} \frac{1}{\sqrt{x'}} = +\infty, \quad \lim_{x'\to+0} \frac{1}{\sqrt{x'+\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

entonces

$$\lim_{x'\to+0} \left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x'+\delta}} \right) = +\infty.$$

Por consiguiente,

$$\sup_{x'>0} \left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x'+\delta}} \right) = +\infty,$$

en tanto que, como

$$\omega(\delta) \geqslant \sup_{x'>0} \left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x'+\delta}} \right),$$

entonces, asimismo, $\omega(\delta) = +\infty$ para cualquier $\delta > 0$. De aquí se desprende que la función $1/\sqrt{x}$ no es uniformemente continua sobre $(0; +\infty)$.▲

12.1. Demuestren que la función f es uniformemente continua sobre el conjunto X si:

1) $f(x) = 2x - 1$, $X = \mathbb{R}$. 2) $f(x) = x^2$, $X = (-1; 1)$.

3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $X = [0; 2]$. 4) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, $X = (-3; 3]$.

5) $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, $X = (0; \pi]$.

12.2. Demuestren que la función no es uniformemente continua sobre el conjunto X:

1) $y = \cos(1/x)$, $X = (0; 1)$. 2) $y = \operatorname{sen} x^2$, $X = \mathbb{R}$.

3) $y = x^2$, $X = \mathbb{R}$. 4) $y = \ln x$, $X = (0; 1)$.

Investiguen la función en lo que atañe a la continuidad uniforme sobre el conjunto X (**12.3—12.4**):

12.3. 1) $y = e^{-\operatorname{arcsen} x}$, $X = [-1; 1]$.

2) $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+1} + |\operatorname{sen} x|} \right)$, $X = [0; 10]$.

3) $y = \sqrt[3]{x}$, $X = \mathbb{R}$. 4) $y = e^x$, $X = \mathbb{R}$.

5) $y = \operatorname{ctg} x$, $X = (0; 1)$. 6) $y = \dfrac{x^4 - 1}{\sqrt{1 - x^4}}$, $X = (-1; 1)$.

7) $y = \operatorname{sen}\sqrt{x}$, $X = [1; +\infty)$.

8) $y = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 + x, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ $X = [-1; 1]$.

9) $y = x \operatorname{sen}(1/x)$, $X = (0; +\infty)$.

12.4. 1) $y = \begin{cases} x+1, & x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$ $X = \mathbb{R}$.

2) $y = (\cos x) \cos(\pi/x)$, $X = (0; 1)$.

3) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $X = (0; \pi)$. 4) $y = x + \operatorname{sen} x$, $X = \mathbb{R}$.

5) $y = x \cos x$, $X = \mathbb{R}$. 6) $y = \operatorname{sen}(1/x)$, $X = [0{,}01; +\infty)$.

7) $y = n^2$ con $2n \leqslant x \leqslant 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, X es la unión de todos los segmentos $[2n; 2n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

8) $y = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$, $X = (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$.

12.5. Sobre el conjunto X la función f satisface la siguiente condición: existen tales números $k > 0$ y $\alpha > 0$ que para cualesquiera x_1 y x_2 de X es cierta la desigualdad

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k\, |x_1 - x_2|^\alpha$$

(con $\alpha = 1$ ella lleva el nombre de *condición de Lipschitz*, con $\alpha < 1$, *condición de Hölder de orden* α). Demuestren que la función que satisface dicha condición es uniformemente continua sobre el conjunto X.

12.6. Demuestren que si una función es uniformemente continua en un intervalo, ella es también continua en dicho intervalo.

12.7. Demuestren que si la función es no acotada en un intervalo acotado, ella no es uniformemente continua en dicho intervalo.

12.8. 1) Aduzcan un ejemplo de función acotada y continua en un intervalo acotado, pero que no es uniformemente continua en él.

2) Aduzcan un ejemplo de función continua (véase **10.94**) en un conjunto cerrado y que en él no es uniformemente continua.

12.9. 1) Demuestren que si la función f es uniformemente continua sobre un conjunto acotado, ella es acotada en dicho conjunto.

2) Aduzcan un ejemplo de función uniformemente continua sobre un conjunto y no acotada en él.

12.10. Construyan el gráfico del módulo de continuidad $\omega(\delta)$ de la función f sobre el conjunto X si:

1) $f(x) = 1 - 2x$, $X = \mathbb{R}$. 2) $f(x) = |x|$, $X = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = x$, $X = [-2; -1] \cup [1; 2]$.

4) $f(x) = \frac{1}{2a}(|x + a| - |x - a|)$, $a > 0$, $X = \mathbb{R}$.

5) $f(x) = x^3$, $X = [0; 1]$. 6) $f(x) = E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

12.11. Hallen el módulo de continuidad de la función f sobre el conjunto X y, haciendo uso de él, establezcan la continuidad uniforme de la función si:

1) $f(x) = 2x - 1$, $X = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = x^2$, $X = [-a; a]$, $a > 0$.

3) $f(x) = 1/x$, $X = [a; +\infty)$, $a > 0$.
4) $f(x) = \cos x$, $X = \mathbb{R}$. 5) $f(x) = \ln x$, $X = [1; +\infty)$.

12.12. Demuestren que para cualquiera $\delta > 0$

$$\omega(\delta; f; X) = +\infty$$

si:

1) $f(x) = x^3$, $X = \mathbb{R}$. 2) $f(x) = 1/x^2$, $X = (0; 1)$.

12.13. 1) Aduzcan un ejemplo de función cuyo módulo de continuidad $\omega(\delta)$ satisface la condición $\omega(+0) = \varepsilon > 0$, donde ε es el número dado.

2) Aduzcan un ejemplo de una función no acotada en un intervalo, en la que el módulo de continuidad $\omega(\delta)$ en dicho intervalo satisface la condición $\omega(\delta) < +\infty$ para todo $\delta > 0$.

12.14. Sea $\omega(\delta)$ el módulo de continuidad de la función f sobre el conjunto X.

1) Demuestren que si $\delta_1 < \delta_2$, $\omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2)$.

2) Demuestren que si f es acotada sobre X, $\omega(\delta) < +\infty$ para todo $\delta > 0$.

3) Demuestren que si el conjunto X es acotado, en tanto que la función f es no acotada sobre X, entonces $\omega(\delta) = +\infty$ para cualquier $\delta > 0$.

4) Demuestren que si $\omega(\delta_0)$ es un número para cierto δ_0, entonces, asimismo, para cada δ, $0 < \delta < \delta_0$, $\omega(\delta)$ es un número, es decir, $\omega(\delta)$ es una función sobre $(0; \delta_0)$ y existe

$$\lim_{\delta\to+0} \omega(\delta) = \omega(+0).$$

5) Demuestren que si X es un intervalo, para todo $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$

$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

6) Demuestren que si X es un intervalo y $\omega(\delta_0) = +\infty$ para cierto δ_0, entonces $\omega(\delta) = +\infty$ para todo $\delta > 0$.

7) Aduzcan un ejemplo de función, en la que $\omega(\delta) = \delta$ con $0 < \delta < 1$; $\omega(\delta) = +\infty$ con $\delta \geqslant 1$.

12.15. Demuestren que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal δ que para cualesquiera x_1, $x_2 \in D(f)$ de la desigualdad $|x_1 - x_2| < \delta$ se desprende la desigualdad

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \omega(+0) + \varepsilon.$$

12.16. Demuestren que si la función f es uniformemente continua sobre el conjunto X, e $Y \subset X$, entonces f es también continua sobre el conjunto Y.

12.17. La función f es uniformemente continua sobre los segmentos $[a; b]$ y $[b; c]$. Demuestren que ella es uniformemente continua en el segmento $[a; c]$.

12.18. Aduzcan un ejemplo de función uniformemente continua sobre el segmento $[a;\ b]$ y en el semiintervalo $(b;\ c]$ y que no es uniformemente continua en el segmento $[a;\ c]$.

12.19. Demuestren que si las funciones f y g son uniformemente continuas sobre el conjunto X, para cualesquiera $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, la función $\alpha f + \beta g$ es uniformemente continua sobre X.

12.20. 1) Demuestren que si las funciones f y g son acotadas y uniformemente continuas en $[a;\ +\infty)$, su producto fg es una función uniformemente continua en $[a;\ +\infty)$.

2) Aduzcan un ejemplo de funciones uniformemente continuas en $[a;\ +\infty)$, cuyo producto no es una función uniformemente continua en $[a;\ +\infty)$.

3) Demuestren que si las funciones f y g son uniformemente continuas sobre un conjunto acotado, su producto fg es una función uniformemente continua sobre este conjunto.

12.21. Demuestren que una función periódica continua es uniformemente continua.

12.22. La función f es uniformemente continua en $[a;\ +\infty)$. Demuestren que se ha cumplido una de las tres condiciones: bien $f(x)$ es acotada en $[a;\ +\infty)$, bien $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, o bien $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

12.23. La función f es continua en $[a;\ +\infty)$ y existe el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (finito). Demuestren que f es uniformemente continua en $[a;\ +\infty)$.

12.24. Demuestren que una función acotada monótona, continua en un intervalo, es uniformemente continua en dicho intervalo (finito o infinito).

12.25. Demuestren que para la continuidad uniforme de la función f en el intervalo acotado $(a;\ b)$, es necesario y suficiente que la función sea continua en $(a;\ b)$ y que existan los límites $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

12.26. Demuestren que para que la función f, definida y continua en el intervalo $(a;\ b)$, se pueda continuar como una función continua sobre el segmento $[a;\ b]$, es necesario y suficiente que la función f sea uniformemente continua en el intervalo $(a;\ b)$.

12.27. Demuestren que si la función f es uniformemente continua en el intervalo $(a;\ b)$, ella puede ser continuada como función continua por toda la recta numérica $\mathbb{R}$, es decir, existe tal función continua $F(x)$ definida en $\mathbb{R}$, que $F(x) = f(x)$ para cualquier $x \in (a;\ b)$.

12.28. La función f es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$. Demuestren que existen tales números $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$ que $|f(x)| \leqslant a|x| + b$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

12.29. La función f continua sobre el segmento $[a; b]$ llevará el nombre de lineal a trozos si existe tal partición del segmento $[a; b]$ con los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

y la función es lineal en cada segmento $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, (es decir, $f(x) = a_i x + b_i$). Demuestren que toda función F, continua sobre el segmento $[a; b]$, puede ser, con cualquier precisión, aproximada a una función lineal a trozos, o sea, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal función lineal a trozos f que para toda $x \in [a; b]$ es cierta la desigualdad

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

12.30. Elijan para la función F la función lineal a trozos f tal que para toda $x \in [a; b]$ se cumpla la desigualdad $|F(x) - f(x)| < 0,1$:

1) $F(x) = x^2$, $[a; b] = [-1; 1]$.
2) $F(x) = 1/x$, $[a; b] = [2/3; 2]$.

12.31. Hallen en el segmento $[0; 100]$ tal función lineal a trozos f que para toda $x \in [0; 100]$ sea cierta la desigualdad

$$|2^{-x} - f(x)| < 1/4.$$

12.32. La función f continua sobre $\mathbb{R}$, se denomina lineal a trozos sobre $\mathbb{R}$ si existen tales números a y b, $a < b$, que la función f es lineal en los intervalos $(-\infty; a]$, $[b; +\infty)$ y lineal a trozos en $[a; b]$. Demuestren que cualquiera que sea el número ε, no existe sobre $\mathbb{R}$ la función lineal a trozos f para la cual $|x^2 - f(x)| < 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

12.33. Demuestren que toda función lineal a trozos puede ser prefijada con la fórmula

$$f(x) = a + \sum_{i=0}^{n} a_i |x - x_i|.$$

12.34. Hallen la fórmula indicada en el anterior problema para la función f lineal a trozos sobre un segmento si:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x+4, & -3 \leqslant x \leqslant -1, \\ 2-x, & -1 < x < 1, \\ x, & 1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = \begin{cases} 2x+3, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 3-x, & 0 < x \leqslant 1, \\ x+1, & 1 < x \leqslant 3, \\ 4, & 3 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

3) $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(3) = 2$, $f(4) = -4$, $f(6) = 0$, donde $\{0; 1, 3, 4, 6\}$ es la partición del segmento $[0; 6]$.

12.35. Demuestren que la función lineal a trozos sobre $\mathbb{R}$ es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$.

12.36. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0, \ |x| \leqslant 1/\pi, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Demuestren que con ningún a no existe la función g lineal a trozos sobre $[-1/\pi; 1/\pi]$ tal que $|f(x) - g(x)| < 1/2$ para toda $x \in [-1/\pi; 1/\pi]$.

12.37. Enuncien en forma positiva la afirmación de que una función, definida sobre un segmento, no puede ser, con cualquier precisión, aproximada a una función lineal a trozos.

12.38. Demuestren que si la función f está definida, pero es discontinua en el segmento $[a; b]$, a ella no puede aproximarse con cualquier precisión una función lineal a trozos.

12.39. Demuestren que si en un intervalo a la función f puede aproximarse con cualquier precisión una función lineal a trozos, f es uniformemente continua en dicho intervalo.

12.40. Demuestren que si en el intervalo $[c; +\infty)$ a la función f puede aproximarse con cualquier grado de precisión una función lineal a trozos, f tiene asíntota con $x \to +\infty$ (la función es lineal a trozos en $[c; +\infty)$ si ella es continua en $[c; +\infty)$, lineal en $[d; +\infty)$ con cierto $d > c$ y lineal a trozos en $[c; d]$).

Capítulo III
DERIVADA Y DIFERENCIAL

§ 13. Derivada. Fórmulas y reglas para calcular las derivadas. Diferencial de una función

1. Definición de la derivada. El límite de la razón

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

cuando $\Delta x \to 0$ se denomina *derivada de la función* $f(x)$ *en el punto* x_0. Dicho límite se designa con uno de los siguientes símbolos:

$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad f'\big|_{x=x_0}.$$

Así, pues,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Si en cada punto $x \in (a;\ b)$ existe

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

es decir, si la derivada $f'(x)$ existe para todas las $x \in (a;\ b)$, entonces la función f lleva el nombre *derivable* (*diferenciable*) *en el intervalo* $(a;\ b)$. El cálculo de la derivada recibe el nombre de *derivación* (*diferenciación*).

Ejemplo 1. Hallen $f'(x_0)$ calculando $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ si:

1) $f=1/x^2$, $x_0=1$. 2) $f=\sqrt{2+x}$, $x_0=0$.

3) $f=3\,|x+1|$, $x_0=-2$. 4) $f=\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$.

△ 1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x(1-\Delta x)^2}=$

$=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2+\Delta x}{(1+\Delta x)^2}=-2.$

2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3\,|-1+\Delta x\,|-3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3-3\Delta x-3}{\Delta x}=-3.$

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=\infty$. Por consiguiente, con $x_0=0$, la función dada no tiene derivada. ▲

Ejemplo 2. Hallen $f'(x)$, calculando $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ si:

1) $f=x\sqrt{x}$. 2) $f=3^x \operatorname{sen} x$.

△1) Sea $x>0$; en caso contrario es evidente que el límite no existe. Elíjamos Δx de modo que se cumpla la desigualdad $|\Delta x|<x$. Entonces,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)\sqrt{x+\Delta x}-x\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x\left((x+\Delta x)\sqrt{x+\Delta x}+x\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2}{(x+\Delta x)\sqrt{x+\Delta x}+x\sqrt{x}}=\frac{3x^2}{2x\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x},\quad x>0.$$

2) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{x+\Delta x}\operatorname{sen}(x+\Delta x)-3^x\operatorname{sen} x}{\Delta x}=$$

$$=3^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{\Delta x}(\operatorname{sen} x\cos\Delta x+\cos x\operatorname{sen}\Delta x)-\operatorname{sen} x}{\Delta x}=$$

$$=3^x\operatorname{sen} x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{\Delta x}\cos\Delta x-1}{\Delta x}+3^x\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=3^x(\ln 3\cdot\operatorname{sen} x+\cos x)$$

ya que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{\Delta x}\cos\Delta x-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{3^{\Delta x}-1}{\Delta x}\cos\Delta x+\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{\Delta x}-1}{\Delta x}-2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(\Delta x/2)}{\Delta x}=\ln 3.\ ▲$$

13.1. Después de calcular $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ hallen $f'(x_0)$:

1) $f=x^2$, $x_0=0{,}1$. 2) $f=2\operatorname{sen} 3x$, $x_0=\pi/6$.
3) $f=1+\ln 2x$, $x_0=1$. 4) $f=x+\operatorname{ctg} x$, $x_0=\pi/4$.

13.2. Después de calcular $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ hallen $f'(x)$. Indiquen el campo de existencia de la derivada:

1) $f=x^3+2x$. 2) $f=1/x$. 3) $f=\sqrt{x}$. 4) $f=x\sqrt[3]{x}$.
5) $f=1/(1+x^2)$. 6) $f=2^{x+1}$. 7) $f=\ln x$.
8) $f=\operatorname{sen} 2x$. 9) $f=\operatorname{ctg} x+2$. 10) $f=\operatorname{arcsen} x$.
11) $f=\arccos 3x$. 12) $f=7\operatorname{arctg}(x+1)$.

---

2. Reglas de cálculo de las derivadas, ligadas con operaciones aritméticas con las funciones. Si las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tienen derivadas en cierto punto, la función

$f = c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n$ ($c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes)

también tiene en ese punto derivada, con ello

$$f' = c_1f_1' + c_2f_2' + \ldots + c_nf_n'. \tag{2}$$

Si las funciones f_1 y f_2 tienen derivadas en cierto punto, la función $f = f_1f_2$ también tiene derivada en ese punto, con ello

$$f' = f_1f_2' + f_1'f_2. \tag{3}$$

Si las funciones f_1 y f_2 tienen derivadas en cierto punto y $f_2 \neq 0$ en él, la función $f = f_1/f_2$ también tiene derivada en ese punto, con ello

$$f' = \frac{f_2f_1' - f_1f_2'}{f_2^2}. \tag{4}$$

Fórmulas para las derivadas de las funciones elementales principales.

$$c' = 0, \quad c = \text{const}. \tag{5}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

El campo de existencia de la derivada puede ser más ancho. P. ej., si $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Si $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{8}$$

en particular,

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0, \tag{10}$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \neq 0; \tag{11}$$

en particular,

$$(\ln x)' = 1/x, \quad x > 0, \tag{12}$$

$$(\ln |x|)' = 1/x, \quad x \neq 0. \tag{13}$$

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{17}$$

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1, \tag{18}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1, \tag{19}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{24}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0. \tag{25}$$

Ejemplo 3. Calculen la derivada de la función

$$f = \sqrt[3]{x} \arccos x + 2 \log_2 x + \frac{e^x}{x^2}, \quad x \in (0;\ 1).$$

$$\triangle f' = \left(\sqrt[3]{x} \arccos x\right)' + 2(\log_2 x)' + (e^x/x^2)' =$$

$$= \sqrt[3]{x}(\arccos x)' + \arccos x \left(\sqrt[3]{x}\right)' + 2\frac{1}{x \ln 2} + \frac{x^2 (e^x)' - e^x (x^2)'}{x^4} =$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arccos x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x \ln 2} + \frac{(x-2)e^x}{x^3}. \ \blacktriangle$$

Calculen la derivada de la función $y = f(x)$. Indiquen el campo de existencia de la derivada (13.3—13.38):

13.3. $y = x^3 + x^2 + x + 1$. **13.4.** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

13.5. $y = 7x^{13} + 13x^{-7}$. **13.6.** $y = \frac{\ln 3}{x} + e^2$.

13.7. $y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^4}$. **13.8.** $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$.

13.9. $y = \frac{3}{5} x^{5/3} + x^{-2} + \frac{2}{x}$. **13.10.** $y = x^3 \sqrt[3]{x^2} + x^7 \sqrt[3]{x}$.

13.11. $y = x^{\sqrt{5}} - x^{-\sqrt{5}}$. **13.12.** $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$.

13.13. $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 7}$. **13.14.** $y = \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x^2}}$.

13.15. $y = 5x \cos x$. **13.16.** $y = (x+1) \operatorname{tg} x$.

13.17. $y=x^2\operatorname{ctg} x+2$. **13.18.** $y=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

13.19. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$. **13.20.** $y=\dfrac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$.

13.21. $y=\operatorname{arctg} x+x+\operatorname{arcctg} x$.

13.22. $y=x\operatorname{arcsen} x$. **13.23.** $y=\operatorname{arctg}^2 x$

13.24. $y=\dfrac{\arccos x}{\operatorname{arcsen} x}$. **13.25.** $y=\ln x^3-\dfrac{9}{x}-\dfrac{27}{2x^2}$.

13.26. $y=(\sqrt{2})^x+(\sqrt{5})^{-x}$. **13.27.** $y=(x^2-7x+8)\,e^x$.

13.28. $y=2^x\ln|x|$. **13.29.** $y=e^x\log_2 x$.

13.30. $y=\log_2 x\cdot\ln x\cdot\log_3 x$. **13.31.** $y=\log_x 2$.

13.32. $y=\log_x 2^x$. **13.33.** $y=\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{e^x}$.

13.34. $y=e^{ax}(a\operatorname{sen} bx-b\cos bx)$.

13.35. $y=\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x$. **13.36.** $y=\operatorname{sh}^2 x-\operatorname{ch}^2 x$.

13.37. $y=\dfrac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch}^2 x}$. **13.38.** $y=\dfrac{\ln x}{\operatorname{cth} x}$.

Calculen la derivada de la función $y=f(x)$ en el punto x_0 (**13.39—13.51**):

13.39. $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$, $x_0=-3$.

13.40. $y=(x-a)(x-b)(x-c)$, $x_0=a$.

13.41. $y=\dfrac{x-a}{x-b}$, $a\neq b$, $x_0=a$.

13.42. $y=(1+ax^b)(1+bx^a)$, $x_0=1$.

13.43. $y=x(x-1)(x-2)\ldots(x-1984)(x-1985)$, $x_0=0$, $x_0=1985$.

13.44. $y=(2-x^2)\cos x+2x\operatorname{sen} x$, $x_0=0$.

13.45. $y=\dfrac{\operatorname{sen} x-x\cos x}{\cos x+x\operatorname{sen} x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

13.46. $y=(ax+b)\cos x+(cx+d)\operatorname{sen} x$, $x_0=0$.

13.47. $y=\operatorname{arctg} x\cdot\arccos x$, $x_0=0$.

13.48. $y=\log_2 x\ln 2x$, $x_0=1$.

13.49. $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$, $x_0=e$.

13.50. $y=x^3e^{-x}$, $x_0=5$.

13.51. $y=x\operatorname{sh} 2x$, $x_0=1$.

---

3. Cálculo de la derivada de una función compuesta. Si la función $y=f(x)$ tiene derivada en el punto x_0 y la función $z=g(y)$, en el punto $y_0=f(x_0)$, la función compuesta (la composición de f y g) $z=\varphi(x)=g(f(x))$ también tiene derivada en el punto x_0,

con ello

$$\varphi'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0). \qquad (26)$$

Omitiendo el argumento y haciendo uso de otra designación para las derivadas, la fórmula (26) puede ser reescrita en la forma

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \qquad (27)$$

La regla de cálculo de la derivada de una función compuesta se difunde a la composición de cualquier número finito de funciones. P.ej., para la función compuesta de la forma $z(y(x(t)))$, en el caso de las funciones derivables $x(t)$, $y(x)$, $z(y)$ en los puntos t_0, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(x_0)$, respectivamente, en el punto t_0 tiene lugar la igualdad

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}. \qquad (28)$$

Ejemplo 4. Calculen la derivada de la función $z = \ln \operatorname{sen} x$ en el punto $x_0 = \pi/3$.

△ La función $z = \varphi(x) = \ln \operatorname{sen} x$ es la composición de dos funciones: $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ y $z = g(y) = \ln y$. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $x_0 = \pi/3$ tiene derivada, con ello $f'(\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$. La función $g(y) = \ln y$, en el punto $y_0 = \operatorname{sen} x_0 = \operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, también tiene derivada, con ello $g'(\sqrt{3}/2) = 2/\sqrt{3}$. Según la fórmula (26), obtenemos

$$\varphi'(\pi/3) = g'(\sqrt{3}/2) f'(\pi/3) = (2/\sqrt{3})\cdot(1/2) = 1/\sqrt{3}. \ ▲$$

Ejemplo 5. Calculen la derivada de la función

$$z = \sqrt{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

△ La función dada es la composición de la función $y = 1 + x^2$ y $z = \sqrt{y}$, con ello

$$\frac{dy}{dx} = 2x \ \text{ y } \ \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Según la fórmula (27), obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \ ▲$$

Ejemplo 6. Hallen las derivadas de las funciones:

1) $y = 2^{\operatorname{ctg}^2 x}$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $y = \ln \cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

△1) Aplicando dos veces la regla de derivación de una función compuesta, obtenemos

$$y' = 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \ln 2 (\operatorname{ctg}^2 x)' = 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \ln 2 \cdot 2 \operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg} x)'.$$

Por consiguiente,

$$y' = -2 \ln 2 \cdot 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) Aplicamos cuatro veces la regla de derivación de una función compuesta:

$$y' = \frac{1}{\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x} (\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x)' =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x}{\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x} (\operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x)' =$$

$$= -\operatorname{tg} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 2x} (\operatorname{sh} 2x)' = -\frac{\operatorname{sh} 2x}{1+\operatorname{sh}^2 2x} \operatorname{ch} 2x \cdot (2x)'.$$

Por lo tanto,

$$y' = -\frac{2 \operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 2x}{1+\operatorname{sh}^2 2x} = -2 \operatorname{th} 2x, \quad x \in \mathbb{R}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 7. Hallen la derivada de la función

$$y = \ln \sqrt[3]{\frac{e^x}{1+\cos x}}, \quad x \neq \pi (2n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\triangle$Aquí es conveniente simplificar previamente la fórmula con ayuda de la cual está prefijada la función:

$$y = \frac{1}{3} \ln e^x - \frac{1}{3} \ln (1+\cos x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \ln (1+\cos x).$$

Después de derivar, obtenemos

$$y' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{(\cos x)'}{1+\cos x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{1+\operatorname{tg}(x/2)}{3}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 8. Hallen la derivada de la función

$$y = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4} \operatorname{sen}^7 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\triangle$Aquí, es cómodo examinar la función $z = \ln |y|$. Según la fórmula de derivación de una función compuesta, tenemos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx},$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{dz}{dx}. \tag{29}$$

Escribamos la función z en la forma

$$z = \ln |y| = \ln (1+x^2) - \frac{4}{3} \ln |x| - 7 \ln |\operatorname{sen} x|,$$

la derivamos:
$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}-\frac{4}{3x}-7\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$
Poniendo la expresión hallada para $\frac{dz}{dx}$ en la fórmula (29), obtenemos
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}\operatorname{sen}^7 x}\left(\frac{2x}{1+x^2}-\frac{4}{3x}-7\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right). \ \blacktriangle$$

Ejemplo 9. Hallen la derivada de la función:

1) $y=(2+\cos x)^x$, $x\in R$. 2) $y=x^{2^x}$, $x>0$.

$\triangle$1) Por definición de una función exponencial-potencial
$$y=e^{x\ln(2+\cos x)}.$$
Derivando, obtenemos
$$y'=e^{x\ln(2+\cos x)}\,(x\ln(2+\cos x))'=$$
$$=e^{x\ln(2+\cos x)}\left(\ln(2+\cos x)-x\,\frac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}\right),\quad x\in \mathbb{R}.$$

2) Como $y=e^{2^x\ln x}$, entonces
$$y'=e^{2^x\ln x}\,(2^x\ln x)'=e^{2^x\ln x}\left(\frac{1}{x}\,2^x+2^x\ln 2\cdot\ln x\right)=$$
$$=2^x x^{2^x}\left(\frac{1}{x}+\ln 2\cdot\ln x\right),\quad x>0. \ \blacktriangle$$

Hallen las derivadas de las funciones (**13.52—13.152**):

13.52. $y=(3x-7)^{10}$.

13.53. $y=\frac{1}{99}(1-x)^{-99}-\frac{1}{49}(1-x)^{-98}+\frac{1}{97}(1-x)^{-97}$.

13.54. $y=(a+bx)^{\alpha}$.

13.55. $y=(0{,}4\cos(8x+5)-0{,}6\operatorname{sen}0{,}8x)^2$.

13.56. $y=\frac{\cos 3}{2}\,x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x+3)$.

13.57. $y=(a\cos x+b\operatorname{sen} x)^{\alpha}$.

13.58. $y=Ae^{-k^2x}(\omega x+\alpha)$.

13.59. $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$. **13.60.** $y=\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}$.

13.61. $y=\sqrt[13]{9+7\sqrt[5]{2x}}$.

13.62. $y=\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$. **13.63.** $y=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

13.64. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}\,(x^2+\sqrt{1+x^4})}$.

13.65. $y=\dfrac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2}}$.

13.66. $y=\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xa^2}-\sqrt{x^2a}-\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{ax^4}-\sqrt[4]{a^4x}-\sqrt[4]{x^5}}$.

13.67. $y=\cos(1/x)$. **13.68.** $y=\operatorname{ctg} x^2-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 2x$.

13.69. $y=\dfrac{1-\cos(8x-3\pi)}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 2x}$.

13.70. $y=e^{-x^2/2}$. **13.71.** $y=2^{\operatorname{sen} 2x}$.

13.72. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$.

13.73. $y=\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}+\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

13.74. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}(x^2+x^{-2})}$.

13.75. $y=\dfrac{1+x^2\operatorname{arctg} x^2}{\sqrt{1+x^4}}$. **13.76.** $y=\ln\ln(x/2)$.

13.77. $y=\log_2^3(2x+3)^2$. **13.78.** $y=\ln|\operatorname{sen} x|$.

13.79. $y=\operatorname{sen}\ln|x|$. **13.80.** $y=\cos\dfrac{1}{\log_2 x}$.

13.81. $y=3^{\operatorname{arctg}(2x+\pi)}$. **13.82.** $y=\operatorname{arcctg} 2^x$.

13.83. $y=10^{x/\log_3 x}$. **13.84.** $y=\dfrac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\dfrac{4x-5}{\sqrt{31}}$.

13.85. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x}$.

13.86. $y=\sqrt{\operatorname{ch} x}$. **13.87.** $y=\operatorname{arctg}\operatorname{th} x$.

13.88. $y=\frac{1}{2}\operatorname{th} x+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

13.89. $y=\operatorname{sen}\cos^2 x\cdot\cos\operatorname{sen}^2 x$.

13.90. $y=\operatorname{tg}^2 x/(\operatorname{tg} x^2)$.

13.91. $y=\ln\operatorname{tg}(x/2)-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x$.

13.92. $y=\frac{x}{2}(\operatorname{sen}\ln x+\cos\ln x)$.

13.93. $y=\cos^n x\cdot\cos nx$.

13.94. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)-\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

13.95. $y=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$.

13.96. $y=2x\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})-\sqrt{4x^2+1}$.

13.97. $y=\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$. **13.98.** $y=\cos(2\arccos x)$.

13.99. $y=\cos(3\arccos x)$.

13.100. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sen} x\right)$.

13.101. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

13.102. $y=\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2-\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$.

13.103. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right)^2$.

13.104. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^2-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

13.105. $y=2^{\operatorname{sen} x^2}$. **13.106.** $y=3^{\cos^2 x}$.

13.107. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. **13.108.** $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2 x$.

13.109. $y=\log_2\log_3\log_5 x$. **13.110.** $y=\ln\ln\ln x^2$.

13.111. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.

13.112. $y=\frac{2}{7}\ln\left(\sqrt{x^7}+\sqrt{1+x^7}\right)$.

13.113. $y=\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos^2 x$.

13.114. $y=\ln\left(\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right)$.

13.115. $y=e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$. **13.116.** $y=\ln\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$.

13.117. $y=\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}$.

13.118. $y=\frac{\operatorname{ch} x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2}-\ln\operatorname{cth}\frac{x^2}{2}$.

13.119. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right)$.

13.120. $y=\arccos(\operatorname{sen} x^4-\cos x^4)$.

13.121. $y=\frac{1}{\operatorname{sen}^4 x+1}+\ln\frac{\operatorname{sen}^4 x}{\operatorname{sen}^4 x+1}$.

13.122. $y=\ln\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos x}$.

13.123. $y=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{sen} x}{a+b\cos x}$.

13.124. $y=\frac{x}{2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th}(x/2)}{\sqrt{3}}$.

13.125. $y=\operatorname{arctg} e^{x/2}-\ln\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$.

13.126. $y=\arcsin\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} x}{1-\cos\alpha\cdot\cos x}$.

13.127. $y=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\ln\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\ln\frac{1+x\cos\alpha}{1-x\cos\alpha}$.

13.128. $y=\ln\sqrt{x^2-2x\cos\alpha+1}+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

13.129. $y=x^2\sqrt{a^2+x^4}+a^2\ln(x^2+\sqrt{a^2+x^4})$.

13.130. $y=\operatorname{th}x+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$.

13.131. $y=\ln\frac{x^2+a}{\sqrt{x^4+b^2}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{b}$.

13.132. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\operatorname{arcsen}\frac{x}{|a|}$.

13.133. $y=x+\operatorname{ctg}x\cdot\ln(1+\operatorname{sen}x)-\ln\operatorname{tg}(x/2)$.

13.134. $y=x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-x}\operatorname{arcctg}e^x$.

13.135. $y=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{3}}$.

13.136. $y=\ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{2}x}}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4+1}}$.

13.137. $y=\ln\frac{2x^2+4x+4}{2x^2+2x+1}+4\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}(2x+1)$.

13.138. $y=\frac{5x+2}{x^2+x+1}+\ln\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}+\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

13.139. $y=\frac{3-\operatorname{sen}x}{2}\sqrt{\cos^2x-2\operatorname{sen}x}+2\operatorname{arcsen}\frac{1+\operatorname{sen}x}{\sqrt{2}}$.

13.140. $y=e^x\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}$.

13.141. $y=x^x$. 13.142. $y=x^{7/\ln x}$. 13.143. $y=\log_x 7$.

13.144. $y=\log_2 x\cdot\log_x e+\log_2 x\cdot\ln 2$.

13.145. $y=x^{2/\ln x}-2x^{\log_x e}e^{1+\ln x}+e^{1+2/\log_x e}$.

13.146. $y=x^{x^2}$. 13.147. $y=x^{e^x}$.

13.148. $y=2^{x^x}$. 13.149. $y=x^{x^x}$.

13.150. $y=|\operatorname{sen}x|^{\cos x}$. 13.151. $y=(\operatorname{arcsen}\operatorname{sen}^2x)^{\operatorname{arctg}x}$.

13.152. $y=(\operatorname{ch}x)^{e^x}$.

Calculen, en los puntos indicados, las derivadas para las siguientes funciones (13.153—13.166):

13.153. $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, $x=0$, $x=1$.

13.154. $y(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$, $x=0$.
13.155. $y=2^{\operatorname{tg}(1/x)}$, $x=1/\pi$.
13.156. $y=3\cos 2x-\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}\,(\operatorname{sen} x+\cos x)$, $x=\pi/6$.
13.157. $y=\log_{1/2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$, $x=0$.
13.158. $y=\sqrt{\ln x}\,(\ln x-\log_{ex} x)\sqrt{\ln x+\log_x e+2}$, $x=e$.
13.159. $y=\ln(1+\operatorname{sen}^2 x)-2\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{arctg}\operatorname{sen} x$, $x=\pi/2$.
13.160. $y=\arcsen(2x/(1+x^2))$, $x=0$, $x=2$.
13.161. $y=\arcsen((1-x^2)/(1+x^2))$, $x=-1$, $x=1$, $x=0$.
13.162. $y=\ln\frac{x^4-x^2+1}{x^4+2x^2+1}+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1-2x^2}$, $x=1$.
13.163. $y=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}$, $x=1$.
13.164. $y=(\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}$, $x=0$.
13.165. $y=\left(\sqrt{1+3^x}\right)^{\ln x^2}$, $x=1$.
13.166. $y=((\operatorname{sen} x)/x)^x$, $x=\pi/2$.
13.167. Resuelvan la ecuación $y'(x)=0$ si:
1) $y=x^3-6x^2+9x+12$.
2) $y=\frac{x^2+x-6}{x^2-10x+25}$. 3) $y=\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}$.
4) $y=x(x-1)^2(x-2)^3$. 5) $y=e^{-|x-1|}/(1+x)$.
6) $y=\max(7x-6x^2, |x|^3)$.
13.168. Sea $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ una función en todos los puntos derivable. Hallen $y'(x)$ si:
1) $y=\sqrt{f(x)}$, $f(x)>0$. 2) $y=\ln|f(x)|$, $f(x)\neq 0$.
3) $y=f(x^3)$. 4) $y=f(\arcsen f(x))$, $|f(x)|<1$.
13.169. Sean $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, y $g(x)$, $x\in\mathbb{R}$, funciones derivables por todo lugar. Hallen $y'(x)$ si:
1) $y=\sqrt[n]{f^2(x)+g^2(x)}$, $f^2(x)+g^2(x)>0$.
2) $y=\ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$, $f(x)g(x)\neq 0$.
3) $y=f(\operatorname{sen}^2 x)+g(\cos^2 x)$. 4) $y=(f(x))^{g(x)}$, $f(x)>0$.
13.170. Sean las funciones f_{ij} $(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$ derivables en cierto punto. Demuestren que en dicho punto es válida la igualdad

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i1} & f_{i2} & \dots & f_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}' = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{i1} & f'_{i2} & \dots & f'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

13.171. Con ayuda de la fórmula aducida en el problema anterior hallen $\Delta'(x)$ si:

1) $\Delta(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$. 2) $\Delta(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 4 & x-5 & 6 \\ 7 & 8 & x-9 \end{vmatrix}$.

3) $\Delta(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \\ x^3 & 3x^2 & 6x \end{vmatrix}$.

13.172. Demuestren o refuten las siguientes afirmaciones:

1) Si la función tiene derivada en cierto punto, ella es continua en él.

2) Si la función es continua en cierto punto, ella tiene en él derivada.

13.173. ¿Con qué valores de α la función

$$y=\begin{cases} |x|^{\alpha}\operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0, \end{cases}$$

en el punto $x = 0$: 1) es continua; 2) tiene derivada; 3) tiene derivada continua?

13.174. ¿Con qué valores de α y β ($\beta > 0$) la función

$$y=\begin{cases} |x|^{\alpha}\operatorname{sen}(1/|x|^{\beta}) & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

en el punto $x = 0$: 1) es continua; 2) tiene derivada; 3) tiene derivada continua?

13.175. Confeccionen un ejemplo de función que tenga derivada por todo lugar, salvo en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

13.176. Determinen los valores de α y β con los que las siguientes funciones a) son por todo lugar continuas, b) son por todo lugar derivables:

1) $y=\begin{cases} \alpha x+\beta & \text{si } x\leqslant 1, \\ x^2 & \text{si } x>1. \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} \alpha+\beta x^2 & \text{si } |x|<1, \\ 1/|x| & \text{si } |x|\geqslant 1. \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} \alpha x^3+\beta x, & |x|\leqslant 2, \\ \dfrac{1}{\pi}\arcsen\dfrac{1}{x}, & |x|>2. \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} 2x-2 & \text{si } x\leqslant 1, \\ \alpha(x-1)(x-2)(x-\beta) & \text{si } 1<x<2, \\ \dfrac{x}{2}-1 & \text{si } (x)\geqslant 2. \end{cases}$

13.177. Determinen los valores de α y β con los que las funciones son por todo lugar derivables:

1) $y=\begin{cases}(x+\alpha)e^{-\beta x} & \text{si } x<0,\\ \alpha x^2+\beta x+1 & \text{si } x\geqslant 0.\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}\alpha x+\beta & \text{si } x<0,\\ \alpha\cos x+\beta\operatorname{sen} x & \text{si } x\geqslant 0.\end{cases}$

13.178. Determinen los valores de α y β con los que la función

$$y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\alpha x & \text{si } |x|\leqslant 1,\\ \beta\operatorname{sign} x+\frac{x-1}{2} & \text{si } |x|>1,\end{cases}$$

tiene derivadas: 1) en el punto $x=1$, 2) en punto $x=-1$.

13.179. Investiguen la derivabilidad de las siguientes funciones:

1) $y=|x^3(x+1)^2(x+2)|$. 2) $y=|\operatorname{sen} x|$.

3) $y=x|x|$. 4) $y=|\pi-x|\operatorname{sen} x$.

5) $y=\arccos(\cos x)$. 6) $y=\begin{cases}x^3 & \text{si } x\leqslant 0,\\ e^{-1/x} & \text{si } x>0.\end{cases}$

7) $y=\begin{cases}x^2|\cos(\pi/x)| & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

8) $y=\begin{cases}x & \text{si } x \text{ es un número racional,}\\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional.}\end{cases}$

13.180. Calculen los valores de la derivada para la función en todos los puntos donde la derivada existe:

1) $y=\begin{cases}x^2 & \text{si } x \text{ es un número racional,}\\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional.}\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}x^2 & \text{si } x \text{ es un número racional,}\\ 2|x|-1 & \text{si } x \text{ es un número irracional.}\end{cases}$

13.181. ¿Es cierta la afirmación: si la función tiene derivada en un punto, ella es derivable en cierto entorno de ese punto?

13.182. Demuestren o refuten las siguientes afirmaciones:

1) Si la función f tiene y la g no tiene derivada en cierto punto, la función $f+g$ no tiene derivada en ese punto.

2) Si las funciones f y g no tienen derivada en cierto punto, la función $f+g$ tampoco tiene derivada en ese punto.

3) Si la función f tiene y la g no tiene derivada en cierto punto, la función fg tampoco tiene derivada en ese punto.

4) Si las funciones f y g no tienen derivada en cierto punto, la fg tampoco tiene derivada en ese punto.

13.183. Aduzcan un ejemplo de la función $f(x)$ para la que $f'(x_0)$ y $(f^2(x_0))'$ no existen, mientras que $(f^3(x_0))'$, existe.

13.184. Aduzcan un ejemplo de función que no tenga derivada en ningún punto $x \in \mathbb{R}$ mas cuyo cuadrado tenga derivada en cada punto $x \in \mathbb{R}$.

13.185. Aduzcan un ejemplo de la función compuesta $f(g(x))$ que tenga derivada en el punto x_0 tal que:

1) $f'(g(x_0))$ existe, $g'(x_0)$ no existe.
2) $f'(g(x_0))$ no existe, $g'(x_0)$ existe.
3) $f'(g(x_0))$ y $g'(x_0)$ no existe.

13.186. Demuestren o refuten las siguientes afirmaciones:

1) Si para las funciones f y g derivables sobre el intervalo $(a; b)$ existe la desigualdad $f < g$, entonces $f' \leqslant g'$ sobre $(a; b)$.

2) Si sobre el intervalo $(a; b)$ es cierta la desigualdad $f' < g'$, entonces $f < g$ sobre $(a; b)$.

3) Si $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ sobre el intervalo $(a; b)$, entonces $f(x) < g(x)$ sobre $(a; b)$.

13.187. Demuestren o refuten las siguientes afirmaciones:

1) Con el fin de que la función derivable $y(x)$, $x \in (a; b)$ tenga una derivada monótona sobre el intervalo $(a; b)$ es necesario que $y(x)$ sea monótona sobre $(a; b)$.

2) Con el fin de que la función derivable $y(x)$, $x \in (a; b)$, tenga una derivada monótona sobre el intervalo $(a; b)$ es suficiente que $y(x)$ sea monótona sobre el intervalo $(a; b)$.

3) Con el fin de que una función derivable tenga derivada periódica es necesario que la función también lo sea.

4) Con el fin de que una función derivable tenga derivada periódica es suficiente que la función también lo sea.

13.188. Demuestren o refuten las siguientes afirmaciones:

1) Para que la derivada de una función derivable sea una función par es suficiente que la función sea impar.

2) Para que la derivada de una función derivable sea una función par es necesario que la función sea impar.

3) Para que la derivada de una función derivable sea una función impar es necesario que la función sea par.

4) Para que la derivada de una función derivable sea una función impar es suficiente que la función sea par.

13.189. ¿Es cierta la afirmación: si la función f tiene derivada en el punto x_0, la sucesión

$$\left\{n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right)\right\}$$

converge? ¿Es cierta la afirmación inversa?

13.190. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones:

1) Si la función $y(x)$ es derivable sobre el intervalo $(a; b)$ y $\lim\limits_{x\to a+0} y'(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a+0} y(x) = \infty$.

2) Si la función $y(x)$ es derivable sobre el intervalo $(a; b)$ y $\lim\limits_{x\to a+0} y(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a+0} y'(x) = \infty$.

3) Si la función $y(x)$ es derivable sobre el intervalo $(a; +\infty)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ existe, entonces existe también $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x)$.

4) Si la función $y(x)$ es derivable sobre el intervalo $(a; +\infty)$ y existe $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x)$, entonces existe $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ finito o bien infinito?

---

4. Nociones de derivadas infinita y unilateral. Si

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = +\infty, \tag{30}$$

se dice que la función f tiene en el punto x_0 *derivada infinita positiva*. Por analogía, la función f tiene en el punto x_0 *derivada infinita negativa* si

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = -\infty. \tag{31}$$

Los límites unilaterales

$$\lim_{\Delta x\to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ y } \lim_{\Delta x\to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{32}$$

se denominan *derivadas a la derecha* y *a la izquierda*, respectivamente, de la función f en el punto x_0 y se designan con $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$.

Para la existencia de la derivada de la función f en un punto es necesaria y suficiente la existencia, en dicho punto, de las derivadas a la derecha y la izquierda y su igualdad.

La función f recibe el nombre de *derivable* sobre el segmento $[a; b]$ si ella es derivable sobre el intervalo $(a; b)$ y existen las derivadas finitas unilaterales $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$.

Ejemplo 10. Demuestren que las funciones

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 2) $g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ tienen en el punto $x = 0$ una derivada infinita positiva.

△ 1) $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$

2) $g'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{1/\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{1}{\Delta x^2} = +\infty.$ ▲

Ejemplo 11. Hallen $f'_+(0)$ y $f'_-(0)$ si:

1) $f(x) = |\operatorname{sen} 2x|$. 2) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

△ 1) $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{|\text{sen } 2\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\text{sen } 2\Delta x}{\Delta x} = 2,$

$f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{|\text{sen } 2\Delta x|}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\text{sen } 2\Delta x}{\Delta x} = -2.$

2) $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x} = +\infty, \quad f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x} = 0.$ ▲

13.191. Hallen las derivadas a la derecha y a la izquierda para las siguientes funciones en los puntos indicados:

1) $f(x) = |x|$, $x = 0$.
2) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $x = 2$, $x = 3$.
3) $f(x) = |2^x - 2|$, $x = 1$.
4) $f(x) = \sqrt[3]{\text{sen } \pi x}$, $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$.
5) $f(x) = \sqrt{\text{sen } x^2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{\pi}$.
6) $f(x) = \text{sen } x\,|\cos x| + \cos x\,|\text{sen } x|$, $x = \pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$.
7) $f(x) = x\,|\cos(\pi/x)|$, $x = 2/(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.
8) $f(x) = \arccos(1/x)$, $x = -1$, $x = 1$.
9) $f(x) = \arcsen \text{sen } x$, $x = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.192. Hallen $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ para las siguientes funciones:

1) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0, \\ \sqrt[3]{x^4} \ln x & \text{si } x > 0. \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0, \\ \ln(1 + \sqrt[5]{x^7}) & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1 + e^{1/x} & \text{si } x < 0, \\ \sqrt{1 + \sqrt{x^4}} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

13.193. Hallen las derivadas a la derecha y a la izquierda de las siguientes funciones en los puntos de discontinuidad:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}(1 - x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2) $f(x) = (1 - x^2) \operatorname{sign} x$.

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} & \text{si } x \neq 1, \\ \pi/2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/|x|) & \text{si } x \neq 0, \\ \pi & \text{si } x = 0. \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

13.194. Hallen $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ para la función $f(x) = |x - x_0|\,\varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es la función prefijada, continua en el punto x_0.

13.195. Aduzcan un ejemplo de función que en el punto de discontinuidad tiene una derivada infinita negativa.

13.196. Aduzcan un ejemplo de función continua en cierto punto y que, en él, no tiene derivada ni a la izquierda ni a la derecha.

---

5. Derivada de una función inversa. Sea la función $y = f(x)$ continua y estrictamente monótona en cierto entorno del punto x_0 y sea que, en dicho punto, exista la derivada $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$, entonces, la función inversa en el punto $y_0 = f(x_0)$ tiene una derivada que puede ser hallada con la fórmula

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}. \qquad (33)$$

Ejemplo 12. Hallen la derivada de la función continua inversa a la función

$$y = x + x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

△La función dada es continua por doquier y estrictamente monótona, su derivada $\frac{dy}{dx} = 1 + 3x^2$ no se reduce a cero en ningún punto. Por eso,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+3x^2}. \ ▲$$

Ejemplo 13. Hallen $y'(x)$ si $x = \operatorname{sh} y$.

△La función $x = \operatorname{sh} y$ es continua y estrictamente monótona para todos los $y \in \mathbb{R}$. La derivada $x' = \operatorname{ch} y$ no se reduce a cero en ningún punto. Por lo tanto,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

La función $y(x)$, o sea, la función inversa al seno hiperbólico, se designa con $\operatorname{arcsh} x$. Así, pues,

$$(\operatorname{arcsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \ ▲$$

13.197. Hallen las derivadas de las funciones inversas en los puntos indicados:

1) $y = x + \frac{1}{5}x^5$, $y = 0$, $y = \frac{6}{5}$. 2) $y = 2x - \frac{\cos x}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.
3) $y = 0{,}1\,x + e^{0{,}1x}$, $y = 1$. 4) $y = 2x^2 - x^4$, $x > 1$, $y = 0$.
5) $y = 2x^2 - x^4$, $0 < x < 1$, $y = 3/4$.

13.198. Hallen las derivadas de las funciones inversas. Indiquen el campo de su existencia:

1) $y = x + \ln x$, $x > 0$. 2) $y = x + e^x$.

3) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$, $x < 0$. 4) $y = \operatorname{ch} x$, $x > 0$.

13.199. Hallen la derivada de la función inversa a la tangente hiperbólica.

13.200. Está dada la función $y = x + \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$. ¿En qué puntos tiene la función inversa una derivada infinita positiva?

---

6. Derivada de una función presentada paramétricamente. Sea que las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ están definidas en cierto entorno del punto t_0 y, de forma paramétrica, prefijan en el entorno del punto $x_0 = x(t_0)$ la función $y = f(x)$. Entonces, si $x(t)$ e $y(t)$ tienen en el punto t_0 derivadas y si $\frac{dx(t_0)}{dt} \neq 0$, la función $y = f(x)$ también tiene en el punto x_0 una derivada que puede ser hallada con la fórmula

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{\frac{dy(t_0)}{dt}}{\frac{dx(t_0)}{dt}}.$$

Por regla, esta fórmula se suele escribir de forma más corta

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{34}$$

Ejemplo 14. La función $y = f(x)$ está prefijada con ayuda de las fórmulas paramétricas

$$x = a\cos^3 t, \quad y = b\operatorname{sen}^3 t, \quad t \in (0;\ \pi/2).$$

Hallen y'_x.

$\triangle$Las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son derivables con todo t y $x'_t = -3a\cos^2 t \operatorname{sen} t \neq 0$ sobre el intervalo $(0;\ \pi/2)$. Con la fórmula (34) hallamos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b\operatorname{sen}^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\operatorname{sen} t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t, \quad t \in (0;\ \pi/2). \ \blacktriangle$$

Ejemplo 15. La función $y = f(x)$ está prefijada con la ecuación

$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in (0;\ 2\pi/3),$$

donde r y φ son las coordenadas polares del punto $(x;\ y)$. Hallen y'_x.

$\triangle$Pasemos a la prefijación paramétrica de la función

$$x = r\cos\varphi = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi,$$
$$y = r\operatorname{sen}\varphi = a(1 + \cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi$$

y hagamos uso de la fórmula (34):

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = -\frac{a(1+\cos\varphi)\cos\varphi - a\,\mathrm{sen}^2\varphi}{a(1+\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi + a\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi} = -\frac{\cos\varphi+\cos 2\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi+\mathrm{sen}\,2\varphi} =$$

$$= -\frac{\cos(3\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{\mathrm{sen}(3\varphi/2)\cos(\varphi/2)} = -\mathrm{ctg}(3\varphi/2),\ \varphi\in(0;\ 2\pi/3). \ \blacktriangle$$

13.201. Hallen y'_x para las funciones $y = y(x)$ prefijadas paramétricamente:

1) $x = \mathrm{sen}^2 t,\ y = \cos^2 t,\ 0 < t < \pi/2$.
2) $x = e^{-t},\ y = t^3,\ -\infty < t < +\infty$.
3) $x = a\cos t,\ y = b\,\mathrm{sen}\,t,\ 0 < t < \pi$.
4) $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ y = b\,\mathrm{sh}\,t,\ -\infty < t < 0$.
5) $x = t^2+6t+5,\ y = \frac{t^2-54}{t},\ 0 < t < +\infty$.
6) $x = (t-1)^2(t-2),\ y = (t-1)^2(t-3),\ 5/3 < t < +\infty$.
7) $x = a(t-\mathrm{sen}\,t),\ y = a(1-\cos t),\ -\infty < t < +\infty$.
8) $x = \ln\mathrm{sen}(t/2),\ y = \ln\mathrm{sen}\,t,\ 0 < t < \pi$.

13.202. Hallen x'_y para las funciones $x = x(y)$ prefijadas paramétricamente:

1) $x = t + 2t^2 + t^3,\ y = -2 + 3t - t^3,\ 1 < t < +\infty$.
2) $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t,\ y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t,$ $1 < t < +\infty$.
3) $x = \mathrm{ctg}\,2t,\ y = \frac{2\cos 2t - 1}{2\cos t},\ 0 < t < \frac{\pi}{2}$.

13.203. Para la función $y = y(x)$, prefijada paramétricamente: $x = 2t + |t|,\ y = 5t^2 + 4t|t|,\ -\infty < t < \infty$, calculen la derivada en el punto $x = 0$. ¿Se puede emplear en este caso la fórmula (34)?

13.204. Hallen y'_x para la función $y = y(x)$ prefijada paramétricamente:

$$x = \begin{cases} t & \text{si } t \text{ es un número racional,} \\ -t & \text{si } t \text{ es un número irracional,} \end{cases} \quad y = t^2.$$

13.205. Calculen $y'(x_0)$ para las funciones $y = y(x)$, prefijadas con la ecuación $r = r(\varphi)$, donde r y φ son las coordenadas polares de los puntos $(x;\ y)$:

1) $r = a\varphi,\ 4\pi/3 < \varphi < 2\pi,\ x_0 = 0$.
2) $r = e^\varphi,\ -\pi/6 < \varphi < \pi/6,\ x_0 = 1$.
3) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0 < \varphi < \pi/4,\ x_0 = a\sqrt{6}/4$.

13.206. Para la función $y = y(x)$, prefijada con la ecuación $r = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, calculen $y'_+(0)$ e $y'_-(a)$.

---

7. Derivada de una función prefijada de forma implícita. Si la función $y = y(x)$, derivable sobre cierto intervalo, está prefijada de forma implícita con la ecuación $F(x;\ y) = 0$, su derivada $y'(x)$ puede ser hallada con la ecuación

$$\frac{d}{dx} F(x;\ y) = 0. \tag{35}$$

Ejemplo 16. Sea $y = y(x)$, $x \in (-a;\ a)$ una función positiva prefijada implícitamente con la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hallen $y'(x)$.

△ La ecuación (35) tiene en nuestro caso la forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Derivando, obtenemos

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot y' = 0.$$

De esta ecuación hallamos

$$y'(x) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad x \in (-a;\ a), \quad y > 0. \ \blacktriangle$$

13.207. Hallen y' para las funciones derivables $y = y(x)$, prefijadas implícitamente con las siguientes ecuaciones:

1) $y^5 + y^3 + y - x = 0$. 2) $y - x = \varepsilon \operatorname{sen} y$, $|\varepsilon| < 1$.

3) $y^2 = 2px$, $y > 0$. 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y > 0$.

5) $(2a - x)y^2 = x^3$, $y < 0$. 6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$.

7) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $y > 0$.

8) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$, $y < -1$.

9) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$, $x < 2y - 1$.

13.208. Para las funciones derivables $y = y(x)$, prefijadas implícitamente, calculen $y'(x_0)$:

1) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$, $y > -5$, $x_0 = 0$.

2) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$, $y < 2$, $x_0 = 11/12$.

3) $e^y + xy = e$, $y > 0$, $x_0 = 0$.

4) $xy + \ln y = 1$, $y < e^2$, $x_0 = 0$.

---

8. Diferencial de una función. Si el incremento Δy de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 es representable en la forma

$$\Delta y|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{36}$$

donde $A(x_0)$ no depende de Δx y $\alpha(\Delta x) \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, la función $y = f(x)$ se denomina *derivable en el punto* x_0, mientras que

el producto $A(x_0)\,\Delta x$ recibe el nombre de su *diferencial* en el punto x_0 y se designa con $df(x_0)$ o bien $dy\,|_{x=x_0}$.

Así, pues, si la igualdad (36) es cierta, entonces

$$dy|_{x=x_0} = A(x_0)\,\Delta x. \tag{37}$$

Se da el nombre de diferencial dx de la variable independiente x a su incremento Δx, es decir, por definición se supone que $dx = \Delta x$.

Para que exista la derivabilidad de la función en un punto (es decir, para la existencia de la diferencial) es necesario y suficiente que la función tenga en ese punto una derivada finita.

La diferencial de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 se expresa mediante la derivada $f'(x_0)$ del siguiente modo:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx. \tag{38}$$

Esta fórmula permite calcular las diferenciales de las funciones si se conocen sus derivadas.

Si la función $y = f(x)$ es derivable en cada punto del intervalo $(a;\ b)$,

$$dy = f'(x)\,dx \tag{39}$$

para toda $x \in (a;\ b)$.

La igualdad (36) puede escribirse en la forma

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + \alpha(\Delta x)\,\Delta x.$$

Si $dy(x_0) \neq 0$, para el cálculo aproximado de la función en el punto $x_0 + \Delta x$ podemos hacer uso de la fórmula

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy(x_0), \tag{40}$$

ya que, con semejante aproximación, los errores absoluto y relativo son cuan se quiera pequeños cuando Δx es suficientemente pequeño.

Ejemplo 17. Hallen la diferencial de la función $y = x - 3x^2$ en el punto $x = 2$.

△ **1er procedimiento.** Hallamos el incremento de la función en el punto $x = 2$

$$\begin{aligned}\Delta y\,|_{x=2} &= y(2 + \Delta x) - y(2) = \\ &= 2 + \Delta x - 3(2 + \Delta x)^2 - 2 + 12 = \\ &= -11\Delta x - 3\Delta x^2.\end{aligned}$$

El incremento de la función está representado en la forma (36); en el caso dado ha resultado que $A = -11$ y $\alpha(\Delta x) = -3\,\Delta x \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Por lo tanto,

$$dy|_{x=2} = -11\,dx.$$

2° procedimiento. Calculemos la derivada de la función en el punto $x = 2$:

$$y'(x) = 1 - 6x,\quad y'(2) = -11.$$

Con la fórmula (38), hallamos

$$dy(2) = y'(2)\,dx = -11dx. \blacktriangle$$

Ejemplo 18. Hallen la diferencial de la función $y = \operatorname{ctg} 3x$.
$\triangle$Con la fórmula (39), hallamos

$$dy = y'(x)\,dx = -\frac{3}{\operatorname{sen}^2 3x}\,dx, \quad x \neq \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 19. Hallen el valor aproximado de la función $y = \sqrt{x}$ en el punto $x = 3{,}98$.

$\triangle$Haciendo en la fórmula (40) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = -0{,}02$, obtenemos

$$\sqrt{3{,}98} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0{,}02), \quad \sqrt{3{,}98} \approx 1{,}995. \ \blacktriangle$$

9. Propiedades de la diferencial.

1ª. Para cualesquiera funciones derivables u y v son válidas las igualdades

$$d(\alpha u + \beta v) = \alpha\,du + \beta\,dv, \tag{41}$$

donde α y β son constantes arbitrarias,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \tag{42}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \quad v \neq 0. \tag{43}$$

2ª. La fórmula para la diferencial $dy = f'(x)\,dx$ es válida también en el caso cuando x no es una variable independiente, sino una función. Esta propiedad recibe el nombre de *invariancia de la forma de la diferencial*.

Ejemplo 20. Calculen la diferencial de la función

$$y = x\sqrt{64 - x^2} + 64 \arcsen (x/8).$$

$\triangle$ Empleando las propiedades de la diferencial, obtenemos

$$dy = d\left(x\sqrt{64 - x^2}\right) + d\,64 \arcsen (x/8) =$$
$$= x\,d\sqrt{64 - x^2} + \sqrt{64 - x^2}\,dx + 64\,d \arcsen (x/8) =$$
$$= x\frac{d(64 - x^2)}{2\sqrt{64 - x^2}} + \sqrt{64 - x^2}\,dx + 64\frac{d(x/8)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}}} = \frac{-x^2\,dx}{\sqrt{64 - x^2}} +$$
$$+ \sqrt{64 - x^2}\,dx + 64\frac{dx}{\sqrt{64 - x^2}} = 2\sqrt{64 - x^2}\,dx, \quad |x| < 8. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 21. Sean u y v funciones derivables y sean conocidas sus diferenciales du y dv. Hallen dy si:

$$y = \operatorname{arctg}(u/v) + \ln\sqrt{u^2+v^2}.$$

$\triangle$ $dy = d\operatorname{arctg}(u/v) + \frac{1}{2}d\ln(u^2+v^2) =$

$$= \frac{d(u/v)}{1+\frac{u^2}{v^2}} + \frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2} + \frac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2} =$$

$$= \frac{(v+u)\,du + (v-u)\,dv}{u^2+v^2}, \quad u^2+v^2>0. \ \blacktriangle$$

13.209. Hallen $A(x_0)$ y $\alpha(\Delta x)$ en la fórmula (36) si:
1) $y = x^3 - 2x$, $x_0 = 1$. 2) $y = x^{10}$, $x_0 = 0$.

13.210. Hallen la diferencia entre el incremento y la diferencial de la función $y = (x-1)^3$.

13.211. ¿Con qué valores de x la diferencial de la función $y = \cos x$ no es equivalente a su incremento cuando $\Delta x \to 0$?

13.212. Cuando $\Delta x \to 0$, ¿qué orden tiene la infinitesimal $\Delta y - dy$, si $y = x^3 - 3x$?

13.213. Hallen las diferenciales:

1) $d(e^{-x} + \ln x)$. 2) $d(\sqrt{x} + 2\sqrt{x+\sqrt{x}})$.

3) $d(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2))$. 4) $d(\arccos e^x)$.

5) $d\ln(\sqrt{1+2\operatorname{sen}x} + \sqrt{2\operatorname{sen}x - 1})$.

6) $d(5\operatorname{sh}^7(x/35) + 7\operatorname{sh}^5(x/35))$.

7) $d\left(\frac{\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.

8) $d\left(\ln\frac{1+\sqrt{\operatorname{sen}x}}{1-\sqrt{\operatorname{sen}x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{sen}x}\right)$. 9) $d(x^{x^2})$.

13.214. Hallen las diferenciales en los puntos indicados:

1) $d\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{x-1}{x}\right)$, $x = -1$.

2) $d\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{x}$, $x_1 = 1/e$, $x_2 = e$.

3) $d\left(\frac{(2x-1)^3\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\right)$, $x = 0$.

4) $d\left(\frac{x^2 2^x}{x^x}\right)$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

13.215. Hallen en los puntos indicados las diferenciales de las funciones $y = y(x)$ prefijadas con ecuaciones implícitas o bien paramétricas:

1) $y^3 - y = 6x^2$, (1; 2).
2) $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$, (1; 3).
3) $y^5 + x^4 = xy^2$, $(x_0; y_0)$. 4) $x + y \ln y = 0$, $(x_0; y_0)$.
5) $xy - \sqrt[3]{xy^2+6} = 0$, (2; 1).
6) $xe^{\left(\frac{x}{y^2}-1\right)} - 2y = 0$, (4; 2).
7) $3^{\operatorname{sen} yx^3} - 3x(y - \pi) - 1 = 0$, (1; π).
8) $4xy^3 + \ln \sqrt[3]{x/(x+y)} = 0$, (1; 0).
9) $x = (t-1)^2(t-2)$, $y = (t-1)^2(t-3)$, (4; 0).
10) $x = e^t/t$, $y = (t-1)^2 e^t$, $(-2/\sqrt{e};\ 9/(4\sqrt{e}))$.

13.216. En el punto (0; a) hallen la diferencial de la función $y = y(x)$, prefijada en un sistema polar de coordenadas con la ecuación $r = a(1 + \cos\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$.

13.217. Hallen la diferencial de la función y considerando que son conocidas las diferenciales de las funciones u y v:
1) $y = u^2v$, 2) $y = u^2/v$.
3) $y = uv/(u^2+v^2)$. 4) $y = e^{uv}$. 5) $y = \sqrt{u^2+v^2}$.
6) $y = \ln \operatorname{tg}(v/u)$. 7) $y = u^v$.

13.218. Sustituyendo el incremento de la función por la diferencial, hallen el valor aproximado de la función $y = y(x)$ en los puntos indicados:
1) $y = \sqrt[3]{x}$, a) $x = 65$, b) $x = 125{,}1324$.
2) $y = \sqrt[4]{x}$, a) $x = 90$, b) $x = 15{,}8$.
3) $y = \operatorname{sen} x$, a) $x = 29°$, b) $x = 359°$.
4) $y = \operatorname{tg} x$, $x = 44°\,50'$. 5) $y = \arcsin x$, $x = 0{,}51$.
6) $y = \operatorname{arctg} x$, $x = 1{,}05$. 7) $y = \lg \operatorname{tg} x$, $x = 47°\,15'$.
8) $y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$, $x = 0{,}15$.

13.219. Demuestren que para todos los valores de Δx, pequeños en comparación con x_0, es cierta la fórmula aproximada

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x, \quad x_0 > 0. \tag{44}$$

Mediante esta fórmula calculen aproximadamente:

1) $\sqrt{640}$; 2) $\sqrt[3]{200}$; 3) $\sqrt[5]{243{,}45}$; 4) $\sqrt[10]{1000}$.

13.220. Determinen en cuánto aumentará, aproximadamente, el volumen de un globo si su radio $R = 15$ cm aumentó 0,2 cm.

13.221. Determinen, aproximadamente, el error relativo al calcular la superficie de una esfera si al determinar su radio el error relativo constituyó 1%.

13.222. ¿En cuánto variará en %, aproximadamente, la intensidad de la corriente si su resistencia aumenta el 1%?

13.223. ¿En cuánto hay que variar, aproximadamente, la longitud de un péndulo $l = 20$ cm, con el fin de que el período de las oscilaciones aumente 0,05 s? El período T se calcula con la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

§ 14. Sentido geométrico y físico de la derivada

1. Sentido geométrico de la derivada. Si la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, el coeficiente angular de la tangente TT' (fig. 76) al gráfico de la función en el punto $M(x_0; f(x_0))$ es igual a

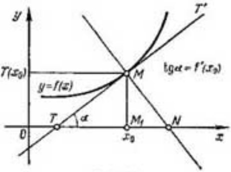


Fig. 76

$f'(x_0)$. Por lo tanto, la ecuación de la tangente en el punto $M(x_0; f(x_0))$ tiene la forma

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

Si la función $y = f(x)$ es continua en el punto x_0 y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

la tangente al gráfico de la función en el punto $M(x_0; f(x_0))$ tiene la ecuación $x = x_0$. En tal caso, el gráfico de la función $y = f(x)$, en el entorno del punto x_0, tiene la forma mostrada esquemáticamente en las figs. 77—80.

La recta que pasa por el punto $(x_0; f(x_0))$ y es perpendicular a la tangente, se denomina *normal* (la recta MN en la fig. 76).

Si $f'(x_0) \neq 0$, la ecuación de la normal se escribe en la forma

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (2)$$

Si $f'(x_0) = 0$, la normal tiene la ecuación $x = x_0$.

Supongamos que al gráfico de la función $y = f(x)$ se han trazado en el punto M una tangente y una normal (fig. 76) que cortan el eje de abscisas en los puntos T y N, respectivamente. El cateto TM del triángulo rectángulo TMN recibe el nombre de *segmento de la tangente*, el cateto NM, *segmento de la normal*. El segmento TM_1,

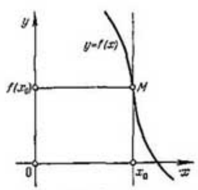


Fig. 77

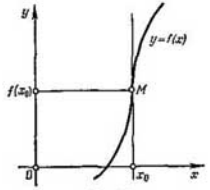


Fig. 78

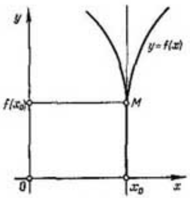


Fig. 79

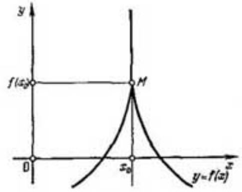


Fig. 80

donde M_1 es la proyección del punto M sobre el eje de abscisas, se denomina *subtangente*, el segmento NM_1, *subnormal*. Las longitudes de estos cuatro segmentos se expresan del siguiente modo mediante los valores de la función y de su derivada en el punto x_0:

$$|TM| = \left|\frac{f}{f'}\right| \sqrt{1+(f')^2}, \quad |NM| = |f| \sqrt{1+(f')^2}, \tag{3}$$

$$|TM_1| = \left|\frac{f}{f'}\right|, \quad |NM_1| = |ff'|. \tag{4}$$

Sea que los gráficos de las funciones $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ se intersecan en el punto M (fig. 81). Por el ángulo φ entre los gráficos

de estas funciones se toma el valor del ángulo formado por las tangentes trazadas al gráfico en el punto M. El ángulo φ se halla mediante la fórmula

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{f_1'-f_2'}{1+f_1'f_2'}\right|,\quad 0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Si $1+f_1'f_2'=0$, $\varphi=\pi/2$.

Si la función $y=f(x)$ tiene en el punto x_0 la derivada a la derecha $f_+'(x_0)$, la ecuación de la tangente derecha al gráfico de la

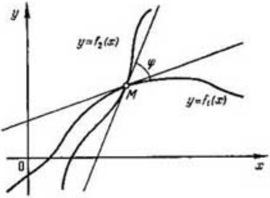


Fig. 81

función $y=f(x)$ en el punto $M(x_0, f(x_0))$, tiene la forma

$$y-f(x_0)=f_+'(x_0)(x-x_0). \tag{6}$$

Por analogía se anota la ecuación de la tangente izquierda

$$y-f(x_0)=f_-'(x_0)(x-x_0). \tag{7}$$

Ejemplo 1. ¿Bajo qué ángulos corta el eje de abscisas la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$?

△ La sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ corta el eje de abscisas en los puntos $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Si $x=2\pi k$, $y'(2\pi k)=\cos 2\pi k=1$, es decir, el coeficiente angular de la tangente a la sinusoide es igual a uno. Por lo tanto, en los puntos $x=2\pi k$ la sinusoide corta el eje de abscisas bajo un ángulo de 45°. Si $x=(2k+1)\pi$, entonces $y'((2k+1)\pi)=-1$. Por ello, en los puntos $x=(2k+1)\pi$ la sinusoide corta el eje de abscisas bajo un ángulo de 135°. ▲

Ejemplo 2. Escriban las ecuaciones de la tangente y la normal al gráfico de la función $y=2x/(1+x^2)$ en el punto con abscisa $x=\sqrt{2}$.

△ Hallemos la derivada de la función

$$y'(x)=2\,\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}=2\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Calculemos los valores de la función y de su derivada en el punto $x=\sqrt{2}$:

$$y(\sqrt{2})=2\sqrt{2}/3, \quad y'(\sqrt{2})=-2/9.$$

Escribamos la ecuación de la tangente

$$y-\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{2}{9}(x-\sqrt{2})$$

y la ecuación de la normal

$$y-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{9}{2}(x-\sqrt{2}).$$

Simplificando las ecuaciones, obtenemos

$$y=-\frac{2}{9}x+\frac{8\sqrt{2}}{9} \text{ (ecuación de la tangente)},$$

$$y=\frac{9}{2}x-\frac{23\sqrt{2}}{6} \text{ (ecuación de la normal)}. \ ▲$$

Ejemplo 3. Calculen la largura del segmento de la normal a la catenaria $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ en cada uno de sus puntos.

△Poniendo los valores de la función dada y de su derivada $y' = \operatorname{sh}(x/a)$ en la fórmula para la longitud del segmento de la normal, obtenemos

$$|NM|=|y|\sqrt{1+(y')^2}=a\operatorname{ch}(x/a)\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(x/a)}=a\operatorname{ch}^2(x/a). \ ▲$$

Ejemplo 4. En los puntos de intersección de las elipses

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1, \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

hallen el ángulo entre ellas.

△ Las elipses están situadas simétricamente con relación a los ejes de coordenadas. Por esto, consideremos sólo el primer cuadrante del plano de coordenadas. Después de resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1, \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1, \end{cases}$$

hallemos el punto de intersección de las elipses (12/5; 12/5). De la ecuación de la primera elipse, obtenemos

$$\frac{2x}{16}+\frac{2yy'}{9}=0, \text{ es decir, } y'(x)=-\frac{9}{16}\frac{x}{y}$$

y, por lo tanto, $y'(12/5) = -9/16$. Por analogía, obtenemos para la segunda elipse $y'(12/5) = -16/9$. La fórmula (5) tiene, en nuestro

caso, la siguiente forma

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{(-9/16)-(-16/9)}{1+(-9/16)(-16/9)}\right|=\frac{175}{288}.$$

Así, pues, las elipses se intersecan en cuatro puntos bajo el ángulo $\varphi=\operatorname{arctg}(175/288)$, es decir, lo que es igual a unos 31°.▲

14.1. Hallen los ángulos bajo los que el gráfico de la función $y=f(x)$ corta el eje de abscisas:
1) $y=\operatorname{sen}3x$. 2) $y=\operatorname{tg}x$.
3) $y=\ln|x|$. 4) $y=1-e^x$.
5) $y=\operatorname{arctg}\alpha x$, $\alpha>0$.
6) $y=(x-1)^3(x-2)^2(x-3)$. 7) $y=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$.
8) $x=(t-1)^2(t-2)$, $y=(t-1)^2(t-3)$, $2<t<+\infty$.
9) $x=\dfrac{3at}{t^3+1}$, $y=\dfrac{3at^2}{t^3+1}$, $-1<t<\dfrac{1}{2}$.
10). $x^2+y^2+2y-9=0$, $y>-1$.

14.2. Hallen los puntos en los que las tangentes al gráfico de la función $y=f(x)$ son paralelos al eje de abscisas:
1) $y=2x^3-3x^2-12x+7$.
2) $y=3x^4+4x^3-12x^2-1$.
3) $y=3x^4-28x^3-6x^2+84x+1$.
4) $y=\cos 2x-5\cos x$. 5) $y=(3-x^2)e^x$.
6) $y=(2-x)^3/(x-3)^3$. 7) $y=|x-5|\cdot(x-3)^3$.
8) $x=t^3/(1+t^2)$, $y=(t^3-2t^2)/(1+t^2)$.
9) $x^2+2y^2+4x-4y=0$, $y>1$.

14.3. Escriban la ecuación de la tangente al gráfico de la función $y=f(x)$ en el punto indicado:
1) $y=\sqrt{5-x^2}$, $x=1$. 2) $y=\operatorname{arctg}2x$, $x=0$.
3) $y=\ln\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$, $x=0$.
4) $y=4\operatorname{ctg}x-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$.
5) $y=\sqrt[3]{x-1}$, $x=1$.
6) $y=(x^3+2x^2)/(x-1)^2$, $x=-2$.
7) $y=|x-1|\cdot\sqrt[3]{x+2}$, $x=6$.
8) $x^2+y^2-2x+6y=0$, $y>-3$, $x=0$.
9) $x=te^t$, $y=te^{-t}$, $t>-1$, $t=t_0>-1$.
10) $x=a(t-\operatorname{sen}t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t=t_0\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

14.4. Escriban la ecuación de la tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ en el punto $(x_0;\,y_0)$.

14.5. Hallen los puntos de intersección con el eje de abscisas de las tangentes a las elipses

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

en los puntos con abscisas x_0.

14.6. Hallen el ángulo entre las tangentes a la curva

$$2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$$

que pasa por el punto (3; 4).

14.7. Escriban la ecuación de la normal al gráfico de la función $y=f(x)$ en el punto indicado:

1) $y=\cos 2x-2\operatorname{sen} x$, $x=\pi$.

2) $y=\operatorname{arcctg}(1/x)$, $x=1$. 3) $y=x^3/(2-x)^2$, $x=6$.

4) $y=x/\sqrt[3]{x+1}$, $x=-3$. 5) $y^2=2px$, $y\geqslant 0$, $x=x_0$.

6) $x=e^{2t}\cos^2 t$, $y=e^{2t}\operatorname{sen}^2 t$, $|t|<\pi/4$, $t=\pi/6$.

14.8. Escriban la ecuación de la normal a la elipse $3x^2+2xy+$ $+2y^2+3x-4y=0$ en el punto $(-2;\ 1)$.

14.9. Escriban la ecuación de la normal a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

en el punto $(x_0;\ y_0)$.

14.10. Escriban la ecuación de la tangente y de la normal a la curva en el punto M:

1) $x^3+y^2+2x-6=0$, $M(-1;\ 3)$.

2) $4x^3-3xy^2+6x^2-5xy-8y^2+9x+14=0$, $M(-2;\ 3)$.

3) $y^4-4x^4-6xy=0$, $M(1;\ 2)$.

4) $x^5+y^5-2xy=0$, $M(1;\ 1)$.

5) $(4-x)\,y^2=x^3$, $M(x_0;\ y_0)$.

6) $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$, $n\in\mathbb{N}$, $M(a;\ b)$.

7) $x=t^2$, $y=t^3$, $M(4;\ 8)$.

8) $x=t\cos t$, $y=t\operatorname{sen} t$, $M(\pi\sqrt{2}/8;\ \pi\sqrt{2}/8)$.

9) $x=\sqrt{2}\cos^3 t$, $y=\sqrt{2}\operatorname{sen}^3 t$, $M(1/2;\ 1/2)$.

10) $x=\frac{1+t}{t^3}$, $y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}$, $M(2;\ 2)$.

11) $x=(2t-1)/t^2$, $y=(3t^2-1)/t^3$, $M(1;\ 2)$.

14.11. Determinen en qué punto y bajo qué ángulo se cortan los gráficos de las funciones:

1) $f_1(x)=x-x^3$, $f_2(x)=5x$.

2) $f_1(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen} x$, $f_2(x)=\sqrt{2}\cos x$.

3) $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=x^3$.

4) $f_1(x)=1/x$, $f_2(x)=\sqrt{x}$. 5) $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=1/x^2$.

6) $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = x^2/(2e)$.
7) $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$, $f_2(x) = -x^2 + 6x - 4$.
8) $f_1(x) = 4x^2 + 2x - 8$, $f_2(x) = x^3 - x + 10$.
9) $f_1(x) = \varphi(x)$, $f_2(x) = \varphi(x) \operatorname{sen} \pi x$, $\varphi(x)$ es una función derivable por doquier.

14.12. Determinen en qué puntos y bajo qué ángulo se cortan las curvas:

1) $y = x^2$ y $x = y^2$. 2) $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$ y $x = 1$.

3) $y = e^{x/2}$ y $x = 2$. 4) $x^2 + y^2 = 5$ e $y^2 = 4x$.

5) $y^2 = 2x^3$ y $64x - 48y - 11 = 0$.

6) $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ e $y = x + 1$.

7) $x = \frac{t^3}{1+t^2}$, $y = \frac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$ e $y + \ln \frac{5x}{8} = 0$.

8) $x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$, $y = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}$ e $y = x$.

14.13. Demuestren que las familias de parábolas $y^2 = p^2 - 2px$ e $y^2 = 2qx + q^2$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ forman una *red ortogonal*, es decir, las curvas de estas familias se cortan bajo los ángulos rectos.

14.14. Demuestren que las familias de hipérbolas

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{y} \quad xy = b$$

forman una red ortogonal.

14.15. Demuestren que la familia de elipses

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\cos t, \quad y = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi,$$

y la familia de hipérbolas

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\cos \alpha, \quad y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\operatorname{sen} \alpha, \quad 0 < t < +\infty$$

(a y α son constantes, con la particularidad de que $a > 0$, $\alpha \neq \pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$) forman una red ortogonal.

14.16. Determinen el ángulo entre las tangentes izquierda y derecha del gráfico de la función $y = f(x)$ en el punto M:

1) $y = |x|$, $M(0;\ 0)$. 2) $y = \sqrt[3]{x^2}$, $M(0;\ 0)$.

3) $y = \arccos(\cos x)$, $M(\pi;\ \pi)$.

4) $y = \sqrt{1 - e^{-3x^2}}$, $M(0;\ 0)$.

5) $y = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$, $M(0;\ 0)$.

6) $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1+x^2}$, $M\left(1;\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$.

7) $x^3 + y^3 = 3x^2$, $M(0;\ 0)$.

8) $y=\begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0, \end{cases}$ $M(0;\ 0)$.

9) $y=\frac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+x}$, $M\left(2;\ \frac{1}{3}\right)$.

10) $x=t-\frac{t}{1+t^2}$, $y=\frac{2+t^2}{1+t^2}$, $M(0;\ 2)$.

14.17. En el punto (1; 2) de la parábola $y^2 = 4x$ calculen la longitud de los segmentos: 1) de la tangente; 2) de la normal; 3) de la subtangente; 4) de la subnormal.

14.18. Hallen la longitud de la subtangente al gráfico de la función $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, en cada uno de sus puntos.

14.19. Hallen la longitud de la subtangente al gráfico de la función $y = ax^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, en cada uno de sus puntos.

14.20. Hallen la longitud de la subtangente y de la subnormal: 1) a la parábola $y^2 = 2px$; 2) a la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$.

14.21. Demuestren que las subtangentes a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en los puntos con iguales abscisas son iguales.

14.22. Demuestren que en los puntos con iguales abscisas las subnormales a los gráficos de las funciones

$$y=f(x) \quad \text{e} \quad y=\sqrt{f^2(x)+a^2},$$

donde $f(x)$ es una función derivable, son iguales.

14.23. Hallen la longitud de la subtangente y la subnormal para las curvas:

1) $y^2 = x^3$. 2) $xy^2 = 1$.

14.24. Hallen las longitudes de los segmentos de la tangente, la normal, la subtangente y la subnormal a la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

en cada uno de sus puntos que no yacen en el eje de abscisas.

14.25. Hallen las longitudes de los segmentos de la tangente y la normal a la tractriz

$$x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t),\ y = a \operatorname{sen} t,\ 0 < t < \pi,\ a > 0.$$

14.26. Demuestren que para la curva

$$x = 2a(\ln \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t),\ y = a \operatorname{sen} 2t,\ 0 < t < \pi,\ a > 0,$$

la suma de las longitudes de la subtangente y la subnormal es constante e igual a $2a$.

14.27. Demuestren que si $r = f(\varphi)$ es la ecuación de una curva en un sistema polar de coordenadas y ω, el ángulo formado por la tangente y el radio polar del punto de tangencia, entonces $\operatorname{tg} \omega = r/|r'|$.

14.28. Hallen el ángulo entre la tangente y el radio polar del punto de tangencia para las siguientes curvas:

1) *Espiral de Arquímedes* $r = a\varphi$.

2) *Espiral hiperbólica* $r = a/\varphi$.

3) *Espiral logarítmica* $r = ae^{b\varphi}$.

4) *Cardioide* $r = a(\cos\varphi + 1)$.

6) El arco de la *lemniscata de Bernoulli* $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi < \pi/4$.

14.29. ¿Bajo qué ángulo se cortan las curvas $r = \varphi$ y $r = 1/\varphi$ en el punto $(1;\ 1)$?

14.30. Demuestren que el ángulo entre la tangente a la espiral de Arquímedes $r = a\varphi$ y el radio polar del punto de tangencia, cuando $\varphi \to +\infty$, tiende a $\pi/2$.

14.31. Hallen la distancia desde el polo hasta una tangente arbitraria de la curva $r = ae^{b\varphi}$.

14.32. Escriban en coordenadas cartesianas y polares la ecuación de la normal a la cardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ en el punto con ángulo polar $\varphi = \pi/6$.

---

2. Sentido físico de la derivada. Lleva el nombre de velocidad de variación de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a;\ b]$ la razón

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (8)$$

Lleva el nombre de velocidad instantánea o bien velocidad de variación de la función $f(x)$ en el punto x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Así, pues, la derivada es la velocidad de variación de una función. Sobre la interpretación de la derivada como el valor de la velocidad instantánea de variación de la función se basa la aplicación de la derivada para el estudio de diversos fenómenos físicos.

Ejemplo 5. La altura h de un proyectil que se puso en vuelo a una velocidad inicial v_0, bajo el ángulo α al horizonte, varía según la ley

$$h = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\, t - \frac{gt^2}{2},$$

donde t es el tiempo, g, la aceleración de la fuerza de la gravedad. ¿En qué momento la velocidad de variación de la altura del proyectil sobre el horizonte es igual a cero?

$\triangle$Calculamos la derivada de la función $h(t)$:

$$h'(t) = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt.$$

Por lo tanto, la velocidad de variación de la altura del proyectil sobre el horizonte es igual a cero con

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}. \ ▲$$

Ejemplo 6. La cantidad de electricidad q (en culombios), que pasa por la sección transversal de un conductor, varía según la ley $q = 3t^2 + 2t$. Hallen la intensidad de la corriente al finalizar el quinto segundo.

△ La intensidad de la corriente i en el momento de tiempo t es igual a la velocidad instantánea de la variación de la cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal del conductor. Por ello, $i(t) = q'(t) = 6t + 2$ e $i(5) = 32$, es decir, la intensidad de la corriente al finalizar el quinto segundo es igual a 32 amperios. ▲

14.33. El tren Moscú — Tbilisi recorre todo el camino, igual a 2400 km, en el transcurso de 44 horas 14 minutos. Determinen la velocidad media del tren.

14.34. Determinen la velocidad media de variación de la función $y = \operatorname{sen}(1/x)$ sobre el segmento $[2/\pi; 6/\pi]$.

14.35. Un cuerpo de masa $m = 1{,}5$ está en movimiento rectilíneo según la ley $S(t) = t^2 + t + 1$. Hallen la energía cinética del cuerpo 5 s después del comienzo del movimiento (la masa m se da en kilogramos, el recorrido S en metros).

14.36. Un punto está en movimiento por la parábola $y = 8x - x^2$ de modo que su abscisa varía según la ley $x = \sqrt{t}$ (x se mide en metros, t, en segundos). ¿Cuál será la velocidad de variación de la ordenada del punto 9 s después de comenzar el movimiento?

14.37. El radio de un globo crece uniformemente a una velocidad de 5 cm/s. ¿Cuál será la velocidad de variación del volumen del globo en el momento cuando el radio se hace igual a 50 cm?

14.38. Una rueda gira de tal manera que el ángulo de giro es proporcional al cuadrado del tiempo. La primera vuelta fue realizada en 8 s. Hallen la velocidad angular 64 s después del comienzo de movimimento.

14.39. Por el eje de abscisas se mueven dos puntos que tienen las siguientes leyes de movimiento

$$x = 100 + 5t \text{ y } x = t^2/2.$$

¿A qué velocidad se separan uno de otro en el momento del encuentro (x, se mide en metros, t, en segundos)?

14.40. Un pontón flotante se atrae hacia la orilla con ayuda de un cable que se enrolla en un torno a una velocidad de 3 m/min. Determinen la velocidad de movimiento del pontón cuando se encuentra a 25 m de la orilla si el torno está situado en la orilla a 4 m de altura sobre el nivel de agua.

14.41. La ley de movimiento de un punto material lanzado bajo el ángulo α respecto al horizonte a una velocidad inicial v_0, sin tomar en consideración la resistencia del aire, tiene la forma

$$x = (v_0 \cos \alpha)\, t, \quad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)\, t - \frac{gt^2}{2},$$

donde t es el tiempo, g, la aceleración de la fuerza de gravedad. Determinen las coordenadas del vector de velocidad y el valor de ésta.

14.42. Un punto está en movimiento por la espiral de Arquímedes $r = a\varphi$ de modo que la velocidad angular de rotación de su radio polar es constante e igual a 6° por segundo. Determinen la velocidad de alargamiento del radio polar r si $a = 10$ m.

14.43. La distancia r hasta un satélite de la Tierra desde su centro puede ser expresada, aproximadamente, con la fórmula

$$r = a\left(1 - \varepsilon \cos \frac{2\pi (t - t_0)}{P} - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\cos \frac{4\pi (t - t_0)}{P} - 1\right)\right),$$

donde t es el tiempo, a, el semieje mayor de la órbita elíptica, ε, su excentricidad, P, el período orbital del satélite, t_0, el tiempo de paso por el perigeo. Hallen el valor de la velocidad de variación de la distancia r (la llamada velocidad radial del satélite).

14.44. La cantidad de calor Q J necesaria para calentar 1 kg de agua desde 0 °C hasta t °C se determina con la fórmula

$$Q = t + 2 \cdot 10^{-5} t^2 + 3 \cdot 10^{-7} t^3.$$

Determinen la capacidad calorífica del agua a $t = 100$ °C.

14.45. La masa $m\,(t)$ de una sustancia radiactiva varía según la ley

$$m = m_0 2^{(t_0 - T)/T},$$

donde t es el tiempo, m_0 la masa en el momento de tiempo t_0, T, el período de semidesintegración. Demuestren que la velocidad de desintegración de la sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia. Hallen el coeficiente de proporcionalidad.

§ 15. Derivadas y diferenciales de órdenes superiores

1. Derivadas de órdenes superiores (sucesivas). Sea la función $f\,(x)$ derivable sobre el intervalo $(a;\, b)$. La derivada $f'\,(x)$ lleva el nombre de *derivada de primer orden* o bien *primera derivada* de la función $f\,(x)$. Si la primera derivada $f'\,(x)$ es derivable sobre el intervalo $(a;\, b)$, entonces su derivada es llamada *de segundo orden* o bien *segunda derivada* de la función $f\,(x)$. Para la derivada de segundo orden se han adoptado las siguientes designaciones:

$$f''(x), \quad f^{(2)}(x), \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad f''_{xx}, \quad f''_{x^2}.$$

Por analogía se determina la derivada

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

del orden $n \in \mathbb{N}$: si sobre el intervalo $(a; b)$ existe una derivada del orden $n - 1$, su primera derivada recibe el nombre de *derivada del orden n*, es decir, por definición

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \quad n \in \mathbb{N},$$

con ello, por derivada $f^{(0)}(x)$ de orden nulo se entiende la función $f(x)$.

Si $s = s(t)$ es la ley del movimiento rectilíneo de un punto material, $s''(t)$ es la aceleración de dicho punto en el momento de tiempo t. En esto consiste el sentido físico de la segunda derivada.

Ejemplo 1. Hallen la derivada de segundo orden de la función

$$f(x) = \ln |1 + x|.$$

$\triangle$Como $f'(x) = 1/(1 + x)$, entonces

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad x \neq -1. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 2. Hallen la derivada de orden n de la función $f(x) = 2^{3x}$.

$\triangle$Ya que

$$f'(x) = 2^{3x} \cdot 3 \ln 2,$$
$$f''(x) = (2^{3x} \cdot 3 \ln 2)' = 2^{3x} \cdot 3^2 \ln^2 2,$$
$$f'''(x) = (2^{3x} \cdot 3^2 \ln^2 2)' = 2^{3x} \cdot 3^3 \ln^3 2,$$

como es natural suponer

$$f^{(n)}(x) = 2^{3x} \cdot 3^n \ln^n 2.$$

Demostremos la validez de esta fórmula según el método de la inducción matemática. Con $n = 1$ la fórmula es cierta. Supongamos que ella también lo es con $n = k$, es decir,

$$f^{(k)}(x) = 2^{3x} \cdot 3^k \ln^k 2.$$

Entonces,

$$f^{(k+1)}(x) = (2^{3x} \cdot 3^k \ln^k 2)' = 2^{3x} \cdot 3^{k+1} \ln^{k+1} 2$$

y, por consiguiente, la fórmula es asimismo cierta con $n = k + 1$. De aquí se desprende su validez con todos los valores de n.$\blacktriangle$

Al calcular las derivadas de órdenes superiores se utilizan con frecuencia las siguientes fórmulas principales:

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \tag{1}$$

en particular,

$$(e^x)^{(n)}=e^x. \tag{2}$$

$$(\operatorname{sen}\alpha x)^{(n)}=\alpha^n \operatorname{sen}\left(\alpha x+\frac{\pi n}{2}\right), \tag{3}$$

$$(\cos\alpha x)^{(n)}=\alpha^n \cos\left(\alpha x+\frac{\pi n}{2}\right). \tag{4}$$

$$((ax+b)^\alpha)^{(n)}=a^n\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}. \tag{5}$$

$$(\log_a|x|)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n\ln a}, \tag{6}$$

en particular,

$$(\ln|x|)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}. \tag{7}$$

Si las funciones $u(x)$ y $v(x)$ tienen derivadas de orden n, las funciones $\alpha u(x)+\beta v(x)$, donde α y β son constantes, y $u(x)v(x)$ tienen, asimismo, derivadas del orden n, con la particularidad de que

$$(\alpha u+\beta v)^{(n)}=\alpha u^{(n)}+\beta v^{(n)}, \tag{8}$$

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}. \tag{9}$$

La última fórmula lleva el nombre de Leibniz.

Ejemplo 3. Hallen la derivada del orden n de las funciones:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$. 2) $f(x)=x^2\cos 2x$.

△ 1) Representemos la función dada en la forma (desarrollémosla en fracciones elementales; véase el § 6)

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right).$$

De acuerdo con la fórmula (8), tenemos

$$\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^{(n)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}.$$

Haciendo en la fórmula (5) $\alpha=-1$, $a=1$, $b=\pm 2$, obtenemos

$$\left(\frac{1}{x\pm 2}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\ldots(-1-n+1)(x\pm 2)^{-1-n}=$$

$$=(-1)^n n!\frac{1}{(x\pm 2)^{n+1}}.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{4}\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right).$$

2) Aplicamos la fórmula de Leibniz, haciendo en ella $u = \cos 2x$, $v = x^2$:

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = C_n^0 x^2 (\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)' (\cos 2x)^{(n-1)} + \\ + C_n^2 (x^2)'' (\cos 2x)^{(n-2)}.$$

Los demás sumandos son nulos, ya que

$$(x^2)^{(k)} = 0 \text{ con } k > 2.$$

Con el fin de calcular las derivadas de los órdenes n, $n - 1$ y $n - 2$ de la función $\cos 2x$, hagamos uso de la fórmula (4):

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-1)} = 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) = 2^{n-1} \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

$$(\cos 2x)^{(n-2)} = 2^{n-2} \cos\left(2x + \frac{\pi(n-2)}{2}\right) = -2^{n-2} \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Por lo tanto,

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = 2^n \left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) + \\ + 2^n nx \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right). \ \blacktriangle$$

Ejemplo 4. Para la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$ calculen $f^{(n)}(0)$.

$\triangle$ Como $f'(x) = 1/(1 + x^2)$,

$$(1 + x^2) f'(x) = 1.$$

Calculemos las derivadas del orden $n - 1$ para ambos miembros de esta igualdad. Para calcular la derivada del primer miembro apliquemos la fórmula de Leibniz, haciendo en ella $u = f'(x)$, $v = 1 + x^2$. Obtenemos

$$(1 + x^2) f^{(n)}(x) + 2(n-1) x f^{(n-1)}(x) + \\ + (n-1)(n-2) f^{(n-2)}(x) = 0,$$

de donde, con $x = 0$, hallamos la relación recurrente

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2) f^{(n-2)}(0).$$

Cuando n es par ($n = 2k$), ya que $f^{(2)}(0) = 0$, obtenemos

$$f^{(2k)}(0) = 0.$$

Siendo n impar ($n = 2k + 1$), ya que $f'(0) = 1$, hallamos

$$f^{(2k+1)}(0) = -(2k)(2k-1) f^{(2k-1)}(0) = \ldots \\ \ldots = (-1)^k (2k)! f'(0) = (-1)^k (2k)! \blacktriangle$$

Ejemplo 5. Hallen la segunda derivada de la función inversa a la función

$$y = x + x^5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\triangle$La función dada es continua y estrictamente monótona por doquier, su derivada $y'_x = 1 + 5x^4$ no se reduce a cero en ningún punto, por ello

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+5x^4}.$$

Después de derivar por y esta identidad, obtenemos

$$x''_{yy} = \left(\frac{1}{1+5x^4}\right)'_x \cdot x'_y = \frac{-20x^3}{(1+5x^4)^3}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 6. La función $y = f(x)$ está prefijada en forma paramétrica

$$x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in (0;\ 2\pi).$$

Hallen y''_{xx}.

$\triangle$Con la fórmula (34) del § 13, hallamos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t} = \frac{2 \operatorname{sen}(t/2) \cos(t/2)}{2 \operatorname{sen}^2(t/2)},$$

es decir, $y'_x = \operatorname{ctg}(t/2)$. Derivando por x ambos miembros de la igualdad obtenida, hallamos

$$y''_{xx} = (\operatorname{ctg}(t/2))'_t \cdot t'_x = (\operatorname{ctg}(t/2))'_t \cdot \frac{1}{x'_t} =$$

$$= -\frac{1}{2 \operatorname{sen}^2(t/2)} \cdot \frac{1}{1-\cos t} = -\frac{1}{4 \operatorname{sen}^4(t/2)}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 7. Sea que la función $y = f(x)$ está prefijada con las fórmulas paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (a;\ b)$$

y sean $x(t)$ e $y(t)$ derivables dos veces y $x'(t) \neq 0$ con $t \in (a;\ b)$. Hallen y''_{xx}.

$\triangle$Según la fórmula (34) del § 13 hallamos la primera derivada $f'(x)$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Derivando por x ambos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)' \cdot t'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)' \cdot \frac{1}{x'_t},$$

es decir,

$$y''_{xx}=\frac{x'_t y''_{tt}-y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}. \blacktriangle \tag{10}$$

Ejemplo 8. Sea $y = y(x)$, $|x| > a$, una función positiva prefijada de forma implícita con la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Hallen y''_{xx}.

$\triangle$Con el fin de hallar y'_x hacemos uso de la ecuación (35) del § 13, que en nuestro caso tiene la forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0.$$

Después de derivar, obtenemos

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}y'_x=0. \tag{11}$$

De esta ecuación hallamos $y'_x=\frac{b^2x}{a^2y}$, $|x|>a$, $y>0$. Derivando por x ambos miembros de la igualdad (11), hallamos

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}(y'_x)^2-\frac{y}{b^2}y''_{xx}=0.$$

Por consiguiente,

$$y''_{xx}=\frac{1}{y}\left(\frac{b^2}{a^2}-(y'_x)^2\right)=\frac{1}{y}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}\right)=$$
$$=-\frac{b^4}{a^2y^3}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=-\frac{b^4}{a^2y^3},\ y>0. \blacktriangle$$

Ejemplo 9. Determinen de qué orden son las derivadas que la función $y = |x|^3$ tiene en el punto $x = 0$.

$\triangle$Si $x \neq 0$, entonces

$$y'(x)=\begin{cases} 3x^2 \text{ con } x>0, \\ -3x^2 \text{ con } x<0. \end{cases}$$

Con $x = 0$, según la definición de derivada, hallamos

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^3}{\Delta x}=0.$$

Así, pues, la primera derivada existe con toda x, con ello

$$y'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x.$$

Por analogía, para la segunda derivada, obtenemos

$$y''(x) = \begin{cases} 6x & \text{con } x > 0, \\ -6x & \text{con } x < 0. \end{cases}$$

$$y''(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y'(0+\Delta x) - y'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x^2 \operatorname{sign} \Delta x}{\Delta x} = 0,$$

es decir, la segunda derivada existe con toda x, con ello

$$y''(x) = 6\,|x|.$$

La función $|x|$ no es derivable en el punto $x = 0$. Por consiguiente, la función dada $y = |x|^3$ posee en el punto $x = 0$ derivadas hasta del segundo orden, inclusive.▲

2. Diferenciales de órdenes superiores. Sea la función $y = f(x)$ derivable sobre el intervalo $(a; b)$. Su diferencial

$$dy = f'(x)\,dx, \tag{12}$$

llamada asimismo primera diferencial de dicha función, depende de dos variables x y dx. Sea también la derivada $f'(x)$ derivable sobre el intervalo $(a; b)$. Entonces, con dx fijada, la diferencial dy es función sólo de x, para la que, a su vez, es posible calcular la diferencial, con la particularidad de que como incremento Δx de la variable independiente x podemos tomar el mismo incremento que fue elegido para hallar la primera diferencial de la función $f(x)$, es decir, dx. La diferencial de la primera diferencial, calculada con esta condición, lleva el nombre de segunda diferencial o bien diferencial de segundo orden de la función $y = f(x)$ y se designa con d^2y o bien d^2f.

Así, pues, por definición

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = (df'(x))\,dx = \\ = f''(x)\,dx\,dx = f''(x)(dx)^2,$$

o bien

$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \tag{13}$$

Por analogía, en el caso cuando la función $y = f(x)$ tiene sobre el intervalo $(a; b)$ una derivada de orden n, se determina la n-ésima diferencial d^ny como la primera diferencial de la $(n-1)$-ésima diferencial, a condición de que durante el cálculo de la primera diferencial se toma como incremento Δx aquel incremento dx que fue elegido al calcular la $(n-1)$-ésima diferencial.

Según el método de inducción, para la n-ésima diferencial se obtiene la fórmula

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{14}$$

Por definición, la diferencial de orden n-ésimo de la variable independiente x con $n > 1$ se considera igual a cero, es decir,

$$d^n x = 0 \quad \text{con } n > 1. \tag{15}$$

Si para las funciones $u(x)$ y $v(x)$ existen las diferenciales $d^n u$ y $d^n v$, la función $\alpha u(x) + \beta v(x)$, donde α y β son constantes y $u(x)\,v(x)$ también tienen diferenciales de n-ésimo orden, con ello

$$d^n(\alpha u + \beta v) = \alpha\, d^n u + \beta\, d^n v, \tag{16}$$

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} u \cdot d^k v. \tag{17}$$

Observación. La fórmula (13) y la fórmula (14) con $n > 1$ son válidas cuando y sólo cuando x es la variable independiente. Para la función compuesta $y = y(x(t))$ la fórmula (13) se generaliza de la forma siguiente:

$$d^2 y = d(dy) = d(y'_x\, dx) = (dy'_x)\, dx + y'_x d(dx),$$

es decir,

$$d^2 y = y''_{xx}\, dx^2 + y'_x\, d^2 x. \tag{18}$$

En el caso cuando x es la variable independiente, $d^2 x = 0$ y la fórmula (18) coincide con la (13).

Ejemplo 10. Hallen la segunda diferencial de la función $y = xe^{-x}$ considerando que x es la variable independiente.

$\triangle$**I procedimiento.** De la definición de la segunda diferencial, hallamos

$$d^2 y = d(dy) = d(x\, de^{-x} + e^{-x}\, dx) = d(-xe^{-x}\, dx + $$
$$+ e^{-x}\, dx) = -d(xe^{-x})\, dx + (de^{-x})\, dx = -(x\, de^{-x} + e^{-x}\, dx)\, dx -$$
$$- e^{-x}\, dx^2 = xe^{-x}\, dx^2 - e^{-x}\, dx^2 - e^{-x}\, dx^2 = (x-2)\, e^{-x}\, dx^2.$$

II procedimiento. Calculemos la segunda derivada

$$y'' = (xe^{-x})'' = (e^{-x} - xe^{-x})' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} =$$
$$= (x-2)\, e^{-x}$$

y, según la fórmula (13), hallamos

$$d^2 y = (x-2)\, e^{-x}\, dx^2. \blacktriangle$$

Ejemplo 11. Hallen la segunda diferencial de la función $y = \operatorname{sen} x^2$, considerando que x: a) es la función de cierta variable independiente; b) es la variable independiente.

$\triangle$a) **I procedimiento.** De la definición de la segunda diferencial, tenemos

$$d^2 y = d(d \operatorname{sen} x^2) = d(2x \cos x^2\, dx) = (2x \cos x^2)\, d^2 x +$$
$$+ (d(2x \cos x^2))\, dx = 2x \cos x^2\, d^2 x + (2 \cos x^2 -$$
$$- 4x^2 \operatorname{sen} x^2)\, dx^2.$$

II procedimiento. Calculemos por x las derivadas primera y segunda de la función dada:

$$y'_x = 2x\cos x^2,$$
$$y''_{xx} = 2\cos x^2 - 4x^2 \operatorname{sen} x^2.$$

De acuerdo con la fórmula (18), obtenemos

$$d^2y = (2\cos x^2 - 4x^2 \operatorname{sen} x^2)\,dx^2 + 2x\cos x^2\, d^2x.$$

b) En este caso $d^2x = 0$ y, por lo tanto,

$$d^2y = (2\cos x^2 - 4x^2 \operatorname{sen} x^2)\,dx^2. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 12. Hallen d^2y si $y = u/v$ y du, dv, d^2u, d^2v son conocidas.

$\triangle$Durante la resolución hacemos uso de las propiedades de la primera diferencial (fórmulas (41)—(43) § 13)

$$d^2\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(d\,\frac{u}{v}\right) = d\left(\frac{v\,du - u\,dv}{v^2}\right) =$$
$$= \frac{v^2 d\,(v\,du - u\,dv) - (v\,du - u\,dv)\,dv^2}{v^4} =$$
$$= \frac{v^2\,(v d^2u + dv\,du - u d^2v - du\,dv) - 2v\,(v\,du - u\,dv)\,dv}{v^4} =$$
$$= \frac{1}{v}\,d^2u - \frac{u}{v^2}\,d^2v - \frac{2}{v^2}\,du\,dv + \frac{2u}{v^3}\,dv^2. \ \blacktriangle$$

15.1. Hallen la derivada de segundo orden:

1) $y = x^2 + 13x + 11$. 2) $y = 1 + 10x + \frac{1}{x^{99}}$.

3) $y = \frac{x\,(1+3\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$. 4) $y = \cos^2 x$.

5) $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$. 6) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

7) $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2+1})$. 8) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

9) $y = \operatorname{arcsen}\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

10) $y = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x} - \ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}$.

15.2. Hallen la segunda derivada en el punto indicado:

1) $y = e^{\sqrt{x}}$, $x = 4$. 2) $y = \frac{x^5}{(x-1)^4}$, $x = 5$.

3) $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = 0$. 4) $y = e^{\operatorname{sen} x}\cos(\operatorname{sen} x)$, $x = 0$.

15.3. Un punto está en movimiento según la ley $s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t^3$ (s se mide en metros, t, en segundos). Hallen su aceleración 5 s después del comienzo del movimiento.

15.4. Demuestren que durante el movimiento de un sólido según la ley $s(t) = ae^t + be^{-t}$ su aceleración es numéricamente igual al recorrido realizado.

15.5. Demuestren que durante el movimiento de un sólido según la ley $s(t) = \sqrt{t}$ su aceleración es proporcional al cubo de la velocidad.

15.6. Un punto está en movimiento según la ley $s_1(t) = t^3 + \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}$, otro, según la ley $s_2(t) = \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$ (s_1, s_2 se miden en metros, t, en segundos). Hallen la aceleración de los puntos en el momento cuando sus velocidades son iguales.

15.7. Hallen el valor de la fuerza que actúa sobre un punto de masa $m = 0{,}1$ en movimiento según la ley $s(t) = t^2 - 4t^4$, en el momento de tiempo $t = 3$ (m, s, t están prefijadas en el sistema SI).

15.8. Por una circunferencia de 5 m de radio está en movimiento un punto a velocidad angular constante de 2 rad/s. Hallen el valor de la aceleración del punto.

15.9. Hallen la segunda diferencial de la función:

1) $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$. 2) $y = 2x + \operatorname{ctg} 2x$.
3) $y = x(\cos \ln x + \operatorname{sen} \ln x)$. 4) $y = x^x$.

15.10. Hallen la segunda diferencial de la función en el punto dado:

1) $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$, $x = 1$. 2) $y = \frac{3x + 2}{x^2 - 2x + 5}$, $x = 0$.

3) $y = x\sqrt[3]{(x - 5)^2}$, $x = -3$. 4) $y = \operatorname{arctg}\frac{2 + x^2}{2 - x^2}$, $x = 0$.

15.11. Determinen si la función $y = y(x)$ satisface la ecuación:

1) $y = A\cos ax + B\operatorname{sen} ax$, $\quad y'' + a^2y = 0$.
2) $y = Ae^{ax} + Be^{-ax}$, $\quad y'' - a^2y = 0$.
3) $y = (A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x)e^{-x}$, $\quad y'' + 2y' + 10y = 0$.
4) $y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{x}$, $\quad y'' - y = \frac{x^2 - 2}{x^3}$.
5) $y = 1 + \cos e^x + \operatorname{sen} e^x$, $\quad y'' - y' + e^{2x}y = 0$.
6) $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^{10}$, $\quad (1 + x^2)y'' + xy' - 100y = 0$.
7) $y = e^{10 \arcsin x}$, $\quad (1 - x^2)y'' - xy' - 100y = 0$.
8) $y = \cos(10 \arccos x)$, $\quad (1 - x^2)y'' - xy' + 100y = 0$.

15.12. Hallen y'' considerando que u', u'', v', v'' son conocidas:

1) $y = (v + 2u)/u$. 2) $y = e^{uv}$.
3) $y = \operatorname{arctg}(v/u)$. 4) $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$.

15.13. Hallen $d^n y$ considerando que du, d^2u, dv, d^2v son conocidas:

1) $y=u(2+v)$. 2) $y=u\ln v$.

3) $y=\sqrt{u^2+v^2}$. 4) $y=u^v$.

15.14. Hallen $\frac{d^2y}{dx^2}$ para las funciones prefijadas con las ecuaciones paramétricas:

1) $x=t^3$, $y=t^2$. 2) $x=\frac{t^2}{1+t^3}$, $y=\frac{t^3}{1+t^3}$.

3) $x=\ln\cos t$, $y=\ln\cos 2t$. 4) $x=a\cos t$, $y=b\operatorname{sen} t$.

5) $x=(1+\cos^2 t)\operatorname{sen} t$, $y=\operatorname{sen}^2 t\cos t$.

6) $x=t\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t$, $y=t\operatorname{sh} t-\operatorname{ch} t$.

7) $x=\frac{e^t}{1+t}$, $y=(t-1)e^t$. 8) $x=\frac{1}{\cos t}$, $y=\operatorname{tg} t-t$.

9) $x=\operatorname{sen}\log_2 t$, $y=\operatorname{tg}\log_2 t$. 10) $x=2^{\cos^2 t}$, $y=2^{\operatorname{sen}^2 t}$.

15.15. Hallen $\frac{d^2y}{dx^2}$ en el punto prefijado:

1) $x=(t^2+1)e^t$, $y=t^2e^{2t}$; $(1;\ 0)$.

2) $x=\frac{2t-t^2}{t-1}$, $y=\frac{t^2}{t-1}$; $(0;\ 4)$.

3) $x=\ln(1+\operatorname{sen}\varphi)$, $y=\ln(1-\cos 2\varphi)$; $(\ln(3/2);\ \ln(1/2))$.

4) $x=\operatorname{ch} t\operatorname{sen} t+\operatorname{sh} t\cos t$, $y=\operatorname{ch} t\cos t-\operatorname{sh} t\operatorname{sen} t$; $(0;\ 1)$.

15.16. Hallen $\frac{d^2x}{dy^2}$ para las funciones prefijadas con ecuaciones paramétricas:

1) $x=-2+3t-t^3$, $y=t+2t^2+t^3$.

2) $x=\ln\operatorname{tg}(t/2)$, $y=\ln\operatorname{tg} t$.

3) $x=\log_5\operatorname{sen} t$, $y=\log_5\cos t$.

4) $x=\operatorname{arcsentg}\ t$, $y=\sqrt{\cos 2t}$.

15.17. Demuestren que las funciones $y=y(x)$, prefijadas en forma paramétrica, satisfacen las ecuaciones preestablecidas:

1) $x=t^3+t$, $y=\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2+1$; $y''(1+3y'^2)=1$.

2) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\operatorname{sen} t$, $-\pi/4<t<\pi/4$;

$$(x-y)^2y''=2(xy'-y).$$

3) $x=\operatorname{sen} t$, $y=Ae^{\sqrt{2}t}+Be^{-\sqrt{2}t}$, $-\pi/2<t<\pi/2$; A y B son constantes arbitrarias; $(1-x^2)\,y''-xy'-2y=0$.

4) $x=3At^2+\ln Bt$, $y=2At^3+t$, A y B son constantes arbitrarias positivas; $(3y-2y')\,y''=y'^2$.

15.18. Hallen $\frac{d^3y}{dx^3}$ para las funciones prefijadas con ecuaciones paramétricas:

1) $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$. 2) $x=a\operatorname{ch} t$, $y=a\operatorname{sh} t$.

3) $x = a\cos^3 t,\ y = a\,\text{sen}^3 t.$
4) $x = a(t - \text{sen}\,t),\ y = a(1 - \cos t).$
5) $x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\,\text{sen}\,t.$
6) $x = \cos t - \ln \text{ctg}\,(t/2),\ y = \text{sen}\,t.$

15.19. Hallen $\frac{d^n y}{dx^n}$ para las funciones prefijadas con ecuaciones paramétricas:

1) $x = a\cos^2 t,\ y = b\,\text{sen}^2 t$, 2) $x = \cos t,\ y = \cos nt,\ n \in \mathbb{N}.$
3) $x = t^2 - t + 1,\ y = t^2 + t + 1.$
4) $x = \frac{t}{t+1},\ y = \frac{2t^2+t}{(t+1)^2}.$

15.20. Supongamos que para la función $y = f(x)$ son conocidas $f'(x), f''(x), f'''(x)$. Hallen la segunda y tercera derivadas de la función inversa $x = f^{-1}(g)$ en la suposición de que ellas existen.

15.21. Para las funciones $y = y(x)$, prefijadas en forma implícita, hallen y''.

1) $x^2 + y^2 = a^2$. 2) $x^2 - y^2 = a^2$.
3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 4) $y^2 = 2px$.
5) $e^{x-y} = x + y$. 6) $e^{2y} - 2\ln x - 1 = 0$.
7) $y - x\,\text{tg}\ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$. 8) $y^2 = e^{x^4-y^2}$.

15.22. Hallen d^2y en el punto $(x_0; y_0)$ para las funciones $y = y(x)$ prefijadas en forma implícita:

1) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, (1; 1).
2) $2\ln(y - x) + \text{sen}\,xy = 0$, (0; 1).
3) $x^3 y + \text{arcsen}\,(y - x) = 1$, (1; 1)
4) $3(y - x + 1) + \text{arctg}\,(y/x) = 0$, (1; 0).

15.23. Demuestren que las funciones $y = y(x)$, prefijadas en forma implícita, satisfacen las ecuaciones:

1) $y = A\ln y + x + B,\ y\cdot y'' = (y')^2 - (y')^3$.
2) $(A + Bx)\,e^{y/x} = x,\quad x^3 y'' = (xy' - y)^2$.

15.24. Hallen $y^{(n)}(x)$ para las siguientes funciones:

1) $y = x^3 + x + e^{3x}$. 2) $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$.
3) $y = \frac{1+x}{1-x}$. 4) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.
5) $y = \ln(ax + b)$. 6) $y = \text{sen}^2 x$.
7) $y = \text{sen}\,ax\,\text{sen}\,bx$. 8) $y = \text{ch}\,ax\,\text{ch}\,bx$.
9) $y = \text{sen}^2 x\,\text{sen}\,2x$. 10) $y = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$.
11) $y = \cos^4 x$. 12) $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.
13) $y = \frac{x}{x^2 - 4x - 12}$. 14) $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$. 15) $y = \frac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$.

15.25. Hallen $y^{(n)}(x)$ para las siguientes funciones:

1) $y = (x-1)\,2^{x-1}$. 2) $y = (2x-1)\,2^{3x}\cdot 3^{2x}$.

3) $y=(3-2x)^2 e^{2-3x}$. 4) $y=x\log_2(1-3x)$.

5) $y=\ln(x-1)^{2x}$. 6) $y=x\ln\frac{3+x}{3-x}$.

7) $y=x\ln(x^2-3x+2)$. 8) $y=x\cos x$.

9) $y=2x\cos^2(x/3)$. 10) $y=(x^2+x)\cos^2 x$.

15.26. Hallen $y^{(n)}(x)$ para las siguientes funciones:

1) $y=\frac{x}{\sqrt{1-5x}}$. 2) $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$.

3) $y=e^{ax}\cos(bx+c)$. 4) $y=e^{2x}\operatorname{sen}^2 x$.

5) $y=\operatorname{ch} ax \operatorname{sen} bx$.

6) $y=x^{n-1}e^{1/x}$.

7) $y=x^{n-1}\ln x$. 8) $y=\operatorname{arctg} x$.

15.27. Calculen en el punto dado la derivada del indicado orden:

1) $y=(2x-7)^2(3x+7)^3$; a) $n=5$, $x=x_0$; b) $n=6$, $x=x_0$.

2) $y=\sqrt{x}$; $n=10$, $x=1$. 3) $y=\frac{x^3}{1-x}$; $n=8$, $x=0$.

4) $y=\frac{x+1}{x^2+x-2}$; $n=13$, $x=-\frac{1}{2}$.

5) $y=\sqrt{x^2+3x^3}$; $n=5$, $x=1$.

6) $y=\frac{1-x^2}{\sqrt[3]{2-3x}}$; $n=6$, $x=-1$.

7) $y=x^2\ln x$; $n=100$, $x=1$.

8) $y=(x^2-2x)\cos 3x$, $n=101$, $x=1$.

9) $y=x\operatorname{sen} x\cos 2x$; $n=100$, $x=\pi/2$.

10) $y=(x-\operatorname{sen} x)^2$; $n=16$, $x=\pi/4$.

11) $y=\operatorname{arctg}^2 x$; a) $n=10$, $x=0$; b) $n=11$, $x=0$.

15.28. Calculen en el punto dado la diferencial de indicado orden:

1) $y=(x+5)^5$; $n=3$, $x=0$.

2) $y=\frac{7x+1}{(3x-2)^2}$; $n=10$, $x=1$.

3) $y=(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1})^2$; $n=16$, $x=1$.

4) $y=\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 3x$; $n=10$, $x=\pi/6$.

5) $y=(2x^2+1)\operatorname{sh}^2 x$; $n=8$, $x=0$.

6) $y=\arcsen x$; a) $n=19$, $x=0$; b) $n=20$, $x=0$.

15.29. Determinen cuál es el orden de las derivadas que posee la función $y=y(x)$ en el punto $x=0$ y calculen en él todas las derivadas existentes:

1) $y(x)=\begin{cases} 1-\cos x & \text{si } x<0, \\ \ln(1+x)-x & \text{si } x\geqslant 0. \end{cases}$

2) $y(x)=\begin{cases} 2x\cos x & \text{si } x<0, \\ \operatorname{sen} 2x & \text{si } x\geqslant 0. \end{cases}$

3) $y(x)=\begin{cases} \operatorname{sh} x - x & \text{si } x<0, \\ x-\operatorname{sen} x & \text{si } x\geqslant 0. \end{cases}$

4) $y(x)=\begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{si } x<0, \\ \operatorname{sen} x \operatorname{ch} x & \text{si } x\geqslant 0. \end{cases}$

5) $y(x)=\begin{cases} x^{10} & \text{si } x \text{ es un número racional}, \\ -x^{10} & \text{si } x \text{ es un número irracional}. \end{cases}$

6) $y(x)=\begin{cases} x^{100}\operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$

7) $y(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$

15.30. Sea $f(x)\in C^{n-1}[0;+\infty)$. Demuestren que existen tales números $a_k (1\leqslant k\leqslant n)$ que la función

$$\varphi(x)=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k f(-kx) & \text{si } x<0, \\ f(x) & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

es continuamente derivable por todo el eje.

15.31. Sea que la función $\varphi(x)$ es derivable y satisface la condición $\varphi'(x)=f(\varphi(x))$, donde f tiene derivadas de todos los órdenes. Demuestren que $\varphi(x)$ también tiene derivadas de todos los órdenes.

15.32. Demuestren que si $f^{(n)}$ existe, entonces

$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

15.33. Sea

$$P_{n,m}(x)=\frac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n, \quad m>0.$$

Hallen $P_{n,m}(1)$.

Capítulo IV

APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS PARA INVESTIGAR LAS FUNCIONES

§ 16. Teoremas del valor medio para las funciones derivables

1. Teorema de Rolle. Si la función f es continua sobre el segmento $[a; b]$, tiene en todos sus puntos internos una derivada finita o infinita de determinado signo y $f(a) = f(b)$, entonces existe tal punto $\xi \in (a; b)$ que

$$f'(\xi) = 0. \qquad (1)$$

La condición (1) significa que en el punto $(\xi; f(\xi))$ del gráfico de la función f la tangente a él es horizontal (fig. 82). En las condicio-

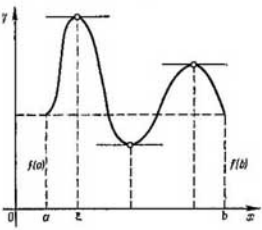


Fig. 82

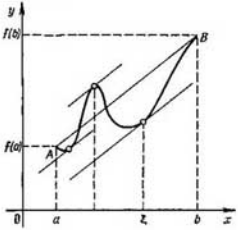


Fig. 83

nes del teorema de Rolle, entre los puntos ξ que satisfacen la condición (1), siempre existe un punto en el que la función f tiene extremo.

2. Teorema de Lagrange. Si la función f es continua sobre el segmento $[a; b]$ y en todos sus puntos internos tiene una derivada finita o bien infinita de determinado signo, existe tal punto $\xi \in (a; b)$ que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \qquad (2)$$

La fórmula (2) lleva el nombre de *fórmula de incrementos finitos de Lagrange*. Su sentido geométrico consiste en que con las condiciones del teorema, en el gráfico de la función f habrá un punto $(\xi; f(\xi))$, $a < \xi < b$, en el que la tangente del gráfico será paralela a

la cuerda del gráfico (fig. 83) que une los puntos $(a; f(a))$ y $(b; f(b))$. En efecto, si la fórmula (2) se reescribe en la forma

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \tag{3}$$

su primer miembro es igual a la tangente del ángulo formado por la indicada cuerda con el eje x, en tanto que el segundo, a la tangente del ángulo formado por la correspondiente tangente con ese mismo eje.

Haciendo $a = x$, $b - a = h$, podemos reescribir con comodidad la fórmula (2) en la forma

$$f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)\,h,\quad 0<\theta<1. \tag{4}$$

Corolario 1. Sea la función f continua sobre cierto intervalo y derivable en todos sus puntos, salvo en su conjunto finito. Entonces, si la derivada de la función f es igual a cero en todos los puntos donde la derivada existe, entonces la función f es constante sobre el intervalo que consideramos.

Corolario 2. Sean las funciones f y g continuas sobre cierto intervalo y derivables en todos sus puntos, salvo en su conjunto finito (hablando en general, diferente para cada uno de ellos). Si en todos los puntos en los que las derivadas f' y g' existen simultáneamente, ellas coinciden: $f'(x) = g'(x)$, entonces sobre todo el intervalo que consideramos las funciones f y g se diferencian en una constante:

$$f(x) = g(x) + c, \quad c \text{ es una constante.}$$

Corolario 3. Sea la función f continua en cierto entorno del punto x_0 y derivable en el entorno pinchado de este punto. Entonces, si existe el límite finito $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = A$, la función f es derivable en el punto x_0 y $f'(x_0) = A$.

3. Teorema de Cauchy. Si las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ son continuas sobre el segmento $[a; b]$ y tienen en todos sus puntos interiores derivadas finitas, con ello $\varphi'(t) \neq 0$, $a < t < b$, existe tal punto $\xi \in (a; b)$ que

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{5}$$

Si $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, la condición $\varphi'(t) \neq 0$ sobre $(a; b)$ puede ser sustituida por la condición $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$, $a < t < b$.

El sentido geométrico del teorema de Cauchy consiste en que en la curva $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, prefijada en forma paramétrica, existe el punto $(\varphi(\xi); \psi(\xi))$, $a < \xi < b$, en el que la tangente es paralela a la cuerda que une el comienzo $(\varphi(a); \psi(a))$ y el final $(\varphi(b); \psi(b))$ de dicha curva. En efecto, las fracciones $\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$

y $\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ son respectivamente iguales a las tangentes de los ángulos formados por dichas tangente y cuerda con el eje x.

Ejemplo. Demuestren que todas las raíces de los *polinomios de Legendre*

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{6}$$

son reales, simples y yacen en el intervalo $(-1;\ 1)$.

△ Consideremos el polinomio $Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n$. El tiene el grado $2n$ y sus raíces son $x_1=-1$ y $x_2=1$, con ello, cada raíz tiene multiplicidad n. Por esta razón, si $n>1$, entonces la derivada Q'_{2n} también tiene como sus raíces x_1 y x_2, pero en este caso, la multiplicidad es $n-1$. Según el teorema de Rolle, para la derivada $Q'_{2n}(x)$ existe, por lo menos, una raíz más x_3 situada entre x_1 y x_2. Como la suma de las multiplicidades de todas las raíces del polinomio es igual a su grado, y el grado del polinomio $Q'_{2n}(x)$ es igual a $2n-1$, la multiplicidad de la raíz x_3 es igual a 1 y el polinomio $Q'_{2n}(x)$ no tiene más raíces que x_1, x_2, x_3. Continuando este proceso, según la inducción, obtenemos que la derivada $Q_{2n}^{(n-1)}(x)$ tiene $n+1$ raíces simples x_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1)$. Numerémoslas en orden de crecimiento: $-1=x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}=1$. Según el teorema de Rolle sobre cada segmento $[x_i;\ x_{i+1}]$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ yace al menos una raíz de la derivada de polinomio $Q_{2n}^{n-1}(x)$, es decir, la raíz del polinomio de Legendre, puesto que

$$[Q_{2n}^{(n-1)}(x)]'=Q_{2n}^{(n)}(x)=2^n n! P_n(x).$$

Así, pues, el polinomio de Legendre tiene sobre el intervalo $(-1;\ 1)$ n raíces diferentes, pero como su grado es igual a n, todas ellas son simples y el polinomio no tiene otras raíces ni reales ni complejas. ▲

16.1. Comprueben la validez del teorema de Rolle para la función $x(x^2-1)$ sobre los segmentos $[-1;\ 1]$ y $[0;\ 1]$.

16.2. Sobre los intervalos $(-1;\ 1)$ y $(1;\ 2)$ hallen los puntos en los que la tangente al gráfico de la función $f(x)=(x^2-1)(x-2)$ es horizontal.

16.3. Sobre el intervalo $(0;\ 1)$ hallen tal punto ξ que la tangente al gráfico de la función $y=x^3$ en el punto $(\xi;\ \xi^3)$ sea paralela a la cuerda del gráfico que une los puntos $(0;\ 0)$ y $(1;\ 1)$.

16.4. Demuestren que entre dos raíces reales de un polinomio con coeficientes reales yace la raíz de su derivada.

16.5. Demuestren que si la función f es derivable n veces sobre el segmento $[a;\ b]$ y en él se reduce a cero en $n+1$ puntos, entonces existe tal $\xi\in(a;\ b)$ que $f^{(n)}(\xi)=0$.

16.6. Demuestren que si la función f es derivable n veces sobre el segmento $[a;\ b]$, $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$, $x_i \in [a;\ b]$, n_i son números naturales, $n_1 + \ldots + n_k = n - 1$ y $f^{(j_i)}(x_i) = 0$, $j_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, sobre el segmento $[a;\ b]$ existe tal punto ξ que $f^{(n)}(\xi) = 0$.

16.7. Demuestren que las raíces de la derivada del polinomio

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

son reales, simples y yacen en los intervalos $(0;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ 4)$.

16.8. Demuestren que todas las raíces de la ecuación

$$(1+x^2)^n \frac{d^n(1+x^2)^{-1}}{dx^n} = 0$$

son reales.

16.9. Demuestren que todas las raíces de la ecuación

$$x^{2n}e^{-1/x} \frac{d^n e^{-1/x}}{dx^n} = 0$$

son reales.

16.10. Demuestren que todas las derivadas del polinomio con coeficientes reales, que tiene sólo raíces reales también sólo pueden tener raíces reales.

16.11. Demuestren que las raíces de todas las derivadas (del orden $m < n$) de los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

son reales, simples y yacen en el intervalo $(-1;\ 1)$.

16.12. Demuestren que en los *polinomios de Laguerre*

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n}$$

todas las raíces son reales.

16.13. Demuestren que en los *polinomios de Chebishev — Hermite*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

todas las raíces son reales y yacen en el intervalo

$$(-\sqrt{2n+1};\ \sqrt{2n+1}).$$

16.14. Aplicando el teorema de Lagrange a la función $1/x^\alpha$, demuestren que con cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $\alpha > 0$ es válida la desigualdad

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right].$$

16.15. Haciendo uso del teorema de Lagrange demuestren las desigualdades:

1) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ con $0 < a < b$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ con $x > 0$.

3) $e^x > 1 + x$ con $x \neq 0$. 4) $e^x > ex$ con $x > 1$.

5) $x^\alpha |\ln x| < \frac{1}{\alpha e}$ con $0 < x < 1$, $\alpha > 0$.

16.16. Demuestren que con $x \geqslant 0$ es válida la igualdad

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

donde $1/4 < \theta(x) < 1/2$, con ello $\lim\limits_{x\to+0} \theta(x) = 1/4$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = 1/2$.

16.17. Demuestren: si la función f es derivable n veces con $x \geqslant 0$, $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, mientras que $f^{(n)}(x) > 0$ con $x > 0$, entonces, asimismo, $f(x) > 0$ con $x > 0$.

16.18. Demuestren: si las funciones f y g son derivables n veces con $x \geqslant 0$ y $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0) = g^{(n-1)}(0)$, $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ con $x > 0$, entonces, asimismo, $f(x) > g(x)$ con $x > 0$.

16.19. Demuestren que si la función f es derivable y no acotada en el intervalo finito $(a; b)$, su derivada también es no acotada en ese intervalo.

16.20. Demuestren que si la función f es derivable sobre el intervalo finito o infinito $(a; b)$ y existen los límites iguales finitos o bien infinitos de un mismo signo $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, entonces existe tal punto $\xi \in (a; b)$ que $f'(\xi) = 0$.

16.21. Sea $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$, $0 < \xi(x) < x$. Demuestren que si $f(x) = x \operatorname{sen}(\ln x)$ con $x > 0$ y $f(0) = 0$, la función $\xi(x)$ es discontinua sobre el intervalo $(0; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, cuan se quiera pequeño.

16.22. Demuestren que si la función f es derivable con $x > a$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

16.23. Demuestren que si la función f es derivable con $x > a$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, entonces $\varliminf\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0$.

16.24. Demuestren que si la función f es derivable sobre el segmento $[a; b]$, $ab > 0$, entonces

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

donde $a < \xi < b$.

16.25. Demuestren que si la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle sobre el segmento $[a; b]$ y no es constante, en este segmento existen tales puntos ξ_1 y ξ_2 que

$$f'(\xi_1)>0, \quad f'(\xi_2)<0.$$

16.26. Demuestren que si la función f es continua sobre el segmento $[a; b]$, derivable sobre el intervalo $(a; b)$ y no es lineal, existe tal punto $\xi \in (a; b)$ que

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

16.27. Demuestren que si la función f es dos veces derivable sobre el segmento $[a; b]$ y $f'(a)=f'(b)=0$, entonces existe tal punto $\xi \in (a; b)$ que

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

16.28. Sea la función f continua en cierto entorno del punto x_0 y derivable en el entorno punzado de dicho punto. Demuestren que si existen los límites $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$, con la particularidad de que ellos no son iguales, la función f no es derivable en el punto x_0.

16.29. Demuestren que si la función f es derivable en cierto entorno punzado del punto x_0, continua en el propio punto y existe el límite finito $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, existirá también la derivada $f'(x_0)$, con ello $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ (con otras palabras, hay que demostrar el corolario 3 del teorema de Lagrange).

16.30. Demuestren que si la función f es diferenciable sobre el segmento $[1; 2]$, existe tal punto $\xi \in (1; 2)$ que $f(2)-f(1)=\frac{\xi^2}{2}f'(\xi)$.

16.31. Demuestren que si la función f es derivable sobre el segmento $[a; b]$, siendo con ello $f(a)=f(b)$, entonces existe tal punto $\xi \in (a; b)$ que $f(a)-f(\xi)=\frac{1}{2}\xi f'(\xi)$.

16.32. Sean la función f continuamente derivable sobre el intervalo $(a; b)$ y su derivada monótona sobre ese intervalo. Demuestren que si $f(x_0)=0$, $x_0\in(a; b)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f'(x)}=0$.

16.33. Aclaren existirá siempre o no tal punto $\xi \in (a; b)$ que $f'(\xi)=0$ si la función f satisface todas las condiciones del teorema de Rolle, salvo una de las siguientes: a) la función f es continua sobre el segmento $[a; b]$; b) la función f tiene en todos los puntos del intervalo $(a; b)$ una derivada finita o infinita de determinado signo; c) $f(a)=f(b)$.

16.34. ¿Son las condiciones del teorema de Rolle necesarias y suficientes para que exista semejante punto $\xi \in (a; b)$ que $f'(\xi) = 0$?

16.35. ¿Es válida la fórmula de incrementos finitos de Lagrange sobre el segmento $[-1; 1]$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0? \end{cases}$$

16.36. Sea la función f continuamente derivable sobre el intervalo $(a; b)$. ¿Es cierto que para cualquier $\xi \in (a; b)$ existen tales puntos $x_1 \in (a; b)$ y $x_2 \in (a; b)$ que

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\ ?$$

§ 17. Regla de L'Hospital

Teorema $\left(\text{la regla de L'Hospital de resolución de las indeterminaciones de la forma } \frac{0}{0} \text{ o bien } \frac{\infty}{\infty}\right)$. Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

a) derivables en el entorno del punto a salvo, posiblemente, el propio punto a, con ello $g'(x) \neq 0$ en dicho entorno;

b) las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son simultáneamente o bien infinitamente pequeñas, o bien infinitamente grandes cuando $x \to a$;

c) existe el límite finito

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en el punto a, $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{2}$$

Ejemplo 1. Ha en $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}$.

△ Apliquemos la fórmula (2) y obtendremos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{5x^4}{6x^2 - 1} = 1. \ \blacktriangle$$

El teorema sigue siendo válido con $a = +\infty$, $a = -\infty$, así como en el caso del límite unilateral ($x \to a + 0$, $x \to a - 0$) al cumplirse las condiciones a) — c) en los intervalos $(\delta; +\infty)$, $(-\infty; -\delta)$, $(a; a + \delta)$, $(a - \delta; a)$, $\delta > 0$, respectivamente.

Si se cumplen las condiciones a), b) y $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ es igual a $+\infty$, o bien a $-\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ es también igual a $+\infty$ ó $-\infty$, respectivamente.

Ejemplo 2. Hallen $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

△ Resolviendo la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, según la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 3. Hallen $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

△ Resolviendo la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, según la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0. \ \blacktriangle$$

Aplicando la regla de L'Hospital, con frecuencia, suele ser cómodo emplear previamente las igualdades asintóticas de la forma

$$\operatorname{sen}\alpha\sim\operatorname{tg}\alpha\sim e^{\alpha}-1\sim\ln(1+\alpha)\sim\operatorname{sh}\alpha\sim$$
$$\sim\operatorname{tg}\alpha\sim\operatorname{arctg}\alpha\sim\operatorname{arcsen}\alpha\sim\alpha, \quad (3)$$

donde $\alpha=\alpha(x)\to 0$ con $x\to a$.

Ejemplo 4. Hallen $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-x\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$.

△ Notando que $\operatorname{sen} x\sim x$ con $x\to 0$, según la regla de L'Hospital, hallamos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-x\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-x\cos x}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\operatorname{sen} x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{1}{3}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 5. Hallen $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}^2 x\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x-x}$.

△ Notando que $\ln(1+x)\sim x$, $\operatorname{sh} x\sim x$ con $x\to 0$ y aplicando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}^2 x\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\operatorname{tg} x-x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\operatorname{sen}^2 x}\cos^2 x=3. \ \blacktriangle$$

En ciertas ocasiones, al calcular los límites, la regla de L'Hospital debe aplicarse varias veces.

Ejemplo 6. Hallen $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}$.

△ Al aplicar la regla de L'Hospital obtenemos de nuevo la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{10x^9-10}{5x^4-5}.$$

Empleando una vez más la regla de L'Hospital, hallamos

$$\lim_{x\to 1}\frac{10x^9-10}{5x^4-5}=2\lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^4-1}=2\lim_{x\to 1}\frac{9x^8}{4x^3}=\frac{9}{2}.$$

Por consiguiente, el límite buscado es igual a 9/2. ▲

Ejemplo 7. Hallen $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$, donde $\alpha>0$, $\beta>0$.

△ Sea $k=[\alpha]+1$, entonces $\alpha-k<0$. Aplicando la regla de L'Hospital k veces, obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}}=\ldots$$

$$\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{\beta^k e^{\beta x}}=0. \ ▲$$

Ejemplo 8. Hallen $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$, donde $\alpha>0$, $\beta>0$.

△ Sea $\ln x=t$; entonces $x=e^t$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{t^\alpha}{e^{\beta t}}=0$ (ejemplo 7). ▲

Las indeterminaciones de la forma $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$ con frecuencia se consigue reducir a la forma $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$ con ayuda de transformaciones algebraicas y, a continuación, se hace uso de la regla de L'Hospital.

Ejemplo 9. Hallen $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$.

△ Transformando la indeterminación de la forma $0\cdot\infty$ a la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y aplicando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to+0}(-x)=0. \ ▲$$

Ejemplo 10. Hallen $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{50}} e^{-1/x^2}$.

△ Haciendo $1/x^2 = t$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{50}} e^{-1/x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t^{25}}{e^t} = 0. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 11. Hallen $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.

△ Transformando la indeterminación de la forma $\infty - \infty$ a la forma $\frac{0}{0}$ y empleando la fórmula asintótica $\operatorname{sen} x \sim x$ cuando $x \to 0$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x + x\cos x)(\operatorname{sen} x - x \cos x)}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 2$, mientras que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$ (ejemplo 4), el límite buscado es igual a 2/3. ▲

Al calcular los límites de las funciones de la forma $\varphi(x) = (f(x))^{g(x)}$ con frecuencia es preciso resolver indeterminaciones de la forma 0^0, ∞^0, 1^∞. Representando la función $\varphi(x)$ en la forma $\varphi(x) = e^{g(x)\ln f(x)}$ es posible reducir el cálculo del límite de la función $g(x) \ln f(x)$ a la resolución de la indeterminación de la forma $0\cdot\infty$.

Ejemplo 12. Hallen $\lim\limits_{x\to +0} x^x$.

△ Como $x^x = e^{x \ln x}$ y $\lim\limits_{x\to +0} x \ln x = 0$ (ejemplo 9), entonces $\lim\limits_{x\to +0} x^x = e^0 = 1$. ▲

Ejemplo 13. Hallen $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$.

△ Como $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln \operatorname{sen} x} = e^{(\ln \operatorname{sen} x)/\operatorname{ctg} x}$, empleando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x}{-1/\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to \pi/2} (-\cos x \cdot \operatorname{sen} x) = 0$$

y, por lo tanto, $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$. ▲

Ejemplo 14. Hallen $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})^{1/\ln x}$.

△ Según la regla de L'Hospital, hallamos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{1/x}=1$$

y, por lo tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})^{1/\ln x}=e$. ▲

Hallen los límites de las funciones (**17.1 — 17.75**):

17.1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}$. **17.2.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$.

17.3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$. **17.4.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{ch}2x-1}{x^2}$.

17.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}ax-\operatorname{sen}bx}{\operatorname{sh}ax-\operatorname{sh}bx}$, $a\neq b$.

17.6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$, $\beta\neq0$. **17.7.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos ax}{x^2}$.

17.8. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{a^x-a^a}$, $a>0$, $a\neq1$.

17.9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x^a-a^a}$. **17.10.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\operatorname{tg}^2x}$.

17.11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\ln\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}$. **17.12.** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}2x}$.

17.13. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{4\operatorname{sen}^2x-6\operatorname{sen}x+1}{3\operatorname{sen}^2x+5\operatorname{sen}x-4}$.

17.14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$. **17.15.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{\ln x}$.

17.16. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$. **17.17.** $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

17.18. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+7x-5}{x^3+2x^2-9x+6}$.

17.19. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sqrt[5]{3\operatorname{tg}^2x}-1}{2\operatorname{sen}^2x+5\operatorname{sen}x-3}$.

17.20. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x}$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$.

17.21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arcsen x^2}{x\cos x-\operatorname{sen}x}$. **17.22.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-x}$.

17.23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}$.

17.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \dfrac{1+x}{1-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$.

17.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$, $a > 0$.

17.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{tg} 3x - 6\operatorname{tg} x}{3\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 3x}$.

17.27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}$. 17.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^3(1+x)}$.

17.29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 2x}{x^2 \operatorname{arcsen} x}$. 17.30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{arcsen} x - \ln(1+x)}$.

17.31. $\lim\limits_{x\to 1} [(x^{10} - 10x + 9)/(x-1)^2]$.

17.32. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{50} - 50x + 49}{x^{100} - 100x + 99}$.

17.33. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 9x - 4}{3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$.

17.34. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha x^{\alpha+2} - (\alpha+1)x^{\alpha+1} + x}{(x-1)^2}$.

17.35. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha(1 - x^{\beta}) - \beta(1 - x^{\alpha})}{(1 - x^{\alpha})(1 - x^{\beta})}$, $\alpha\beta \neq 0$.

17.36. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$. 17.37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\operatorname{sen} x - x}$.

17.38. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}$.

17.39. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{\ln \operatorname{sen} x}$. 17.40. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\operatorname{ctg} x}$.

17.41. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \dfrac{\ln(x - \pi/2)}{\operatorname{tg} x}$. 17.42. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}$.

17.43. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{3 + \ln x}{2 - 3\ln \operatorname{sen} x}$. 17.44. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}{e^{\gamma x}}$.

17.45. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} \ln \ln x}{\sqrt[3]{2x+3}\,\sqrt{\ln x}}$. 17.46. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{x^{\alpha}} \ln^{\beta} x}$.

17.47. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$. 17.48. $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)$.

17.49. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n e^{-x^3}$. 17.50. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\sqrt{x}$.

17.51. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\pi - 2\operatorname{arcsen}(x/\sqrt{x^2+1}))$.

17.52. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\alpha} \ln^{\beta}(1/x)$. $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

17.53. $\lim\limits_{x\to+0} (x^x - 1)\ln x$. **17.54.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

17.55. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$. **17.56.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}\right)$.

17.57. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)$. **17.58.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

17.59. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

17.60. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^{7/8} - x^{6/7}\ln^2 x)$.

17.61. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\alpha}{1-x^\alpha} - \frac{\beta}{1-x^\beta}\right)$, $\alpha\beta \neq 0$.

17.62. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$. **17.63.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$.

17.64. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$. **17.65.** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

17.66. $\lim\limits_{x\to+0} (1+x)^{\ln x}$. **17.67.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$.

17.68. $\lim\limits_{x\to+0} (\operatorname{arcsen} x)^{\operatorname{tg} x}$. **17.69.** $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{sh} x}}$.

17.70. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\pi - 2x)^{\cos x}$. **17.71.** $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x - 1}$.

17.72. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. **17.73.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$.

17.74. $\lim\limits_{x\to+0} |\ln x|^{2x}$. **17.75.** $\lim\limits_{x\to+0} (1/x)^{\operatorname{sen} x}$.

17.76. Muestren que los siguientes límites no pueden ser resueltos con ayuda de la regla de L'Hospital y hallen los límites dados:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}^2 x}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x-\cos x}$.

17.77. Aclaren si es posible aplicar la regla de L'Hosital para calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+2x+\operatorname{sen} 2x}{(2x+\operatorname{sen} 2x)\,e^{\operatorname{sen} x}}.$$

Hallen este límite si él existe.

17.78. Hallen

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2},$$

suponiendo que $f''(a)$ existe.

17.79. Hallen

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)-f(a)}{h^3},$$

suponiendo que $f'''(a)$ existe.

17.80. Muestren que la función

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

es infinitamente derivable por toda la recta numérica y hallen $f^{k}(0)$, $k\in\mathbb{N}$.

17.81. Hallen los límites de las funciones:

1) $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$. 2) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x\cdot\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x+x^3\cos(\pi/x)}{x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-x^{-\frac{1}{x(x+a)}}\right]$.

§ 18. Fórmula de Taylor

Supongamos que la función $f(x)$ está definida en el entorno del punto x_0, tiene en dicho entorno derivadas hasta de $(n-1)$-ésimo orden inclusive y sea que existe $f^{(n)}(x_0)$. Entonces

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\text{ cuando } x\to x_0$$

o bien, de forma más corta

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\ x\to x_0. \qquad (1)$$

El polinomio

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (2)$$

lleva el nombre de *polinomio de Taylor de la función $f(x)$ en el punto* x_0 y la función

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x), \qquad (3)$$

término residual de n-ésimo orden de la fórmula de Taylor.

La fórmula (1) se denomina *fórmula de Taylor de n-ésimo orden para la fórmula* $f(x)$ en el entorno del punto x_0 *con término residual en la forma de Peano*: también la llaman *fórmula local de Taylor*.

La función $f(x)$, que en el punto x_0 tiene derivadas del n-ésimo orden inclusive, se representa de la única manera en la forma

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{4}$$

con la particularidad de que los coeficientes del desarrollo (4) se determinan con las fórmulas

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{5}$$

Si $x_0=0$ la fórmula (1) toma la forma

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0, \tag{6}$$

y recibe el nombre de *fórmula de Maclaurin*.

Sea que la función $f(x)$ tiene en el entorno del punto $x_0=0$ derivadas de todos los órdenes (es infinitamente derivable). Entonces:

a) si f es una función par, con cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}); \tag{7}$$

b) si f es una función impar, con cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}). \tag{8}$$

Las fórmulas de Taylor en el entorno del punto $x_0=0$ (fórmulas de Maclaurin) toman para las funciones elementales la forma:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

o bien

$$e^x=\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}+o(x^n); \tag{9}$$

$$\operatorname{sh} x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

o bien

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \tag{10}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

o bien

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \tag{11}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

o bien

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \tag{12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

o bien

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \tag{13}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n),$$

o bien

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} C_{\alpha}^{k} x^k + o(x^n), \tag{14}$$

donde $C_{\alpha}^{0} = 1$, $C_{\alpha}^{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$; en particular

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \tag{15}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n); \tag{16}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n),$$

o bien

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+o(x^n), \qquad (17)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n). \qquad (18)$$

Ejemplo 1. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^n)$ la función

$$f(x)=\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$$

△ Ya que

$$f^{(k)}(x)=2^k\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$$

y

$$f^{(k)}(0)=2^k\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(2k+1),$$

según la fórmula (6), obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(2k+1)\cdot x^k+o(x^n). \ ▲$$

Si

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n),$$

entonces

$$f(bx)=\sum_{k=0}^{n}b^ka_kx^k+o(x^n).$$

Ejemplo 2. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^n)$ la función $f(x)$ si:

1) $f(x)=e^{\frac{1}{2}x+2}$. 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$. 4) $f(x)=\ln(5-4x)$.

△ 1) Empleando el desarrollo (9) y la igualdad

$$e^{\frac{1}{2}x+2}=e^2\cdot e^{\frac{1}{2}x},$$

obtenemos

$$e^{\frac{1}{2}x+2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^2}{2^k k!}x^k+o(x^n).$$

2) Ya que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1+(-1)x)^{-1/2},$$

aplicando la fórmula (14) con $\alpha=-1/2$, hallamos

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{-1/2}^k x^k+o(x^n),$$

donde

$$C_{-1/2}^k=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^k+o(x^n). \qquad (19)$$

3) Haciendo uso de la igualdad

$$\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3\left(1+\frac{2}{3}x\right)}$$

y del desarrollo (15), obtenemos

$$\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k+o(x^n),$$

es decir,

$$\frac{1}{2x+3}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{3^{k+1}}x^k+o(x^n).$$

4) De la igualdad

$$\ln(5-4x)=\ln 5+\ln\left(1-\frac{4}{5}x\right)$$

y de la fórmula (18) se desprende que

$$\ln(5-4x)=\ln 5-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^k x^k+o(x^n). \ \blacktriangle$$

Si

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \tag{20}$$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \tag{21}$$

entonces,

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \tag{22}$$

$$f(x)\,g(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \tag{23}$$

donde $c_k=\sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}$.

Ejemplo 3. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^n)$ la función $f(x)$ si:

1) $f(x)=(x+5)\,e^{2x}$. 2) $f(x)=\ln\frac{3+x}{2-x}$.

3) $f(x)=e^x\ln(1+x)$, $n=4$.

△ 1) Empleando la igualdad $f(x)=xe^{2x}+5e^{2x}$ y la fórmula (9), obtenemos

$$f(x)=x\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^k}{k!}+o(x^{n-1})\right)+5\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}x^k+o(x^n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^{k+1}}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{5\cdot 2^k}{k!}x^k+o(x^n).$$

Ya que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^{k+1}}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}x^k,$$

entonces

$$f(x)=5+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{5\cdot 2^k}{k!}\right)x^k+o(x^n)=$$

$$=5+\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)\,x^k+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)\,x^k+o(x^n).$$

2) De la igualdad

$$f(x)=\ln\frac{3}{2}+\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

y de las fórmulas (17), (18) se desprende que

$$f(x)=\ln\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}\right)x^k+o(x^n).$$

3) Empleando los desarrollos (9) y (17), obtenemos

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)=$$

$$=x+\left(-\frac{1}{2}+1\right)x^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x^3+$$

$$+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)x^4+o(x^4)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^4). \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 4. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^n)$ la función $f(x) = \cos x + |x|^3$. ¿Qué valores puede tomar n?

$\triangle$ Sea $g(x) = |x|^3$: entonces $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ y $g'''(0)$ no existe (§ 15, ejemplo 9). Por esta razón, los desarrollos de $g(x)$ según la fórmula de Maclaurin hasta $o(x^n)$ con $n = 1$ y $n = 2$ tienen, respectivamente, la forma

$$g(x) = o(x) \quad \text{y} \quad g(x) = o(x^2)$$

mientras que el desarrollo de la función $g(x)$ hasta $o(x^3)$, según la fórmula de Maclaurin, no existe. Haciendo uso del desarrollo de la función $\cos x$ hasta $o(x^n)$, según la fórmula de Maclaurin con $n = 1$ y $n = 2$ (fórmula (13)), obtenemos el desarrollo de $f(x)$ con $n = 1$ y $n = 2$:

$$f(x) = 1 + o(x),$$

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

El desarrollo según la fórmula de Maclaurin de la función $f(x)$ hasta $o(x^3)$ no existe. $\blacktriangle$

Durante el desarrollo según la fórmula de Taylor de una fracción racional, ésta se representa, por regla, en forma de la suma de un polinomio y fracciones elementales.

Ejemplo 5. Según la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^n)$ la fracción racional

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+x-12}.$$

△ Como $f(x)$ no es una fracción propia, dividiendo el numerador entre el denominador, representamos $f(x)$ en la forma

$$f(x)=1+\frac{17-x}{(x+4)(x-3)}=1-\frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-3}.$$

Transformemos $f(x)$ de forma que sea posible emplear los desarrollos (15) y (16):

$$f(x)=1-\frac{3}{4\left(1+\frac{x}{4}\right)}-\frac{2}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}.$$

De aquí, obtenemos

$$f(x)=1-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{4^k}-\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^k}+o(x^n)$$

o bien

$$f(x)=-\frac{5}{12}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3(-1)^{k+1}}{4^{k+1}}-\frac{2}{3^{k+1}}\right)x^k+o(x^n). \ \blacktriangle$$

Ejemplo 6. Según la fórmula de Maclaurin, desarrollen hasta $o(x^{2n+1})$ la función

$$f(x)=\frac{1}{x^4-3x^2-4}.$$

△ Representemos $f(x)$ en la siguiente forma:

$$f(x)=\frac{1}{(x^2-4)(x^2+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2+1}\right).$$

Hemos de advertir que no es necesario sustituir la fracción $\frac{1}{x^2-4}$ por la suma de las fracciones elementales de la forma $\frac{A}{x-2}$ y $\frac{B}{x+2}$. Habiendo escrito esta fracción en la forma $-\frac{1}{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$ y empleando los desarrollos (15), (16), obtenemos

$$f(x)=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}-\frac{1}{1+x^2}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{k+1}-\frac{1}{4^{k+1}}\right)\frac{x^{2k}}{5}+o(x^{2n+1}). \ \blacktriangle$$

Durante los desarrollos según la fórmula de Maclaurin de los productos de las funciones trigonométricas suele ser útil representarlos en forma de la suma de dichas funciones.

Ejemplo 7. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^{2n+1})$ la función $f(x)$ si:

1) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$. 2) $f(x) = \cos^3 x$.

△ 1) Como $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$, empleando la fórmula (13), obtenemos

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} 2^{4k-3}}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$

2) Empleando la igualdad $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, obtenemos

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{3(-1)^k}{4(2k)!}(3^{2k-1}+1)x^{2k} + o(x^{2n+1}). \ ▲$$

Si la función $f(x)$ está representada en la forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ y si son conocidos los desarrollos de las funciones g y h según la fórmula de Taylor en el entorno del punto $x = x_0$ hasta $o((x-x_0)^n)$, es decir, si se conocen los desarrollos

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$

con la particularidad de que $c_0 = h(x_0) \neq 0$, con el fin de hallar el desarrollo según la fórmula de Taylor de la función f, es posible aplicar el *método de los coeficientes indeterminados* que consiste en lo siguiente.

Sea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

el desarrollo buscado. Igualando los coeficientes de $(x-x_0)^k$, donde $k = 0, 1, \ldots, n$, en ambos miembros de la igualdad

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$

obtenemos un sistema de ecuaciones del que se pueden hallar los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Ejemplo 8. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, desarrollen hasta $o(x^5)$ la función $\operatorname{tg} x$.

△ Como $\operatorname{tg} x$ es una función impar y $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, entonces

$$\operatorname{tg} x = x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6).$$

Empleando la fórmula $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \cos x$ y los desarrollos (12) y (13), obtenemos

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) =$$

$$= (x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6))\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right).$$

Igualando los coeficientes de x^3 y x^5, hallamos

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_3, \quad \frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} - \frac{a_3}{2!} + a_5.$$

De este sistema obtenemos $a_3 = 1/3$, $a_5 = 2/15$. Por consiguiente,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6). \tag{24}$$

Señalemos que el desarrollo (24) puede obtenerse, asimismo, con la fórmula general (6). ▲

Sea $F(x) = f(\varphi(x))$ una función compuesta y sean conocidos los desarrollos de las funciones φ y f, o sea,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \tag{25}$$

$$f(w) = \sum_{k=0}^{n} a_k (w - w_0)^k + o((w - w_0)^n), \tag{26}$$

donde $w_0 = \varphi(x_0)$. Entonces, para hallar los coeficientes b_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) del desarrollo

$$F(x) = f(\varphi(x)) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

es preciso poner en la fórmula (26) $w = \varphi(x)$, sustituir la función $\varphi(x)$ por su desarrollo (25), efectuar las correspondientes operaciones matemáticas, con ello, conservando sólo los términos de la forma $b_k(x - x_0)^k$, donde $k = 0, 1, \ldots, n$. En particular, si

$$\varphi(x) = Ax^m, \; m \in \mathbb{N}, \; f(w) = \sum_{k=0}^{n} a_k w^k + o(w)^n.$$

entonces

$$f(\varphi(x)) = f(Ax^m) = \sum_{k=0}^{n} A^k a_k x^{mk} + o(x^{mn}).$$

Por ejemplo, de (15) y (19) se deduce que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}), \tag{27}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n+1}). \tag{28}$$

Ejemplo 9. Según la fórmula de Maclaurin, desarrollen hasta $o(x^3)$ la función $e^{x \cos x}$.

△ El desarrollo buscado debe tener la forma

$$e^{x \cos x} = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k + o(x^3).$$

Como $x \cos x = x + o(x)$, $(x \cos x)^k = x^k + o(x^k)$ con $k = 1, 2, \ldots$, en la fórmula

$$e^w = \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} + o(w^n),$$

donde $w = x \cos x$, hay que tomar $n = 3$. Con ello, la función w^k $(k = 1, 2, 3)$ se debe desarrollar, según la fórmula de Maclaurin, hasta $o(x^3)$. Empleando el desarrollo (13), obtenemos

$$w = x \cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4), \quad w^2 = x^2 + o(x^3), \quad w^3 = x^3 + o(x^3).$$

Por consiguiente,

$$e^{x \cos x} = \sum_{k=0}^{3} \frac{w^k}{k!} + o(w^3) = 1 + x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4) +$$

$$+ \frac{1}{2!}(x^2 + o(x^3)) + \frac{1}{3!}(x^3 + o(x^3)) + o(x^3) =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \quad ▲$$

Ejemplo 10. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^6)$ la función

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + \operatorname{sen} x}.$$

△ El desarrollo buscado debe tener la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{6} a_k x^k + o(x^6).$$

Por ello, hemos de desarrollar la función $\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$ según la fórmula de Maclaurin hasta $o(x^4)$. Como $\operatorname{sen} x = x + o(x)$, en la fórmula

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^k + o(z^n),$$

donde $z = \operatorname{sen} x$, hay que tomar $n = 4$.

Aplicando la fórmula (12), obtenemos

$$z = \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \quad z^2 = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + o(x^4),$$

$$z^3 = x^3 + o(x^4), \quad z^4 = x^4 + o(x^4).$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen} x} = 1 - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(x^2 - \frac{1}{3} x^4\right) - x^3 + x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{5}{6} x^3 + \frac{2}{3} x^4 + o(x^4)$$

y

$$f(x) = x^2 - x^3 + x^4 - \frac{5}{6} x^5 + \frac{2}{3} x^6 + o(x^6). \ ▲$$

Sea conocido el desarrollo de la derivada de la función f según la fórmula de Taylor en el entorno del punto x_0 hasta $o((x-x_0)^n)$, es decir, es conocido el desarrollo

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \text{ donde } b_k = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}.$$

Entonces existe $f^{(n+1)}(x_0)$ y, por ello, la función $f(x)$ se puede representar en la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n+1}) =$$

$$= f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} (x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1}),$$

donde

$$a_{k+1} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{b_k}{k+1}.$$

Por lo tanto,

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}+o((x-x_0)^{n+1}), \tag{29}$$

donde b_k son los coeficientes de la descomposición según la fórmula de Taylor de la función $f'(x)$.

Ejemplo 11. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^{2n+1})$ las funciones: 1) arctg x; 2) arcsen x.

△ 1) Como

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+o(x^{2n+1})$$

(fórmula (27)), según la fórmula (29) obtenemos

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2}). \tag{30}$$

Suponiendo que en la igualdad (30) $n=2$, hallamos

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^6). \tag{31}$$

2) Empleando el desarrollo (28), obtenemos

$$(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k}+o(x^{2n+1}),$$

de donde, según la fórmula (29), hallamos

$$\operatorname{arcsen} x=x+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!\,(2k+1)}x^{2k+1}+o(x^{2n+2}). \tag{32}$$

Con $n=2$, de la fórmula (32), obtenemos

$$\operatorname{arcsen} x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^6). \ ▲ \tag{33}$$

Según la fórmula de Taylor, el desarrollo de la función $f(x)$ en el entorno del punto x_0, sustituyendo $x-x_0=t$, se reduce, por regla, al desarrollo de la función $g(t)=f(x_0+t)$ según la fórmula de Maclaurin.

Ejemplo 12. Desarrollen la función

$$f(x)=\frac{3x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

de acuerdo con la fórmula de Taylor en el entorno del punto $x = -1$ hasta $o((x+1)^{2n})$.

△ Sea $x + 1 = t$; entonces

$$f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{3t}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{3}{2}t\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-1/2} = g(t).$$

Para obtener el desarrollo de la función $f(x)$, hay que desarrollar, de acuerdo con la fórmula de Maclaurin, la función $g(t)$ hasta $o(t^{2n})$.

Aplicando la fórmula (14), obtenemos

$$g(t) = \frac{3}{2}t + \frac{3}{2}t\sum_{k=1}^{n-1} C_{-1/2}^{k}(-1)^k\frac{t^{2k}}{4^k} + o(t^{2n}),$$

donde

$$C_{-1/2}^{k}(-1)^k = (-1)^k\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}.$$

Por lo tanto,

$$g(t) = \frac{3}{2}t + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{3(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!}t^{2k+1} + o(t^{2n}).$$

Sustituyendo t por $x+1$, obtenemos

$$f(x) = \frac{3}{2}(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{3(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!}(x+1)^{2k+1} + o((x+1)^{2n}). \ ▲$$

Ejemplo 13. Según la fórmula de Taylor, desarrollen en el entorno del punto $x = 2$ hasta $o((x-2)^n)$ la función $f(x) = \ln(2x - x^2 + 3)$.

△ Como $2x - x^2 + 3 = (3-x)(x+1)$, haciendo $x - 2 = t$, obtenemos

$$2x - x^2 + 3 = (1-t)(3+t) = 3(1-t)\left(1+\frac{t}{3}\right).$$

De aquí se desprende que

$$f(x) = g(t) = \ln 3 + \ln(1-t) + \ln\left(1+\frac{t}{3}\right).$$

Desarrollando la función $g(t)$ según la fórmula de Maclaurin hasta $o(t^n)$, obtenemos

$$g(t)=\ln 3-\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k3^k}+o(t^n).$$

Por consiguiente,

$$f(x)=\ln 3+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}-1\right)\frac{(x-2)^k}{k}+o((x-2)^n). \ \blacktriangle$$

Si la función $f(x)$ tiene en cierto entorno del punto x_0 derivadas de hasta el $(n+1)$-ésimo orden inclusive, para cualquier punto x de dicho entorno habrá tal punto ξ, yaciente entre x y x_0 ($x<\xi<$ $<x_0$, o bien $x_0<\xi<x$) que

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (34)$$

La fórmula (34) recibe el nombre de *fórmula de Taylor con término residual*

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (35)$$

en la forma de Lagrange.

Según la fórmula de Maclaurin desarrollen las funciones hasta $o(x^n)$ (18.1—18.4):

18.1. 1) e^{5x-1}. 2) $\operatorname{sen}(2x+3)$. 3) $\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)$.
4) $\frac{1}{1-2x}$. 5) $\frac{1}{3x+4}$. 6) $\frac{1}{\sqrt{1+4x}}$. 7) $\ln(ex+2)$.
8) 3^{2-x}. 9) $\frac{1}{(1-x)^2}$.

18.2. 1) $(x-1)e^{x/2}$. 2) $(x^2-x)e^{-x}$. 3) $\frac{x^2+3e^x}{e^{2x}}$.
4) $(2x+1)\sqrt{1-x}$. 5) $(2x-3)\ln(5x+6)$.
6) $\ln\frac{1+2x}{1-x}$. 7) $\ln\frac{2-3x}{3+2x}$.
8) $\ln(x^2+3x+2)$. 9) $\ln(2+x-x^2)$.

18.3. 1) $(1+x^2)\ln\sqrt{1+x}$. 2) $(x-1)(x+\ln(1+x))$.
3) $(1-x)\ln(1+x)-(1+x)\ln(1-x)$.
4) $x\sqrt[3]{4-4x+x^2}$. 5) $\frac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}}$.

6) $\ln \frac{x+4}{x^2-5x+6}$. 7) $\ln(6+11x+6x^2+x^3)$.

8) $\ln\left(\frac{2x^2-5x+2}{2}\right)^{1/x}$.

18.4. 1) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$. 2) $\frac{2x-3}{x+1}$. 3) $\frac{x^2+1}{2x-3}$.

4) $\frac{x^3}{x-1}$. 5) $\frac{2x+5}{x^2+5x+4}$. 6) $\frac{3x-1}{x^2+x-6}$.

7) $\frac{x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$. 8) $\frac{1-2x^2}{2+x-x^2}$. 9) $\frac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2}$.

De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen las funciones hasta $o(x^{2n})$ (18.5—18.6):

18.5. 1) $\operatorname{sh}(x/2)$. 2) $x \operatorname{ch} 3x$. 3) $x \operatorname{sen}^2 2x$. 4) $x \operatorname{ch}^2 x$.
5) $\operatorname{sen} x \cos 2x$. 6) $\operatorname{sen}^3 x$. 7) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} 2x$. 8) $\operatorname{sen}^3 x \cos x$.

18.6. 1) $\frac{x^4+1}{x^2+1}$. 2) $\frac{x^2}{3x^4-4}$. 3) $\frac{1}{3x^4+10x^2+3}$.

4) $\frac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1}$. 5) $\frac{x}{3}\ln\frac{x^2-1}{x^2-e}$.

6) $(1+2x)e^{-2x}-(1-2x)e^{2x}$. 7) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen las funciones hasta $o(x^{2n+1})$ (18.7—18.9):

18.7. 1) $\cos 3x$. 2) $x^2\cos^2 x$. 3) $\cos 3x \cos 5x$.
4) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x$. 5) $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x$. 6) $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} 5x$.

18.8. 1) $\operatorname{sh}^2 x$. 2) $\cos^4 x$. 3) $\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x$.
4) $\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x$. 5) $\cos^6 x + \operatorname{sen}^6 x$. 6) $\operatorname{sen}^8 x + \cos^8 x$.

18.9. 1) $\frac{x-1}{2-x^2-x^4}$. 2) $\frac{1}{x^4-8x^2+15}$. 3) $x\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$.

4) $\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2-x^2}}$. 5) $\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

6) $\ln\sqrt[3]{\frac{2+x^2}{x^4-3x^2+2}}$. 7) $\frac{1}{1-x+x^2-x^3}$.

18.10. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen las funciones hasta $o(x^{3n})$:

1) $\frac{1}{2x^6-10x^3+12}$. 2) $\frac{5x^6-11}{x^6-x^3-2}$. 3) $\frac{1}{1+x+x^2}$.

18.11. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen las funciones hasta $o(x^{3n+1})$:

1) $\frac{x}{(1+x^3)^2}$. 2) $\ln\sqrt{\frac{e-x^3}{1-ex^3}}$. 3) $\frac{5x^3+28}{14+5x^3-x^6}$.

Según la fórmula de Taylor desarrollen en el entorno del punto x_0, hasta $o((x-x_0)^n)$, las funciones (18.12—18.16):

18.12. 1) $1/x$, $x_0=2$. 2) $\sqrt{x}$, $x_0=1$.
3) $\operatorname{sen}(2x-3)$, $x_0=1$. 4) xe^{2x}, $x_0=-1$.

5) x^2e^{-2x}, $x_0=-1$. 6) $(x^2-1)\,e^{2x}$, $x_0=-1$.
7) sen $(x+1)$ sen $(x+2)$, $x_0=-1$.

18.13. 1) $\ln(2x+1)$, $x_0=1/2$. 2) $\log_3\sqrt[3]{3x-\frac{1}{3}}$, $x_0=3$.
3) $\ln(2+x-x^2)$, $x_0=1$. 4) $\ln(x^2-7x+12)$, $x_0=1$.

18.14. 1) $\ln\sqrt[3]{7x-2}$, $x_0=1$.
2) $\ln\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{5-x}}$, $x_0=3$. 3) $x\ln(2-3x+x^2)$, $x_0=-2$.
4) $\ln\dfrac{(x-1)^{x-2}}{3-x}$, $x_0=2$. 5) $\dfrac{2x+1}{x-1}\ln x$, $x_0=1$.
6) $\ln(5+14x+14x^2+6x^3+x^4)$, $x_0=-2$.

18.15. 1) $\dfrac{2x-1}{x-1}$, $x_0=2$. 2) $\dfrac{(x-2)^2}{3-x}$, $x_0=2$.
3) $\dfrac{x}{4+x}$, $x_0=10$. 4) $\dfrac{x+5}{2x-4}$, $x_0=-\dfrac{1}{10}$.
5) $\dfrac{x^2+3x}{x+1}$, $x_0=1$. 6) $\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$, $x_0=3$.
7) $\dfrac{x+7}{x(2x+7)}$, $x_0=-2$.

18.16. 1) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+10x+25}$, $x_0=-2$. 2) $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-5x+6}$, $x_0=1$.
3) $\dfrac{x^2-5x+7}{x^2-9x+20}$, $x_0=3$. 4) $\dfrac{2x}{1-x^2}$, $x_0=2$.
5) $\dfrac{x^3-5x^2+4x+5}{x^2-5x+6}$, $x_0=1$. 6) $x\left(\dfrac{1}{(x-1)^3}-1\right)$, $x_0=2$.

Según la fórmula de Taylor desarrollen en el entorno del punto x_0, hasta $o((x-x_0)^{2n})$, las funciones (**18.17—18.19**):

18.17. 1) e^{x^2+2x-1}, $x_0=-1$.
2) $(x+3)\,e^{3x^2+18x}$, $x_0=-3$.
3) $(x+2)\ln(2x^2+8x+11)$, $x_0=-2$.
4) $(x-5)\ln(26-10x+x^2)$, $x_0=5$.

18.18. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$, $x_0=1$. 2) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x_0=-1$.
3) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$, $x_0=2$. 4) $\dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt[3]{x(2-x)}}$, $x_0=1$.
5) $\dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x_0=-1$.

18.19. 1) $\dfrac{x-1}{x^2-2x+5}$, $x_0=1$. 2) $\dfrac{x-1}{3x^2-6x+5}$, $x_0=1$.
3) $\dfrac{x-3}{x^2-4x+8}$, $x_0=2$.

Según la fórmula de Taylor desarrollen en el entorno del punto x_0, hasta $o((x-x_0)^{2n+1})$, las funciones (**18.20**)—(**18.23**):

18.20. 1) e^{2x^2+8x+3}, $x_0=-2$. 2) e^{2x^2-12x}, $x_0=3$.
3) 2^{x-x^2}, $x_0=1/2$. 4) $(x+3)\,e^{2x^2+8x+5}$, $x_0=-2$.
5) $(x+1)^2\,2^{x^2+2x}$, $x_0=-1$.
6) $x(x-2)\,2^{x^2-2x-1}$, $x_0=1$.
7) $(3x^2-6x+4)\,e^{2x^2-4x+5}$, $x_0=1$.

18.21. 1) $\operatorname{sen}^2(x-1)\cos(x-1)$, $x_0=1$. 2) $\operatorname{sen}\frac{9}{2}x\cos\frac{3}{2}x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$.
3) $\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(\operatorname{sen}x+\cos x)$, $x_0=-\frac{\pi}{4}$.
4) $(x^2-\pi x)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.
5) $\frac{x^2+x}{2x+1}\cos\pi x$, $x_0=-\frac{1}{2}$.

18.22. 1) $\log_2(3x^2-24x+50)$, $x_0=4$.
2) $(x+2)\ln(2-x^2-2x)$, $x_0=-1$.
3) $\log_3\sqrt[3]{\frac{2x-1}{3-2x}}$, $x_0=1$.
4) $(x^2+4x+2)\ln(-2x^2-8x-5)$, $x_0=-2$.

18.23. 1) $\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x+5}}$, $x_0=2$.
2) $\frac{x-1}{\sqrt{1+4x-x^2}}$, $x_0=2$. 3) $\sqrt{\frac{x}{2-x}}$, $x_0=1$.
4) $\frac{1-4x+4x^2}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$, $x_0=\frac{1}{2}$. 5) $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$, $x_0=\frac{3}{2}$.
6) $\frac{2x^2-8x+5}{x^2-4x+3}$, $x_0=2$.
7) $\frac{(x+1)^2}{(2x^2+4x+1)(x^2+2x+3)}$, $x_0=-1$.

18.24. Según la fórmula de Taylor desarrollen en el entorno del punto $x_0=1$ la función $2^{x^3-3x^2+3x}$ hasta $o((x-x_0)^{3n})$.

18.25. Según la fórmula de Taylor desarrollen en el entorno del punto $x_0=2$, hasta $o((x-2)^{2n+2})$, la función

$$\sqrt{x/(4-x)}-\sqrt{(4-x)/x}.$$

18.26. Según la fórmula de Taylor desarrollen en el entorno del punto $x_0=2$, hasta $o((x-2)^{3n+1})$, la función

$$(x-2)/\sqrt[3]{(x-4)(x^2-2x+4)}.$$

18.27. Según la fórmula de Taylor desarrollen en el entorno del punto $x_0 = 1$, hasta $o((x-1)^{4n+1})$, la función

$$\frac{1-\sqrt{2x-x^2}}{1-\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

18.28. Según la fórmula de Taylor desarrollen en el entorno del punto x_0, hasta $o((x-x_0)^{4n})$, las funciones:

1) $\operatorname{sen}(x^2-2x+3)$, $x_0=1$.

2) $\cos(x^2-4x+3)$, $x_0=2$.

3) $\operatorname{sen}(3x^2+6x+4)$, $x_0=-1$.

18.29. Según la fórmula de Taylor desarrollen en el entorno del punto x_0, hasta $o((x-x_0)^{4n+3})$, las funciones:

1) $\cos\left(\frac{8}{\pi}x^2-4x+\pi\right)$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

2) $\operatorname{sen}\left(\frac{4}{\pi}x^2-2x+\frac{3}{4}\pi\right)$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

3) $x\operatorname{sen}(x^2+2\sqrt{\pi}x)$, $x_0=-\sqrt{\pi}$.

4) $x\operatorname{sen}(x^2+2x+2)\cos(x^2+2x)$, $x_0=-1$.

18.30. Según la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^n)$ las funciones:

1) $x^3|x|+\cos^2 x$. 2) $\operatorname{sen}|x|^3+e^x$. 3) $|x|^{2k+1}$, $k\in\mathbb{N}$.

Se elige el mayor número n.

18.31. Hallen $f^{(k)}(0)$ si:

1) $f(x)=e^{-x^2}$, $k=6$.

2) $f(x)=1/(1+x+x^2)$, $k=32$.

3) $f(x)=1/(1-x^4)$, $k=60$.

18.32. Sea $P_n(x)$ un polinomio de un grado no mayor que n. Demuestren que

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

18.33. Representen la función $f(x)$ en forma de un polinomio por los grados $x-x_0$ si:

1) $f(x)=x^3$, $x_0=1$.

2) $f(x)=x^4+8x^3+24x^2+32x+17$, $x_0=-2$.

3) $f(x)=1+x+x^2+x^3$, $x_0=-1$.

4) $f(x)=(x^3-8)^2$, $x_0=2$.

18.34. Sea

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

Demuestren que

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (x - x_0)^{k-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right).$$

18.35. Sea

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

donde $0 < \theta < 1$ y supongamos que existe $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Demuestren que

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

18.36. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^2)$ las funciones:

1) $e^{\operatorname{tg} x}$. 2) $e^{\sqrt{1+2x}}$. 3) $\operatorname{ch}(\operatorname{sen} x)$. 4) $\cos(\operatorname{sh}(x/\sqrt{5}))$.

5) $(1 - x + x^2)^3$. 6) $\ln \cos x$.

18.37. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^3)$ las funciones:

1) $\dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$. 2) $\sqrt{1 + 2x - x^2} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^3}$.

3) $\sqrt[3]{1 - 3x \cos 2x}$. 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)$. 5) $e^{\operatorname{sen} x}$.

6) $\ln^3\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$. 7) $(1 + x)^{1/x}$.

8) $\sqrt[3]{1 + 3 \operatorname{sen} x}$. 9) $\ln(1 + \operatorname{arcsen} x)$.

18.38. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^4)$ las funciones:

1) $e^{x/\operatorname{sen} x}$. 2) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$. 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{sh} 3x)$.

4) $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)$. 5) $\dfrac{x}{e^x - 1}$. 6) $\sqrt{\cos x}$.

7) $\dfrac{x}{\operatorname{arcsen} x}$. 8) $\dfrac{x}{\operatorname{arctg} x}$. 9) $e^{x \operatorname{sen} x}$.

18.39. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin desarrollen hasta $o(x^5)$ las funciones:

1) $(1 - 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$. 2) $\ln(1 + x + x^2 + x^3)$.

3) $\dfrac{1}{\cos x}$. 4) $e^{x/\sqrt{1+x^2}}$. 5) $\ln \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

6) $\dfrac{1}{1 - \ln^2(1 + x)}$. 7) $(1 + x)^{\operatorname{sen} x}$.

18.40. De acuerdo con la fórmula de Taylor desarrollen la función $f(x)$ en el entorno del punto x_0 hasta $o((x-x_0)^n)$:

1) $f(x)=\operatorname{th} x,\ x_0=0,\ n=6.$

2) $f(x)=\dfrac{1-2x\sqrt{e}+ex^2}{\sqrt{-\ln(2x-x^2\sqrt{e})}},\quad x_0=\dfrac{1}{\sqrt{e}},\quad n=9.$

3) $f(x)=(6-\sqrt{1-10x^4})^{\cos 2x^3},\quad x_0=0,\ n=9.$

4) $f(x)=(x^2-1)^{1973},\quad x_0=1,\quad n=1973.$

18.41. Hallen tales números A y B que cuando $x\to 0$ sean válidas las igualdades asintóticas:

1) $Ae^x-\dfrac{B}{1-x}=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{6}x^3+o(x^3).$

2) $\operatorname{sen} x\,(A+B\cos x)=x+o(x^4).$

3) $A\arcsen x+B\operatorname{arctg} x=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{8}x^5+o(x^6).$

4) $\operatorname{tg} x=\dfrac{x+Ax^3}{1+Bx^2}+o(x^6).$

18.42. Con ayuda de la fórmula de Taylor (34) calculen aproximadamente (con una precisión hasta 10^{-3}):

1) $\sqrt[3]{127}$. 2) $\sqrt[4]{83}$. 3) $\sqrt[5]{250}$. 4) $\sqrt[3]{e}$. 5) $\operatorname{sen} 85°$.

6) $\cos 72°$. 7) $\ln 1{,}3$. 8) $\operatorname{arctg} 0{,}8$.

18.43. Estimen con ayuda de la fórmula de Taylor (34) el error absoluto de las fórmulas aproximadas:

1) $e^x\approx\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$

2) $\operatorname{sen} x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!},\quad |x|\leqslant 1.$

3) $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!},\quad |x|\leqslant 0{,}5.$

4) $\operatorname{tg} x\approx x+\dfrac{x^3}{3},\quad |x|\leqslant 0{,}1.$

5) $\ln(1+x)\approx x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4},\quad |x|\leqslant 0{,}1.$

$\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16},\quad 0\leqslant x\leqslant 0{,}2.$

18.44. Con ayuda de la fórmula de Taylor (34) calculen:

1) e con una precisión hasta 10^{-7}.
2) $\sqrt{10}$ con una precisión hasta 10^{-3}.
3) sen 1° con una precisión hasta 10^{-8}.
4) cos 5° con una precisión hasta 10^{-5}.

5) $\sqrt[3]{30}$ con una precisión hasta 10^{-4}.

6) log 11 con una precisión hasta 10^{-4}.

18.45. Demuestren que para todo $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$ se cumple la igualdad

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n},$$

donde $0 < \theta < 1$.

18.46. Demuestren que e es un número irracional.

18.47. Sean $f(x) \in C^2 [0; 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ y supongamos que existe un número M tal que para toda $x \in (0; 1)$ se verifica la desigualdad $|f''(x)| \leqslant M$. Demuestren que

$$|f'(x)| \leqslant M/2 \text{ con } x \in (0; 1).$$

18.48. Sea la función $f(x)$ dos veces derivable sobre $\mathbb{R}$ y sea $M_k = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty$ $(k = 0, 1, 2)$. Demuestren que $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

§ 19. Cálculo de los límites con ayuda de la fórmula de Taylor

Sea que se necesita hallar

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

donde $f(0) = g(0) = 0$. Suponiendo que las funciones f y g pueden desarrollarse según la fórmula de Maclaurin, limitémonos a los primeros términos, distintos de cero, del desarrollo de dichas funciones:

$$f(x) = ax^n + o(x^n), \quad a \neq 0,$$
$$g(x) = bx^m + o(x^m), \quad b \neq 0.$$

Si $m = n$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{ax^n + o(x^n)}{bx^n + o(x^n)} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

Si $n > m$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0; \tag{2}$$

si $m > n$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty. \tag{3}$$

Ejemplo 1. Hallen

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{sen} x}.$$

△ Las funciones en el numerador y denominador de la fracción son infinitésimas cuando $x \to 0$.

Como

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$
$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0,$$

el desarrollo del denominador de la fracción según la fórmula de Maclaurin, tiene la forma

$$\operatorname{arcsen} x - \operatorname{sen} x = \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Por ello, el numerador de la fracción se debe desarrollar según la fórmula de Maclaurin hasta $o(x^3)$. Haciendo uso de las fórmulas

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(x^3), \quad t \to 0,$$
$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0,$$

obtenemos

$$\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} = 1 + \frac{1}{2}(2\operatorname{tg} x) - \frac{1}{8}(2\operatorname{tg} x)^2 + \frac{1}{16}(2\operatorname{tg} x)^3 + $$
$$+ o(\operatorname{tg}^3 x) = 1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) =$$
$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

Tomando en consideración que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

con la fórmula de Maclaurin, hallamos el desarrollo del numerador de la fracción

$$\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2 = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Así, pues, la fracción se representa en la forma

$$\frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}, \quad x \to 0,$$

de donde se desprende que el límite buscado es igual a 2.▲

Ejemplo 2. Hallen

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x} - 2x}.$$

△ Empleando las fórmulas

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

hallamos el desarrollo del denominador de la fracción

$$\ln\frac{1+x}{1-x} - 2x = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Por ello, el numerador de la fracción debe desarrollarse hasta $o(x^3)$. Como

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

entonces

$$e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Advirtiendo que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3), \quad x \to 0,$$

obtenemos el desarrollo del numerador de la fracción

$$e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2} = -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Así, pues, la fracción dada se puede escribir en la forma

$$\frac{-\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}, \quad x \to 0,$$

de donde sigue que el buscado límite es igual a $-7/4$.▲

Ejemplo 3. Hallen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\operatorname{sen} x) - e^{x^2/2}}.$$

△ Empleando los desarrollos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0,$$

$$\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4), \quad t \to 0,$$

obtenemos

$$\operatorname{ch}(\operatorname{sen} x) = 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Tomando en consideración que

$$e^{x^2/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

hallamos el desarrollo del denominador de la fracción

$$\operatorname{ch}(\operatorname{sen} x) - e^{x^2/2} = -\frac{1}{4}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0.$$

El numerador de la fracción debe desarrollarse de acuerdo con la fórmula de Maclaurin hasta $o(x^4)$. Ya que

$$\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^3 + o(x^4) = \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x^3}{30\sqrt{5}} + o(x^4), \quad x \to 0,$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4), \quad t \to 0,$$

entonces

$$\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{75}\right) + \frac{1}{4!}\,\frac{x^4}{25} + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{10} - \frac{x^4}{200} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Empleando la fórmula

$$(1+t)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}t - \frac{2}{25}t^2 + o(t^2), \quad t \to 0,$$

obtenemos

$$\sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{10} - \frac{x^4}{50} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Así, pues,

$$\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{3}{200}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0$$

y, por ello, la fracción prefijada se representa en la forma

$$\frac{\frac{3}{200}x^4+o(x^4)}{-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}, \quad x\to 0,$$

de donde se desprende que el buscado límite es igual a $-3/50$.▲.

Ejemplo 4. Hallen

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+\frac{1}{6}x^3}{x-\operatorname{th}x}.$$

△ Ya que $\operatorname{th} x$ es una función impar y $\operatorname{th} x = x + o(x)$ cuando $x\to 0$,

$$\operatorname{th} x = x + a_3x^3 + o(x^4).$$

Empleando los desarrollos

$$\operatorname{sh} x = x+\frac{x^3}{6}+o(x^4),$$

$$\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

y la igualdad

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{th} x \operatorname{ch} x,$$

obtenemos

$$x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)=(x+a_3x^3+o(x^4))\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right).$$

Igualando en esta igualdad los coeficientes de x^3, hallamos

$$\frac{1}{6}=a_3+\frac{1}{2},$$

de donde $a_3=-1/3$ y, por lo tanto,

$$\operatorname{th} x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^4), \quad x-\operatorname{th} x=\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

Por esta razón, el numerador de la fracción debe desarrollarse hasta $o(x^3)$. Advirtamos que

$$(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'=1/\sqrt{1+x^2},$$

donde

$$1/\sqrt{1+x^2}=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3).$$

Por ello, (§ 18, fórmula (29)),

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$$

y el numerador de la fracción es $o(x^4)$. De este modo, la fracción se representa en la forma

$$\frac{o(x^4)}{\frac{x^3}{3}+o(x^4)},$$

de donde se deduce que el buscado límite es igual a cero.▲

Con frecuencia, la fórmula de Taylor se aplica para calcular los límites de la forma

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)},$$

donde

$$f(x)>0,\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=1,\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=\infty.$$

Primero analicemos el caso $x_0=0$ y supongamos que las funciones f y g se representan en la forma

$$f(x)=1+ax^k+o(x^k),$$
$$g(x)=1/(bx^k+o(x^k)),\quad x\to 0,$$

donde $a\neq 0$, $b\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$. Ya que

$$\lim_{x\to 0}(1+ax^k+o(x^k))^{1/(ax^k+o(x^k))}=e,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^k+o(x^k)}{bx^k+o(x^k)}=\frac{a}{b},$$

entonces,

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to 0}(1+ax^k+o(x^k))^{1/(bx^k+o(x^k))}=e^{a/b}. \qquad (4)$$

Si

$$f(x)=\frac{1+ax^k+o(x^k)}{1+a_1x^k+o(x^k)},$$
$$g(x)=\frac{1}{bx^k+o(x^k)}\ \text{con}\ x\to 0,$$

con ello $a\neq 0$, $a_1\neq 0$, $b\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}=e^{(a-a_1)/b}. \qquad (5)$$

Hemos de señalar que para calcular el límite de la función $(f(x))^{g(x)}$ con $x\to 0$ es posible, previamente, hallar el límite de su logaritmo, es decir,

$$\lim_{x\to 0}g(x)\ln f(x)$$

desarrollando las funciones $g(x)$ y $\ln f(x)$ según la fórmula de Maclaurin.

Ejemplo 5. Hallen

$$\lim_{x\to 0}(\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x)^{\operatorname{ctg} x^3}.$$

△ Ya que

$$\operatorname{ctg} x^3=\frac{1}{\operatorname{tg} x^3}=\frac{1}{x^3+o(x^3)},\quad x\to 0,$$

la función

$$f(x)=\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x$$

se debe desarrollar según la fórmula de Maclaurin hasta $o(x^3)$. Empleando los desarrollos

$$xe^x=x+x^2+o(x^2),\quad x\to 0,$$

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2}+o(t^3),\quad t\to 0,$$

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\quad x\to 0,$$

obtenemos

$$f(x)=1-\frac{2}{3}x^3+o(x^3),$$

$$(f(x))^{\operatorname{ctg} x^3}=\left(1-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right)^{1/(x^3+o(x^3))},\quad x\to 0,$$

de donde sigue que el buscado límite es igual a $e^{-2/3}$. ▲

Ejemplo 6. Hallen

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{x+\operatorname{sen} x}\right)^{1/(1-\cos x)}.$$

△ Empleando los desarrollos

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad \operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad x\to 0,$$

obtenemos

$$\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{x+\operatorname{sen} x}\right)^{1/(1-\cos x)}=\left(\frac{2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{2x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\right)^{1/(1-\cos x)}=$$

$$=\left(\frac{1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}\right)^{\frac{1}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}}$$

de donde se deduce que el buscado límite es igual a $e^{\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{12}\right)\right)^2}$, es decir, a $e^{5/8}$. ▲

Señalemos que si

$$f(x)=1+ax^n+o(x^n),\quad g(x)=\frac{1}{bx^m+o(x^m)},\quad x\to 0,$$

donde $a\neq 0$, $b\neq 0$, m, $n\in\mathbb{N}$ y $m\neq n$, entonces

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}=1 \text{ con } n>m; \tag{6}$$

si $m>n$ y $m-n$ es un número par,

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}=\begin{cases}+\infty, & ab>0,\\ 0, & ab<0;\end{cases} \tag{7}$$

si $m>n$ y $m-n$ es un número impar, entonces $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}$ no existe.

Ejemplo 7. Hallen

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(\operatorname{sen} x)+\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2\right)^{1/(x^3(\sqrt{1+2x}-1))}.$$

△ Empleando los desarrollos

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+o(t^5),\quad t\to 0,$$

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4),\quad \operatorname{arcsen} x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^4),$$

$$\sqrt{1+2x}=1+x+o(x),\quad x\to 0,$$

obtenemos

$$f(x)=\cos(\operatorname{sen} x)+\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2=$$
$$=1-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^4}{3}\right)+o(x^4)=$$
$$=1+\frac{3}{8}x^4+o(x^4),$$

$$g(x)=\frac{1}{x^3(\sqrt{1+2x}-1)}=\frac{1}{x^4+o(x^4)}.$$

Por consiguiente, el buscado límite

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3}{8}x^4+o(x^4)\right)^{1/(x^4+o(x^4))}=1. \ ▲$$

Al calcular el límite con la fórmula de Taylor en el punto extremo $x_0 \neq 0$ hay que hacer $t = x - x_0$ y reducir el problema al cálculo del límite en el punto $t = 0$. El caso $x \to \infty$ se reduce al caso $t = 0$ sustituyendo $x = 1/t$.

Si tenemos la indeterminación de una de las formas $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ella se debe reducir a la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Ejemplo 8. Hallen

$$\lim_{x \to 2} \left(\sqrt{3-x} + \ln(x/2)\right)^{1/\operatorname{sen}^2(x-2)}.$$

△ Haciendo $x - 2 = t$, obtenemos

$$\lim_{x \to 2} \left(\sqrt{3-x} + \ln(x/2)\right)^{1/\operatorname{sen}^2(x-2)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\sqrt{1-t} + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right)^{1/\operatorname{sen}^2 t}.$$

Ya que

$$\operatorname{sen}^2(t) = t^2 + o(t^2), \quad \sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2),$$

$$\ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$$

con $t \to 0$, entonces

$$\left(\sqrt{1-t} + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right)^{1/\operatorname{sen}^2 t} = \left(1 - \frac{t^2}{4} + o(t^2)\right)^{1/(t^2 + o(t^2))},$$

de donde se deduce que el buscado límite es igual a $e^{-1/4}$. ▲

Ejemplo 9. Hallen

$$\lim_{x \to +\infty} x^{7/4} \left(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}\right).$$

△ Haciendo uso de la igualdad

$$\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x} = x^{1/4}\left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x}} - 2\right)$$

y haciendo $1/x = t$, obtenemos

$$\lim_{x \to +\infty} x^{7/4} \left(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}\right) =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{(1+t)^{1/4} + (1-t)^{1/4} - 2}{t^2}.$$

Como

$$(1+t)^{1/4} = 1 + \frac{t}{4} - \frac{3}{32}t^2 + o(t^2),$$

entonces

$$(1+t)^{1/4}+(1-t)^{1/4}-2=-\frac{3}{16}t^2+o(t^2),\quad t\to+0,$$

de donde se desprende que el buscado límite es igual a $-3/16$.▲

Ejemplo 10. Hallen

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x \operatorname{arctg} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{arcsen} x}\right).$$

△ Empleando los desarrollos

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4),\quad \operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^4),$$

$$\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4),\quad \operatorname{arcsen} x = x+\frac{x^3}{6}+o(x^4),$$

obtenemos

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \operatorname{arctg} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{arcsen} x}=\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{arcsen} x-\operatorname{sen} x \operatorname{arctg} x}{\operatorname{sen} x \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} x \operatorname{arcsen} x}=$$

$$=\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\left(x+\frac{x^3}{6}\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\frac{x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)},$$

de donde sigue que el buscado límite es igual a 1. ▲

Hallen los límites (**19.1**—**19.18**):

19.1. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} 2x-2\operatorname{sh} x}{x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} 3x+\cos 3x-2}{x^4}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}-2\sqrt[4]{1-x}}{x}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcsen} x}{x^3}$.

19.2. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{\operatorname{sen} x-x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{arcsen} x-\operatorname{arcsen} 2x}{x^3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt{1-x}}$. 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x+\arcsen x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-x\operatorname{ctg} x}{x\operatorname{sen} x}$.

19.3. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x)}$.

19.4. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt[3]{1+3x+\dfrac{9}{2}x^2}}{x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-2\operatorname{sen} x+2x\cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-x}{\operatorname{tg}^3 x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen} x\ln\cos x}-(1+4x)^{1/4}+x-\dfrac{3}{2}x^2}{x\operatorname{sen} x^2}$.

19.5. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}+\ln(1-x)-1}{2-\sqrt{4+x^3}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\operatorname{sen} x+\ln\cos x-x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\operatorname{sh} x+\ln\cos x-x}{1-\sqrt[3]{1-x^3}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{2x}+\operatorname{sen} x)-3\arcsen x+\dfrac{5}{2}x^2}{\sqrt[3]{8+x^3}-2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\right)-\operatorname{tg}(x-2x^2)}{\sqrt{4+x^3}-2}$.

19.6. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\operatorname{sen} x-x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-\cos x^4}{\operatorname{tg} x-x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\ln(1-x)}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}\ln(1+x)-\dfrac{x}{x+1}}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}$.

19.7. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen}x}+\ln(1-x)-1}{\operatorname{arcsen}x-\operatorname{sen}x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^{x}+x^{2}}{\operatorname{arcsen}x-\operatorname{sen}x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)\cos x-e^{\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+2x^{2}}}{x-\operatorname{sen}x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}x}-\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)-1}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-x-\operatorname{ch}x}{\operatorname{sen}x-\operatorname{arctg}x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen}x}+\ln(1-\operatorname{sen}x)-1}{\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-e^{\operatorname{sen}x}+\dfrac{3}{2}x^{2}}{\operatorname{arcsen}x-\operatorname{tg}x}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}\ln(1-x)+\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)+\dfrac{3}{2}x^{2}}{\operatorname{tg}x-\operatorname{arcsen}x}$.

19.8. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+2x}-x(x+x^{2})}{x-\operatorname{arctg}x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)-\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+1}{\operatorname{sh}x-\operatorname{arctg}x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}(x/2)}-\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\dfrac{x^{2}}{4}}{\operatorname{arccos}x-\operatorname{arcctg}x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x+x^{2}}+\operatorname{sen}\ln(1-x)-e^{-7x^{2}/6}}{x-\operatorname{arctg}x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sh}2x}-\cos x-x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}\operatorname{sen}x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-e^{2x}}-\cos 2x+\ln(1+x)}{\operatorname{sen}x-\operatorname{arcsen}\operatorname{tg}x}$.

19.9. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{\operatorname{tg}x}-\operatorname{sen}^{2}x-x}{x+x^{2}-\operatorname{tg}x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-x \operatorname{ctg} x-\frac{1}{3} x^2}{x \cos x-\operatorname{sen} x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\sqrt{1-2x}-x}{x^2 \operatorname{tg} x-e^{-x^3}+1}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x-\ln(\operatorname{sen} x+\sqrt{1+x^2})}{\operatorname{tg} x-x \cos^2 x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{e^x-1}-\dfrac{1}{1-x}}{\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2 \operatorname{sen} x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)-\ln(x+\sqrt[3]{1+x^3})-\frac{x^3}{6}}{\operatorname{th}(x-x^3)-x}$.

19.10. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-\operatorname{ch} 2x-2x}{\operatorname{tg} 2x-2 \operatorname{sen} x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x-\frac{1}{6} x^2\right)-\operatorname{sh} x+\frac{2}{3} x^2}{\operatorname{sen} 2x-2x \cos x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x \cos x-\operatorname{sen} x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x+3 \cos x-3 \sqrt[3]{1+x}}{1+\ln(1+x)-e^x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 e^x-\ln(1+x^2)-\operatorname{arcsen} x^3}{x \operatorname{sen} x-x^2}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1+\operatorname{tg} x}-e^{\sqrt{1+2x}}}{\operatorname{sen}\frac{x^2}{7}-\frac{x}{3}\ln(1-x)}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-\sqrt{1+2x+2x^2}}{x+\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} 2x}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \operatorname{sen} x-x \cos x}{e^x+\ln(1-x)-1}$.

19.11. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x\sqrt{1+x}-1}{\operatorname{sen} x \operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\operatorname{sen} x-x \cos x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x-x^2}-\ln(1+\operatorname{sen} x)-1}{x \cos x-\operatorname{sh} x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln\cos x + x\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sen}\,(x^2/2) - \mathrm{sh}\,(x^2/2)}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}\,\mathrm{tg}\,x - x\cos\mathrm{sen}\,x}{\ln(1+x) - x\sqrt{1-x}}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arcsen}\,x - xe^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2} - \mathrm{tg}\,x}$.

19.12. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x} + e^{\mathrm{tg}\,x} - 2}{\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x} - \cos x - \dfrac{x^2}{3}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x - x\ln(1+x)} + \dfrac{3}{4}\,\mathrm{tg}\,x^2 - 1}{xe^x - \mathrm{arcsen}\,x - x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}\,2x + \ln(1-\mathrm{sen}\,x) - \mathrm{sen}\ln(1+x)}{(1-2x)^{-1/2} - e^x - x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-2x)^{-1/2} - (1+2x)^{-1/2} - \mathrm{arctg}\,2x}{e^{-x} + \ln(1+\mathrm{arcsen}\,x) - 1}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(e^{\mathrm{sen}\,x} + \ln(1-x) + \dfrac{x^3}{3}\right)}{\ln\mathrm{ch}\,x - \dfrac{x^2}{2}}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}\,\mathrm{arctg}\,x - \mathrm{tg}\,x}{e^{\mathrm{sh}\,x} - (1+2x)^{1/2} - x^2}$.

19.13. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{x^2/3}}{\ln(1+3x^2) - 3x^2\cos x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sqrt{1+x^2} - x) + \mathrm{tg}\,x}{x(\mathrm{ch}\,x - e^{x^2})}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\ln(e+x)} - e^{x/(3e)} + \dfrac{x^2}{3e^2}}{x\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sen}\,x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\mathrm{sen}\,x} - \sqrt{1+x^2} - \mathrm{arcsen}\,x}{\mathrm{sh}\,(x-x^2) - \ln\sqrt{1+2x}}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ch}\,\dfrac{2x}{2+x^4} + \cos\dfrac{2x}{2-x^4} - 2e^{x^4/2}}{\mathrm{tg}\sqrt{1+x^4} - \mathrm{tg}\sqrt{1-x^4}}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1+\cos x} - e^{2+x^2} + \dfrac{3}{2}\,e^2\,\mathrm{sen}\,x^2}{\ln(1+x^2) - (\mathrm{arctg}\,x)^2}$.

19.14. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\operatorname{sen} 2x)-2x+2x^2}{\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{arcsen} x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{8}x^2-1}{e^x-\sqrt{1+2x}-x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-e^{\operatorname{tg} x}+6x^3+x^2}{\ln(1+x)-\operatorname{arctg} x+\dfrac{x^2}{2}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} 2x-(1+3x)^{-1/3}-x}{\dfrac{1}{2}x^2+\ln(1+\operatorname{tg} x)-\operatorname{arcsen} x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x/(1-x)}-\operatorname{sh} x-\cos x}{\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}-2}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\operatorname{ch} x-e^{\operatorname{arcsen} x}}{\operatorname{tg} x+\sqrt[3]{1-3x}-2\cos x+1}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+\cos 2x}-e^{\operatorname{tg} x}+2x^2}{2\operatorname{sen} x-2\ln(1+x)-x^2}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}\operatorname{sen} x^3+\operatorname{sen}\operatorname{sh} x^3}{\dfrac{x^2}{2}\sqrt{1-x}+\ln(1+x)-x\cos x}$.

19.15. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x^2}{e^{\operatorname{arcsen} x}-e^{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{3}x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}+\operatorname{ch}\dfrac{x}{\sqrt{3}}-1}{\operatorname{sh} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{arctg}\operatorname{sen} x-\operatorname{tg}\operatorname{sh} 3x}{\sqrt{1+x}\operatorname{sen} x^3-x^2\ln\left(1-\dfrac{16}{9}x\right)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{1+x^3}-\operatorname{sen} 1}{\sqrt[5]{1-2x\ln\cos x}-1}$.

19.16. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{\operatorname{tg}^4 x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+\ln(1-\operatorname{sen} x)-1}{\sqrt[3]{8-x^4}-2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\cos x+\dfrac{x^2}{2}\right)}{e^{-x^2/2}-\cos x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x/(1+x)} - \cos(1-e^{-x}) - \operatorname{arctg} x}{x^4}$.

19.17. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(xe^{x}) + \operatorname{sen}(xe^{-x}) - 2x - \frac{2}{3}x^3}{x^5}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x\cos x) + x\ln\left(1+\frac{2}{3}x^2\right) - x}{\sqrt{1+x^5}-1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2/6}}{x^2\ln(1+x) - (\operatorname{tg} x^3)\cos \operatorname{sh}(x/2)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x + x\operatorname{sen} x) - \frac{x^2}{2}e^{x}}{\frac{x}{2}\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{1+\frac{x^2}{3}} - \operatorname{sen}(x/2) - 1}$.

19.18. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos x} - e\sqrt[3]{1-4x^2}}{\frac{1}{x}\arcsen 2x - 2\operatorname{ch} x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sqrt{1+2x} - \operatorname{tg} x) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2}{xe^{x^2} - \operatorname{sen} x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x} - e^{-x} + x^2\sqrt[3]{1+x}}{\operatorname{sen}^2 x - \ln \operatorname{ch}^2 x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) + \frac{1}{2}\operatorname{sh} x^2 - x}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{sen} x}}$.

19.19. Hallen los números $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que exista el límite finito

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x^n} - \cos x^2}{x^8}.$$

Hallen los límites (**19.20**—**19.42**):

19.20. $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{1/\operatorname{sen}^2 x}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} 3x}\right)^{1/x^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^{x^2}}{\operatorname{ch} 3x}\right)^{1/x^2}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln(e+x) - \dfrac{x}{e}\right)^{1/\operatorname{sen}^2 x}$.

19.21. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\right)^{1/x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\sqrt{1+x^2}+x)}{x}\right)^{1/x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen} x}\right)^{1/x^2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x}\right)^{1/x^2}$.

19.22. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2(\sqrt{1+x}-1)}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{\ln \operatorname{ch} x}\right)^{1/x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}e^{x/(1+x)}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^{1/\operatorname{arctg} x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} 3x+\cos 4x-\cos 2x}{\ln\sqrt{1+3x}-\ln\sqrt{1-3x}}\right)^{1/\operatorname{sen} x}$.

19.23. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+6\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}\right)^{2(\operatorname{ch} x-1)/x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^2-(1+2x)^{1/x}}{2xe^2}\right)^{1/x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{2\sqrt{1+2x}-2\sqrt[3]{1+3x}}\right)^{1/x}$.

19.24. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x}+\ln(1-x))^{1/x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}(x/3)+2-\sqrt{1+x})^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{3}\operatorname{sen} x}+\sqrt[3]{1-\operatorname{tg} x}-1\right)^{1/\ln(1+x^2)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{e}(1+x)^{1/x}+\frac{2x}{4+5x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

19.25. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{e^x-1-\frac{x^2}{2}}\right)^{1/x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x\operatorname{sh} x}{\ln(1+x^2)}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{1/x^2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x\operatorname{sen} x}{2\operatorname{ch} x-3}\right)^{1/x^2}$.

19.26. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\operatorname{sh} x}\right)^{1/\operatorname{sen}^2 x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2-\sqrt{1+x^2}}{\operatorname{ch} x-1}\right)^{1/x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}}{e^x-\ln(1+x)}\right)^{1/x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x^2}}\right)^{1/x^2}$.

19.27. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(\operatorname{arcsen} x)^2-x^2}{\operatorname{sen}^2(x^2/\sqrt{3})}\right)^{1/\operatorname{sen}^2 x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}-x}{x\operatorname{sen}(x^2/6)}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-(\operatorname{arctg} x)^2}{x^2\operatorname{sen}\dfrac{2}{3}x^2}\right)^{1/x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3\arccos(1-2x^2)-6x}{x^3}\right)^{1/x^2}$.

19.28. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2e^{x-x^2}-2}{2x-x^2}\right)^{(\operatorname{sen} x)/x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{sh} x}\right)^{1/\operatorname{arcsen} x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sh}(x+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x+\operatorname{arcsen} x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

19.29. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{x}{\ln(e^2-xe^2)}\right)^{1/x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arcsen} 5x-\operatorname{arcsen} 3x-\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/\ln\cos 3x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x+x^3)-\operatorname{sh}(x+2x^3)}{x}\right)^{1/(2\ln(1+x^2)-\ln^2(1+x))}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}(2x+x^3)-\operatorname{th}(x+2x^3)}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2})}$.

19.30. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+\dfrac{xe^x}{1-x}-x\right)^{1/x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+2x+x^3}-\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{1/x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{x-2}+\ln(e+xe^{x+1})\right)^{1/x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2+x}+\operatorname{sen}\ln(1+x)\right)^{1/x^3}$.

19.31. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(x-\ln(1+x)+\cos(xe^{-x}))^{1/x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\operatorname{sen} x}-e^{2x-x^2}+e^{\operatorname{tg} x})^{1/x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg} x\right)^{1/\operatorname{arcsen} x^3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}-x}{\sqrt{1+x^3}-\ln(1+x^2)}\right)^{1/x^2}$.

19.32. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{8+x^3}-\cos x^2\right)^{1/\operatorname{arcsen} x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-x+e^{\operatorname{arctg} x}-1\right)^{1/\operatorname{sen}^2 x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{2}x^2+\sqrt[3]{1+3\operatorname{sen} x}+\ln(1-x)\right)^{1/\operatorname{sh}^2 x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1-3x\cos 2x}+4x^2+\dfrac{x}{1+3x}\right)^{1/(\operatorname{arcsen} x)^2}$.

19.33. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\operatorname{tg} x}+\ln(1-x)\right)^{\operatorname{ctg} x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{8}x^2\right)^{\operatorname{ctg} x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1-2x+3x^2}+x(1-\operatorname{sh} x)\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\operatorname{sen} x}-\dfrac{x^2}{2}+\cos x-\sqrt{1+2x}\right)^{1/\operatorname{tg} x^3}$.

19.34. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(1-x)+e^{x\cos x}\right)^{1/(x^2(\sqrt{1+3x}-1))}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x+\operatorname{sen}\dfrac{2x}{\pi}\right)^{1/(\sqrt{1+2x^2}-1)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{th}(xe^{x})+\dfrac{1}{2}\ln(1-2x)\right)^{1/x^2}$.

19.35. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{1-x}+\cos x+x^2\right)^{1/\operatorname{sen} x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\operatorname{arctg} x-\operatorname{sh} 2x\right)^{1/\ln^3(1-x)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\operatorname{sen} x}-\dfrac{x^2}{2}-x\cos x\right)^{1/\ln^3\left(1-\frac{x}{2}\right)}$.

19.36. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+\operatorname{tg} x}-\dfrac{x}{3}e^{-x/3}\right)^{1/(x\ln\cos x)}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{-x}}{1-x}+\dfrac{1}{2}\left(\ln\sqrt{1+2x}-\operatorname{tg} x\right)\right)^{1/(x(\cos x-1))}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x-x^2}-x\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{2}x}\right)^{1/(\operatorname{tg} x-x)}$.

19.37. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}+\dfrac{x^2}{2}-\operatorname{sen} x\right)^{1/(\operatorname{sh} x-\operatorname{arctg} x)}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\operatorname{sen} x+\operatorname{arctg} x)^{1/(\operatorname{sh} x-\operatorname{sen} x)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sqrt{1-x}\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\right)^{1/(\operatorname{tg} x-\operatorname{sh} x)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos(\operatorname{sen} x)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+4x^3\right)^{1/(\operatorname{tg} x-\operatorname{sh} x)}$.

19.38. 1) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{\operatorname{sen} 2x}-2x-2x^2)^{1/\operatorname{sen} x^4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{\operatorname{sen} x}+\ln(1-x)+\frac{x^3}{3}\right)^{1/x^4}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x+\operatorname{sen} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right)^{1/x^4}$.

19.39. 1) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x\operatorname{arcsen} x-x^2e^{x^2})^{1/\operatorname{sen}^2 x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg} x\operatorname{arctg} x-x^2\operatorname{ch}^2 x)^{1/(1-\cos x)^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\operatorname{th} x\ln\frac{1+x}{1-x}-2x^2\cos x^2\right)^{1/x^4}$.

19.40. 1) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sh} x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x^2\cos x^2)^{1/x^4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2\right)^{1/\operatorname{sen} x^4}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{ch} x+2\cos x}{3}+\frac{x^2}{6(1+x^2)}\right)^{1/\operatorname{arctg} x^4}$.

19.41. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2x}{\operatorname{sen} 2x}-\frac{2}{3}x^2\right)^{x^2/(x^2-\operatorname{arctg} x^2)}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos x+x^2\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^{(x+e)/\operatorname{arcsen} x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt[3]{1+3x}-\operatorname{tg}\operatorname{sen} x+x^2)^{1/(\operatorname{arctg} x-x\cos x)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-\frac{(1+x^2)^{1/x^2}-e^{\cos x}}{e}\right)^{1/(\sqrt{\operatorname{ch} 2x}-e^{x^2})}$.

19.42. 1) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(2x+x^2)+2\operatorname{arcsen}(xe^x)-2x)^{\operatorname{ctg}^3 x+\frac{1}{3x^3}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{arcsen} x^3)^{e^x/(x\sqrt[3]{\cos x}-\operatorname{sen} x+\operatorname{tg}^3 x)}$.

19.43. Demuestren que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/x^2}(\arccos\operatorname{sh} x+x)^{\operatorname{ctg} x^2}=e^{-2/(3\pi)}.$$

Hallen los límites (**19.44—19.60.**):

19.44. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\ln(1+x)}{x^2}-\dfrac{2}{(x+1)\operatorname{sh}x}\right)^{\operatorname{ctg}x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6}{\ln(1+3\operatorname{sen}^2 x)}-\dfrac{4}{\ln(2-\cos 2x)}\right)^{1/x^2}$.

19.45. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{ch}x)^{x^2(\operatorname{tg}(1/x)-\operatorname{arctg}(1/x))}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2/3}\left(\dfrac{x}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x^4}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4+x^2+1}{x^4-x^2-1}\right)^{x^4\operatorname{sen}^2(1/x)}$.

19.46. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}+\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}\dfrac{2}{x}\right)^{x^2+\operatorname{sen}3x}$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln(1+x)-x\ln x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x}\right)^{x^2\operatorname{arctg}x}$.

19.47. $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{sh}x-\ln(x+\sqrt{1+x^2}))^{1/\ln x}$.

19.48. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x\right)^{\operatorname{tg}x}$.

19.49. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(e^{x-1}-\ln x)^{1/(\operatorname{sen}(x-1)+\cos(x-1)-x)}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}(e^{\operatorname{sen}(x-1)}-\ln x)^{\operatorname{ctg}^2(x-1)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\ln x\right)^{1/(\cos^2 x\operatorname{sen}^2(1-x))}$.

19.50. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(x-\ln x)^{1/(\cos^2 x\operatorname{sen}^2(1-x))}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}(2^{x-1}-x^x\ln 2)^{1/(\operatorname{sen}(x-1)-\cos(1-x)+x)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1+0}(\ln(x^2-x)-\ln(x-1)+e^{1-x})^{1/\operatorname{arcsen}(x-1)^2}$.

19.51. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)^{1/\operatorname{sen}(x-1)}$.

19.52. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{(x-1)/x}-\sqrt[4]{4x-3}}{\operatorname{ch}(x-1)-\cos 2(x-1)}$.

19.53. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt[3]{x}-\operatorname{arcsen}(x-1)-3\cos(x-1)}{e^{x-1}-1-\ln x}$.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x}-\operatorname{sen}(x-1)-2\cos(x-1)}{\operatorname{arctg}(x-1)-\ln/x}$.

19.54. 1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} \pi x)}{\ln(1+\ln x)}$.

2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-e^{\pi x-2x^2}}{\cos x}$. 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln \operatorname{ctg} x+2x-\frac{\pi}{2}}{(1-\operatorname{tg} x)^3}$.

19.55. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{x(1-x^2)^{1/2}-\cos x \ln(1+x)}{\ln \operatorname{sen} x-\ln x}$.

19.56. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{\operatorname{arcsen} x}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x \operatorname{tg} x}\right)$. 4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{(x+1)\operatorname{sh} x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$.

19.57. 1) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(1-x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left((2e)^{1/x}+e^{1/x}-2\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^3\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-x^2+\dfrac{x}{2}\right)$.

19.58. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[6]{x^6+x^5}+\sqrt[6]{x^6-x^5}-2x}{x\ln(1+x)-x\ln x-x\operatorname{sen}(1/x)}$.

19.59. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(e^{1/x}(x^2-x+2)-\sqrt{x^4+x^2+1}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}+1\right)e^{1/x}-\sqrt{x^{12}-x^7+2}\right)$.

19.60. 1) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[4]{x^5+x^4}-\sqrt[4]{x^5-x^4}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \left((x^3+x)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}-\sqrt[3]{x^6-3x^4+1}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^2-\dfrac{x}{2}-(x^3+x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+1}{x}\left(1-\dfrac{x^2+1}{x}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)$.

§ 20. Investigación de funciones

1. Condiciones de crecimiento y decrecimiento de las funciones. Para que la función $f(x)$, derivable sobre el intervalo $(a; b)$, *estrictamente crezca* sobre dicho intervalo es suficiente que la derivada $f'(x)$ sea positiva por doquier sobre $(a; b)$, es decir,

$$f'(x)>0, \quad x\in(a; b).$$

Para que la función $f(x)$, derivable en el intervalo $(a; b)$, *crezca* (*no decrezca*) sobre dicho intervalo es necesario y suficiente que la derivada $f'(x)$ sea no negativa por doquier en $(a; b)$, es decir,

$$f'(x) \geqslant 0, \quad x \in (a; b).$$

Por analogía, la condición suficiente del *decrecimiento estricto* de la función derivable $f(x)$, $x \in (a; b)$, es

$$f'(x) < 0, \quad x \in (a; b);$$

la condición necesaria y suficiente del *decrecimiento* es

$$f'(x) \leqslant 0, \quad x \in (a; b).$$

Ejemplo 1. Hallen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

1) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x + 1$.

2) $f(x) = \begin{cases} 1/e & \text{si } x < e, \\ (\ln x)/x & \text{si } x \geqslant e. \end{cases}$

3) $f(x) = \cos(\pi/x)$.

$\triangle$1) La función dada es por doquier derivable, con ello

$$f'(x) = 3x^2 - 60x + 225 = 3(x-5)(x-15).$$

Como $f'(x) > 0$ con $x \in (-\infty; 5)$ y $x \in (15; +\infty)$, y $f'(x) < 0$ con $x \in (5; 15)$, sobre los intervalos $(-\infty; 5)$ y $(15; +\infty)$ la función estrictamente crece, mientras que sobre el intervalo $(5; 15)$, estrictamente decrece.

2) La función es derivable por toda la recta numérica, con ello

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < e. \\ (1 - \ln x)/x^2 & \text{si } x \geqslant e, \end{cases}$$

Como $f'(x) \leqslant 0$ con cualquier x, la función dada es no creciente sobre todo el eje numérico. Sobre el intervalo $(-\infty; e)$ ella es constante, sobre el intervalo $(e; +\infty)$, estrictamente decrece.

3) La función dada es par, por lo que es suficiente hallar los intervalos de monotonía con $x > 0$. Resolviendo con $x > 0$ la desigualdad

$$f'(x) = \frac{\pi}{x^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} > 0,$$

obtenemos

$$0 < \pi/x < \pi \text{ o bien } 2\pi k < \pi/x < \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N},$$

de donde

$$x > 1 \text{ o bien } 1/(2k+1) < x < 1/(2k); \quad k \in \mathbb{N}.$$

Así, pues, sobre los intervalos $(1; +\infty)$ y $(1/(2k+1); 1/(2k))$, $k \in \mathbb{N}$, la función estrictamente crece. Sobre los intervalos $(1/2k); 1/(2k-1))$, $k \in \mathbb{N}$, es evidente que es cierta la desigualdad $f'(x) < 0$ y, por ello, sobre estos intervalos la función estrictamente decrece. Si $x < 0$, haciendo uso de la paridad de la función, obtenemos que sobre los intervalos $(-1/(2k); -1/(2k-1))$, $k \in \mathbb{N}$, la función estrictamente crece, en tanto que sobre los intervalos $(-\infty; -1)$ y $(-1/(2k+1); -1/(2k))$, $k \in \mathbb{N}$, estrictamente decrece.

Hay que prestar atención en que la función dada no es monótona en ningún entorno del punto $x = 0$. Cualquier entorno de este punto contiene un conjunto numerable de intervalos de crecimiento y un conjunto numerable de intervalos de decrecimiento de la función dada. ▲

2. Extremos de una función. El punto x_0 se denomina *punto del máximo local* de la función $f(x)$ si existe un entorno del punto x_0 en el que para todos sus puntos es cierta la desigualdad

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Si para todas las $x \neq x_0$ de cierto entorno del punto x_0 es cierta la desigualdad estricta

$$f(x) < f(x_0),$$

x_0 lleva el nombre de *punto del máximo local escricto* de la función $f(x)$.

Por analogía, si en cierto entorno del punto x_0 se verifica la desigualdad

$$f(x) \geqslant f(x_0),$$

x_0 lleva el nombre de *punto del mínimo local*; si para todas las $x \neq x_0$ de cierto entorno del punto x_0 es cierta la desigualdad estricta

$$f(x) > f(x_0),$$

x_0 lleva el nombre de *punto del mínimo local estricto.*

Para abreviar la palabra «local» con frecuencia se omite y, simplemente, se escribe «punto del mínimo» o bien «punto del máximo estricto».

Los puntos del máximo y del mínimo de la función reciben el nombre de *puntos del extremo*, mientras que los valores de la función en estos puntos, sus *extremos.*

P. ej., para las funciones $y = |x|$ e $y = 1 - x^2$, el punto $x = 0$ es el punto del extremo ectricto, con la particularidad de que para la primera función es el punto del mínimo estricto, mientras que para la segunda, punto del máximo estricto. Para la función $y = \operatorname{sign} x$ cada punto $x \neq 0$ es tanto punto del máximo no estricto, como punto del mínimo no estricto. La función $f(x) = \cos(\pi/x)$

tiene un conjunto numerable de puntos del extremo estricto $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, con ello los puntos x_{2k}, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, son los puntos del máximo, en tanto que los puntos x_{2k+1}, $k \in \mathbb{Z}$, los puntos del mínimo. Los extremos de esta función son iguales

$$f(x_n) = f(1/n) = (-1)^n.$$

Condiciones necesarias del extremo. Si x_0 es el punto del extremo de la función $f(x)$, entonces o $f'(x_0) = 0$, o bien $f'(x_0)$ no existe.

Estas condiciones no son suficientes. En efecto, para la función $f(x) = x^3$ la derivada en el punto $x = 0$ es nula, mientras que para la función

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

la derivada en el punto $x = 0$ no existe, además ni para $f(x)$ ni para $g(x)$, evidentemente, $x = 0$ es punto del extremo.

Los puntos en los que la función está definida, pero la derivada es nula o no existe, llevan el nombre de *puntos críticos*. Los extremos de la función han de buscarse entre sus puntos críticos.

Condiciones suficientes para el extremo estricto (con empleo de la primera derivada). Sea la función $f(x)$ derivable en cierto entorno del punto x_0 salvo, posiblemente, en el propio x_0 en el que, sin embargo, la función $f(x)$ es continua. Entonces, x_0 es el punto del máximo estricto si existe tal entorno del punto x_0 en el que

$$f'(x) > 0 \text{ con } x < x_0 \text{ y } f'(x) < 0 \text{ con } x > x_0. \qquad (1)$$

Cuando las condiciones (1) se verifican, se suele decir que, al pasar por el punto x_0, la derivada de la función cambia el signo más por el menos.

Pero, si

$$f'(x) < 0 \text{ con } x < x_0 \text{ y } f'(x) > 0 \text{ con } x > x_0, \qquad (2)$$

es decir, si la derivada, al pasar por el punto x_0, cambia su signo menos por el más, entonces x_0 es el punto del mínimo estricto.

Condiciones del extremo estricto (empleando las derivadas de órdenes superiores (sucesivas)). Sea que la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 derivadas hasta el orden n ($n \in \mathbb{N}$), inclusive. En tal caso, si

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ y } f^{(n)}(x_0) \neq 0, \qquad (3)$$

entonces con n par el punto x_0 es el punto del extremo esctricto, con la particularidad de que es punto del máximo si $f^{(n)}(x_0) < 0$, y es el punto del mínimo si $f^{(n)}(x_0) > 0$; cuando n es impar en el punto x_0 no hay extremo.

En particular, si

$$f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) \neq 0,$$

en el punto x_0 el máximo estricto tiene lugar cuando $f''(x_0) < 0$, y el mínimo estricto, cuando $f''(x_0) > 0$.

Ejemplo 2. Hallen los puntos del extremo de la función $f(x) = (x+1)e^{2x}$.

△ La función tiene derivada con cualquier $x \in \mathbb{R}$, con ello

$$f'(x) = e^{2x} + (x+1)\,2e^{2x} = (2x+3)\,e^{2x}.$$

Por consiguiente, la función sólo puede tener un extremo en el punto $x = -3/2$. Como $f'(x) < 0$ con $x < -3/2$ y $f'(x) > 0$ con $x > -3/2$, entonces $x = -3/2$ es el punto del mínimo estricto.▲

Ejemplo 3. Hallen los extremos de la función

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14.$$

△ Ya que

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3),$$

los puntos críticos de la función son $x = 2$ y $x = 3$. Los extremos sólo pueden existir en esos puntos. Ya que al pasar por el punto $x = 2$ la derivada cambia el signo más por el menos, en dicho punto la función tiene máximo. Al pasar por el punto $x = 3$ la derivada cambia el signo menos por el más, por lo que en el punto $x = 3$ la función tiene mínimo.

Este mismo resultado se puede obtener empleando la segunda derivada. Como $f''(x) = 12x - 30$ y $f''(2) < 0$, en tanto que $f''(3) > 0$, en el punto $x = 2$ la función tiene máximo y en $x = 3$, mínimo.

Después de calcular los valores de la función en los puntos $x = 2$ y $x = 3$, hallamos los extremos de la función: el máximo $f(2) = 14$ y el mínimo $f(3) = 13$.▲

Ejemplo 4. Investiguen las siguientes funciones en lo que ataño al extremo:

1) $f(x) = \dfrac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$. 2) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

3) $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.

△ 1) La función está definida y es derivable con toda $x \in \mathbb{R}$, salvo en el punto $x = -1$. Calculemos su derivada

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2\,3\,(x+3)^2 - (x+3)^3\,2\,(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+3)^2\,(x-3)}{(x+1)^3}$$

y hallamos los puntos críticos $x = -3$ y $x = 3$. Es fácil advertir que existe un entorno del punto $x = -3$ en el que $f'(x) \geqslant 0$, es decir, al pasar por el punto $x = -3$ el signo de la derivada no varía. Por lo tanto, este punto crítico no es el punto del extremo. En el

punto $x = 3$ la función tiene mínimo estricto, ya que existe el entorno izquierdo de dicho punto en el que $f'(x) < 0$. Calculando el valor de la función con $x = 3$, hallamos el mínimo:

$$f(3) = 6^3/4^2 = 13{,}5.$$

2) La función está definida y es continua con toda $x \in \mathbb{R}$. Calculemos su derivada

$$f'(x) = \frac{(1-x)\,2\,(x-2)-(x-2)^2}{3\sqrt[3]{(1-x)^2\,(x-2)^4}} = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2\,(x-2)}},$$

$$x \neq 1, \quad x \neq 2.$$

En los puntos $x = 1$, $x = 2$ la derivada no existe. Así, pues, la función tiene tres puntos críticos: $x = 1$, $x = 4/3$, $x = 2$. Al pasar por el punto $x = 1$ la derivada no varía su signo, por ello el punto crítico $x = 1$ no es punto del extremo. Al pasar por el punto $x = 4/3$ la derivada cambia el signo menos por el más, por lo que en el punto $x = 4/3$ la función tiene mínimo. Al pasar por el punto $x = 2$ la derivada cambia el signo más por el menos, por ello $x = 2$ es el punto del máximo. El mínimo de la función es igual a $f(4/3) = -\sqrt[3]{4}/2$ y el máximo, $f(2) = 0$.

3) La función es derivable con toda $x \in \mathbb{R}$. Ya que $f'(x) = -\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x$ y la ecuación $\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x = 0$ sólo tiene una raíz $x = 0$, el extremo únicamente puede existir en el punto $x = 0$. Calculemos la segunda derivada

$$f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x.$$

Como $f''(x) = 0$, hallamos las siguientes derivadas en el punto $x = 0$:

$$f'''(x) = \operatorname{sh} x + \operatorname{sen} x, \quad f'''(0) = 0,$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x, \quad f^{\mathrm{IV}}(0) = 2.$$

Así, pues, la primera derivada no igual a cero ha sido la de un orden par. Por consiguiente, en el punto $x = 0$ la función tiene extremo. Como $f^{\mathrm{IV}}(0) > 0$, con $x = 0$ la función tiene mínimo igual $f(0) = 2$. ▲

Ejemplo 5. Investiguen, respecto al extremo, la función $y = f(x)$ prefijada con las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{t^3}{t^2+1}, \quad y = \frac{t^3-2t^2}{t^2+1}.$$

△ Las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son derivables con todos los valores del parámetro t, con ello, la derivada

$$x'_t = \frac{(t^2+1)\,3t^2-2t^4}{(t^2+1)^2} = \frac{t^2(t^2+3)}{t^2+1)^2}$$

es positiva con $t \neq 0$. Por ello, y'_x con $t \neq 0$ se puede hallar con la fórmula $y'_x = y'_t/x'_t$. Ya que

$$y'_t = \frac{(t^2+1)(3t^2-4t)-2t(t^3-2t^2)}{(t^2+1)^2} = \frac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2},$$

entonces,

$$y'_x = \frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)}, \quad t \neq 0.$$

La derivada y'_x es igual a cero sólo con $t = 1$, ya que $t^2 + t + 4 > 0$ con cualquier t. Por consiguiente, la función dada tiene dos puntos críticos: $x = 1/2$ (con $t = 1$) y $x = 0$ (con $t = 0$). Si x pertenece al entorno izquierdo del punto $x = 0$, el parámetro t pertenecerá al entorno izquierdo del punto $t = 0$, donde $y'_x > 0$. En cierto entorno derecho del punto $x = 0$, la derivada $y'_x < 0$. Por esta razón, en el punto $x = 0$ la función tiene máximo igual a $f(0) = 0$. De modo análogo, nos cercioramos que al pasar por el punto $x = 1/2$, correspondiente al valor $t = 1$, la derivada y'_x cambia el signo menos por el más. Así, pues, en el punto $x = 1/2$ la función tiene mínimo igual a $f(1/2) = y(1) = -1/2$.▲.

3. Valores máximo y mínimo de una función. Para una función continua sobre un segmento, en éste existe un punto en el que la función toma el valor máximo absoluto y un punto en el que la función toma el valor mínimo absoluto (*teorema de Weierstrass*).

Sea la función $f(x)$ continua sobre el segmento $[a; b]$ y que tiene en él k máximos locales en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Entonces, el valor máximo absoluto de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a; b]$ es igual al mayor de los números:

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k), f(b).$$

Por analogía, si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a; b]$ y tiene en él n mínimos locales en los puntos $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, su valor mínimo absoluto sobre dicho segmento será igual al menor de los números:

$$f(a), f(x'_1), f(x'_2), \ldots, f(x'_n), f(b).$$

Ejemplo 6. Hallen los valores máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$$

sobre el segmento $[-3; 6]$.

△ Hallemos los extremos de la función. Calculemos la derivada

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3).$$

Los dos puntos críticos $x = -2$ y $x = 3$ de la función $f(x)$ pertenecen al segmento $[-3; 6]$. Hallemos la segunda derivada

$f''(x) = 12x - 6$. Como $f''(-2) < 0$ y $f''(3) > 0$, en el punto $x = -2$ hay máximo, mientras que en el punto $x = 3$, mínimo. Calculemos los valores de la función en los puntos del extremo y en los extremos del segmento dado

$$f(-3) = 19, f(-2) = 36, f(3) = -89, f(6) = 100.$$

Así, pues,

$$\max_{[-3;\,6]} f(x) = \max\{19, 36, 100\} = 100,$$

$$\min_{[-3;6]} f(x) = \min\{19, -89, 100\} = -89. \blacktriangle$$

Ejemplo 7. Hallen los valores máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$$

sobre el segmento $[-1; 4]$.

$\triangle$ Ya que $f(x) \geqslant 0$ y $f(3) = 0$, el valor mínimo absoluto de la función dada es nulo. Con el fin de determinar el valor máximo absoluto, hallemos los máximos locales de la función sobre el intervalo $(-1; 4)$. Calculemos la derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-3)e^{-x} - (x-3)^2 e^{-x} = (x-3)(5-x)e^{-x} & \text{si } x < 0. \\ 2(x-3)e^{x} + (x-3)^2 e^{x} = (x-3)(x-1)e^{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En el punto $x = 0$ la derivada no existe. Los puntos críticos son $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$. Todos ellos pertenecen al segmento $[-1; 4]$. Al pasar por el punto $x = 0$ la derivada cambia el signo menos por el más es decir, en este punto se halla el mínimo de la función. Como ya fue señalado, en el punto $x = 3$ la función toma su valor mínimo absoluto. Al pasar por el punto $x = 1$ la derivada cambia el signo más por el menos, o sea, en ese punto la función tiene máximo. Calculemos los valores de la función en el punto del máximo y los extremos del segmento dado:

$$f(-1) = 16e, f(1) = 4e, f(4) = e^4.$$

Como $e^4 > 16e > 4e$, el valor máximo absoluto de la función es igual a e^4. De modo, que

$$\min_{[-1;\,4]} f(x) = f(3) = 0, \quad \max_{[-1;\,4]} f(x) = f(4) = e^4. \blacktriangle$$

Ejemplo 8. Demuestren la desigualdad:

1) $e^x \geqslant 1 + x$.

2) $x^\alpha \geqslant 1 + \alpha \ln x$ si $x > 0, \alpha > 0$.

$\triangle$ 1) Consideremos la función $f(x) = e^x - 1 - x$. Investiguémosla con relación a sus extremos. La ecuación $f'(x) = e^x - 1 = 0$ tiene una raíz $x = 0$. Como $f''(x) = e^x > 0$, en el punto $x = 0$

hay un mínimo que es el valor mínimo absoluto de la función. Por lo tanto, para toda x es cierta la desigualdad $f(x) \geqslant f(0)$, pero $f(0) = 0$ y, por ello, $e^x - 1 - x \geqslant 0$, es decir, $e^x \geqslant 1 + x$.

2) Consideremos la función $f(x) = x^\alpha - 1 - \alpha \ln x$. Investiguémosla con relación al extremo. La derivada

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{x}(x^\alpha - 1)$$

es nula sólo con $x = 1$. Como $\alpha > 0$, $f'(x) < 0$ con $x \in (0; 1)$ y $f'(x) > 0$ con $x \in (1; +\infty)$. Por consiguiente, en el punto $x = 1$ la función tiene mínimo que, simultáneamente, es el valor mínimo absoluto de la función. Así, pues, con toda $x > 0$ es cierta la desigualdad $f(x) \geqslant f(1)$, pero $f(1) = 0$, por lo que $x^\alpha - 1 - \alpha \ln x \geqslant 0$, o sea, $x^\alpha \geqslant 1 + \alpha \ln x$. ▲

4. Condiciones de convexidad. Puntos de inflexión. La función $f(x)$ se denomina *convexa hacia las y negativas* (o bien *cóncava hacia las y positivas*) en el intervalo $(a; b)$ si para cualesquiera puntos x_1 y x_2 de dicho intervalo y cualesquiera números $\alpha_1 \geqslant 0$ y $\alpha_2 \geqslant 0$ tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ es cierta la desigualdad

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \tag{4}$$

El sentido geométrico de convexidad hacia las y negativas de la función $f(x)$ en el intervalo $(a; b)$ consiste en que los puntos de cualquier arco del gráfico de la función estarán dispuestos no por

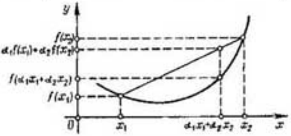


Fig. 84

encima de la cuerda que distiende dicho arco (fig. 84). Si la función es convexa hacia las y negativas en cierto intervalo, su gráfico también se llama convexo hacia las y negativas.

Si con esas mismas condiciones se verifica respecto a x_1, x_2, α_1, α_2 la desigualdad

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \tag{5}$$

la función $f(x)$ recibe el nombre de *convexa hacia las y positivas* (o bien *cóncava hacia las y negativas*).

En el caso cuando con $x_1 \neq x_2$ y $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, las desigualdades (4) y (5) son estrictas, la función $f(x)$ se llama *estrictamente con-*

vexa hacia las y negativas o bien, correspondientemente, ***estrictamente convexa hacia las y positivas*** sobre el intervalo $(a; b)$.

P. ej., la función $f(x) = x^2$ es estrictamente convexa hacia las y negativas por todo el eje numérico.

Todo intervalo sobre el que la función es (estrictamente) convexa hacia las y negativas se denomina intervalo de convexidad (estricta) hacia las y negativas de esta función; el intervalo sobre el que la función es (estrictamente) convexa hacia las y positivas, intervalo de convexidad (estricta) hacia las y positivas de dicha función. P. ej., para la función $f(x) = x^3$ el intervalo $(-\infty; 0)$ es el de convexidad estricta hacia las y positivas, mientras que el intervalo $(0; +\infty)$, el de la convexidad estricta hacia las y negativas. Los intervalos de convexidad hacia las y positivas y los intervalos hacia las y negativas reciben el nombre de intervalos de convexidad.

Condiciones de convexidad de una función. Con el fin de que la función $f(x)$ derivable dos veces sobre el intervalo $(a; b)$ sea convexa hacia las y negativas en dicho intervalo es necesario y suficiente que la segunda derivada $f''(x)$ sea no negativa en $(a; b)$, es decir,

$$f''(x) \geqslant 0, \quad x \in (a; b). \tag{6}$$

La condición

$$f''(x) > 0, \quad x \in (a; b) \tag{7}$$

es la suficiente condición de la convexidad estricta hacia las y negativas de la función $f(x)$ sobre el intervalo $(a; b)$.

La condición (7) no es necesaria. En efecto, la función $f(x) = x^4$ es estrictamente convexa hacia las y negativas por toda la recta numérica, pero su segunda derivada $f''(x) = 12x^2$ es igual a cero en el punto $x = 0$.

Por analogía, para la función $f(x)$, que en el intervalo $(a; b)$ tiene segunda derivada, la condición necesaria y suficiente de la convexidad hacia las y positivas en dicho intervalo es

$$f''(x) \leqslant 0, \quad x \in (a; b), \tag{8}$$

mientras que la condición suficiente de la convexidad estricta hacia las y positivas es

$$f''(x) < 0, \, . \; x \in (a; b). \tag{9}$$

Sea que la función $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto x_0 a excepción, posiblemente, del punto x_0. Si existen los intervalos

$$(x_0 - \delta; x_0) \text{ y } (x_0; x_0 + \delta), \quad \delta > 0$$

sobre uno de los cuales $f(x)$ es estrictamente convexa hacia las y negativas, mientras que en otro, estrictamenta convexa hacia las y positivas, se suele decir que al pasar por el punto x_0 la función $f(x)$ varía el sentido de la convexidad.

Sea que la función $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto x_0, es continua en éste y tiene en él una derivada finita o bien infinita. En tal caso, si la función $f(x)$ al pasar por el punto x_0 varía el sentido de la convexidad, él recibe el nombre de *punto de inflexión de la función* $f(x)$. En este caso, el punto $(x_0; f(x_0))$ lleva el nombre de *punto de inflexión del gráfico de la función* $f(x)$.

Si $(x_0; f(x_0))$ es el punto de inflexión del gráfico de la función $f(x)$, el gráfico de la función $f(x)$ pasa de un lado de la tangente a él en dicho punto a su otro lado. Señalemos que la afirmación inversa es incierta (véase el problema 20.62).

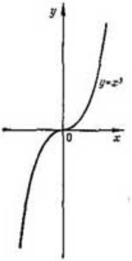


Fig. 85

En las figs. 85 y 86 se ofrecen el gráfico de la función $y = x^3$ y el de la función inversa a ella $y = \sqrt[3]{x}$, para las que el punto (0; 0) es el de inflexión. La función $y = \sqrt[3]{x}$ tiene en el punto $x = 0$ una derivada infinita.

La función (fig. 87)

$$y=\begin{cases} 1/x & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

al pasar por el punto $x = 0$, varía el sentido de la convexidad, en el punto $x = 0$ tiene una derivada infinita, pero el punto $x = 0$ no es para ella el de inflexión, ya que con $x = 0$ la función es discontinua. Para la función $y = \sqrt[3]{|x|}$ el punto $x = 0$ (fig. 88) no es de inflexión, ya que al pasar por el punto $x = 0$ el sentido de la convexidad no varía (éste es el llamado punto de retroceso). Al pasar por el punto $x = 0$ la función

$$y=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x\geqslant 0,\\ x^2 & \text{si } x<0\end{cases}$$

varía el sentido de la convexidad, pero el punto $x = 0$ no es para ella punto de inflexión (fig. 89), ya que en éste la función no tiene derivada ni finita ni infinita (éste es el llamado punto anguloso).

Condiciones necesarias de existencia del punto de inflexión. Si el punto x_0 es el de inflexión de la función $f(x)$, entonces o $f''(x_0) = 0$, o bien $f''(x_0)$ no existe.

Estas condiciones no son suficientes. En efecto, para la función $f(x) = x^4$ la segunda derivada en el punto $x = 0$ es nula, en tanto que para la función

$$g(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\geqslant 0,\\ x^2 & \text{si } x<0\end{cases}$$

la segunda derivada no existe en el punto $x = 0$, además ni para $f(x)$ ni para $g(x)$ el punto $x = 0$ es el de inflexión.

Los puntos de inflexión de las funciones deben ser buscados entre los puntos críticos de su primera derivada.

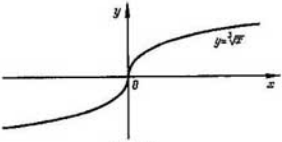


Fig. 86

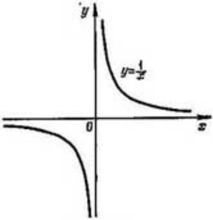


Fig. 87

Condiciones suficientes de existencia del punto de inflexión (utilizando la segunda derivada). Sea la función $f(x)$ derivable en el punto x_0 y dos veces derivable en cierto entorno del punto x_0

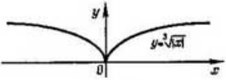


Fig. 88

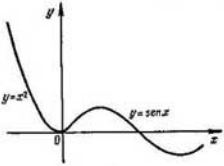


Fig. 89

salvo, posiblemente, el propio punto x_0. Entonces x_0 es el punto de inflexión de la función $f(x)$ si existe un entorno del punto x_0 en el que bien

$$f''(x) < 0 \text{ con } x < x_0 \text{ y } f''(x) > 0 \text{ con } x > x_0, \qquad (10)$$

o bien

$$f''(x) > 0 \text{ con } x < x_0 \text{ y } f''(x) < 0 \text{ con } x > x_0. \qquad (11)$$

En este caso, se suele decir que al pasar por el punto x_0 la segunda derivada cambia de signo.

Condiciones de existencia del punto de infexión (con empleo de las derivadas de órdenes superiores). Sea que la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 derivadas hasta del orden $n > 2$, inclusive, y sea

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ y } f^{(n)}(x_0) \neq 0; \qquad (12)$$

entonces, si n es un número impar, x_0 es el punto de inflexión; si n es un número par, x_0 no es el punto de inflexión.

En particular si

$$f''(x_0) = 0 \text{ y } f'''(x_0) \neq 0, \qquad (13)$$

x_0 es el punto de inflexión de la función $f(x)$.

Ejemplo 9. Hallen el intervalo de convexidad y los puntos de inflexión de la función

1) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$.

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$. 3) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$.

△ 1) Como $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$, $f''(x) > 0$ con $|x| > 1$ y $f''(x) < 0$ con $|x| < 1$. Por consiguiente, $(-\infty; -1)$ y $(1; +\infty)$ son los intervalos de convexidad hacia las y negativas, mientras que $(-1; 1)$ es el intervalo de convexidad hacia las y positivas. Al pasar por los puntos $x = \pm 1$, en los que la segunda derivada es igual a cero, la función varía el sentido de la convexidad. Por ello, $x = \pm 1$ son los puntos de inflexión de la función. Nos podemos cerciorar de otro modo de que los puntos $x = \pm 1$ son los de inflexión haciendo uso de la condición suficiente (13). En efecto, $f''(\pm 1) = 0$, $f'''(x) = 24x$ y $f'''(\pm 1) \neq 0$, es decir, las condiciones (13) se han cumplido. Por lo tanto, $x = \pm 1$ son los puntos de inflexión.

2) La función es derivable con toda $x \in \mathbb{R}$, salvo $x = 1$, con ello

$$f'(x) = -\frac{x(x+2)}{(x-1)^4},$$

$$f''(x) = 2\,\frac{x^2+4x+1}{(x-1)^5} = 2\,\frac{(x-(-2-\sqrt{3}))(x-(-2+\sqrt{3}))}{(x-1)^5}.$$

En los puntos $x = -2 \pm \sqrt{3}$ la segunda derivada es igual a cero, mientras que en el punto $x = 1$, no existe. En los intervalos

$$(-\infty; -2-\sqrt{3}), \quad (-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}),$$
$$(-2+\sqrt{3}; 1), \ (1; +\infty)$$

la segunda derivada conserva su signo. Por consiguiente, cada uno de ellos es un intervalo de convexidad. En los primero y tercer intervales $f''(x) < 0$, o sea, estos son intervalos de convexidad hacia las

y positivas; en los intervalos segundo y cuarto $f''(x) > 0$, es decir, ellos son intervalos de convexidad hacia las y negativas. Al pasar por los puntos $x = -2 \pm \sqrt{3}$, $x = 1$, la función varía el sentido de la convexidad. Pero en el punto $x = 1$ la función no está definida, por ello $x = 1$ no es punto de inflexión. Así, pues, la función tiene dos puntos de inflexión: $x = -2 - \sqrt{3}$ y $x = -2 + \sqrt{3}$.

3) La función está definida sobre el intervalo $(0; +\infty)$ y es derivable en cada uno de sus puntos, salvo el $x = 1$. Después de calcular la segunda derivada, obtenemos

$$f''(x) = \frac{3}{4}\frac{5-x}{x^3\sqrt{x}}, \quad x \in (0;\ 1),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}\frac{x-5}{x^3\sqrt{x}}, \quad x \in (1;\ +\infty).$$

En el punto $x = 5$ la segunda derivada es nula y no existe en el punto $x = 1$. Determinamos los intervalos en los cuales $f''(x)$ conserva su signo:

$$f''(x) > 0 \text{ con } x \in (0; 1),$$
$$f''(x) < 0 \text{ con } x \in (1; 5),$$
$$f''(x) > 0 \text{ con } x \in (5; +\infty).$$

Por lo tanto, en los intervalos $(0; 1)$ y $(5; +\infty)$ la función es convexa hacia las y negativas, mientras que en el intervalo $(1; 5)$ es convexa hacia las y positivas. Al pasar por los puntos $x = 1$ y $x = 5$ la función varía el sentido de la convexidad. Pero en el punto $x = 1$ la función no tiene derivada ni finita ni infinita. Por ello, $x = 1$ no es punto de inflexión. El punto $x = 5$ es el de inflexión, ya que en él la función tiene una derivada finita.▲

Ejemplo 10. Hallen los puntos de inflexión del gráfico de la función $y = e^{\sqrt[3]{x}}$ y los coeficientes angulares de las tangentes al gráfico de la función en sus puntos de inflexión.

△ Calculemos las derivadas primera y segunda de las funciones

$$y'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y''(x) = \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-2)}{9x^2}e^{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0.$$

En el punto $x = 0$ la función es continua y tiene una derivada infinita. La segunda derivada no existe con $x = 0$ y es igual a cero con $x = 8$. Por lo tanto, los puntos de inflexión de la función sólo pueden estar en los puntos $x = 0$ y $x = 8$. Al pasar por estos puntos $y''(x)$ cambia su signo y, por consiguiente, $y(x)$ en dichos puntos varía el sentido de la convexidad. Por ello, $x = 0$, $x = 8$ son los puntos de inflexión de la función, mientras que $(0; 1)$ y $(8; e^2)$ son los puntos de inflexión del gráfico de la función. La tangente al gráfico de la

función en el punto (0; 1) es vertical, ya que $y'(0) = +\infty$. En el punto de inflexión $(8; e^2)$ el coeficiente angular de la tangente es igual a $y'(8) = e^2/12$. ▲

Ejemplo 11. Determinen si $x = 0$ es el punto de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x.$$

△ Hallemos la forma del término principal del desarrollo de la función con ayuda de la fórmula de Maclaurin (6) § 18. Ya que de acuerdo con las fórmulas (12) y (24) § 18

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6),$$

entonces,

$$f(x) = c_5 x^5 + o(x^6), \quad c_5 \neq 0.$$

De aquí se desprende que

$$f''(0) = f'''(0) = f^{IV}(0) = 0, \text{ pero } f^{V}(0) \neq 0.$$

Así, pues, las condiciones (12) se han cumplido, con ello $n = 5$ es un número impar. Por lo tanto, $x = 0$ es el punto de inflexión de la función. ▲

Ejemplo 12. Hallen los puntos de inflexión del gráfico de la función $y = f(x)$, prefijada con las ecuaciones paramétricas

$$x = 1 + \operatorname{ctg} t, \quad y = \frac{\cos 2t}{\operatorname{sen} t}, \quad 0 < t < \pi. \tag{14}$$

△ Las funciones $x(t)$ e $y(t)$ con $t \in (0; \pi)$ son dos veces derivables, con la particularidad de que la derivada $x'_t = -1/\operatorname{sen}^2 t$ es negativa. Por ello, con las ecuaciones (14) se define la función $y = f(x)$ dos veces derivable, cuyas derivadas se pueden hallar con las fórmulas

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

Como

$$y'_t = -\frac{\cos t\,(2\operatorname{sen}^2 t + 1)}{\operatorname{sen}^2 t},$$

entonces,

$$y'_x = \cos t\,(2\operatorname{sen}^2 t + 1).$$

Calculemos la segunda derivada de la función $y = f(x)$. Como $(y'_x)'_t = 3\cos 2t \operatorname{sen} t$,

$$y''_{xx} = -3\operatorname{sen}^3 t \cos 2t.$$

La segunda derivada y''_{xx} es nula con $t = \pi/4$ y $t = 3\pi/4$. Al pasar por estos puntos y''_{xx} cambia de signo. Por consiguiente, con estos valores del parámetro t el gráfico de la función $y = f(x)$ tiene puntos de inflexión. A los valores de los parámetros $t = \pi/4$ y $t = 3\pi/4$ les corresponden los puntos (2; 0) y (0; 0) del gráfico de la función. De este modo, el gráfico de la función tiene dos puntos de inflexión (0; 0) y (2; 0). ▲

Ejemplo 13. Demuestren la desigualdad

$$e^{(x+y)/2} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

△ Consideremos la función $f(x) = e^x$. Como $f''(x) = e^x > 0$, $f(x)$ es convexa hacia las y negativas por toda la recta numérica. Por definición, la función convexa por doquier hacia las y negativas para cualesquiera puntos x_1 y x_2 de la recta numérica y cualesquiera números $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, es cierta la desigualdad

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Si $f(x) = e^x$, esta desigualdad tiene la forma

$$e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \leqslant \alpha_1 e^{x_1} + \alpha_2 e^{x_2}.$$

Haciendo $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, obtenemos

$$e^{(x+y)/2} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}.$$

Como $f''(x) = e^x$ es estrictamente mayor que cero, la función $f(x) = e^x$ es estrictamente convexa hacia las y negativas. Por ello, con $x \neq y$ obtenemos la desigualdad estricta

$$e^{(x+y)/2} < \frac{e^x + e^y}{2}. \quad ▲$$

Hallen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función (20.1—20.5):

20.1. 1) $f = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7$. 2) $f = 8x^3 - x^4$.
3) $f = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$. 4) $f = (x-1)^3 (2x+3)^2$.

20.2. 1) $f = xe^{-3x}$. 2) $f = e^x/x$. 3) $f = x^2 e^{-x^2}$.
4) $f = x^\alpha e^{-x}$, $x > 0$, $\alpha > 0$. 5) $f = x^2 - 10 \ln x$.
6) $f = x^2 \ln x$. 7) $f = x/\ln x$. 8) $f = 3^{1/(x-3)}$.
9) $f = \operatorname{arctg} x - \ln x$. 10) $f = e^{\pi x} \cos \pi x$.

20.3. 1) $f = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$. 2) $f = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.
3) $f = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$. 4) $f = \dfrac{(3-x)^3}{(x-2)^2}$.

20.4. 1) $f=\sqrt[3]{x}/(x+50)$. 2) $f=\sqrt{8x^2-x^4}$.
3) $f=\sqrt{2x^3+9x^2}$. 4) $f=x\sqrt{(x+1)^3}$.
5) $f=x/\sqrt[3]{x^2-1}$. 6) $f=(x+1)\sqrt{x^2-1}$.
7) $f=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

20.5. 1) $f=\dfrac{\sqrt{1+|x+2|}}{1+|x|}$. 2) $f=\dfrac{\operatorname{sen} x+\cos x}{1+|\cos x|}$.

20.6. Hallen los intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función $y=f(x)$ prefijada implícitamente con la ecuación:
1) $x^2y^2+y=1$, $y>0$. 2) $x^3y^3=x-y$, $x>0$.

20.7. Hallen los intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función $y=f(x)$ prefijada paramétricamente con las ecuaciones:

$$x=\frac{e^{-t}}{1-t},\quad y=\frac{e^t}{1-t},\quad t>1.$$

20.8. ¿Con qué valores del parámetro a la función $f(x)$ crece por toda la recta numérica?
1) $f(x)=x^3-ax$. 2) $f(x)=\dfrac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x$.
3) $f(x)=ax-\operatorname{sen} x$. 4) $f(x)=ax+3\operatorname{sen} x+4\cos x$.
5) $f(x)=(8a-7)x-a\operatorname{sen} 6x-\operatorname{sen} 5x$.
6) $f(x)=4x+\dfrac{a+1}{2}\ln(x^2-x+1)+\dfrac{a-5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$?

20.9. Demuestren que si la función $f(x)$ es continua sobre el intervalo $(a; b)$ y $f'(x)>0$ por doquier sobre $(a; b)$, salvo un número finito de puntos, $f(x)$ estrictamente crece sobre $(a; b)$.

20.10. Demuestren que para el crecimiento estricto de $f(x)$ sobre cierto intervalo es necesario y suficiente que para cualesquiera puntos x_1 y x_2 $(x_1<x_2)$ de dicho intervalo exista tal punto $\xi\in(x_1; x_2)$ que $f'(\xi)>0$.

20.11. Sea que la función $f(x)$ crece sobre el intervalo $(a; b)$. ¿Se desprende de esto que la derivada $f'(x)$ también crece sobre el intervalo $(a; b)$?

20.12. La función $f(x)$ se llama creciente en el punto x_0 si existe tal número $\delta>0$ que $f(x)<f(x_0)$, si $x\in(x_0-\delta; x_0)$ y $f(x)>f(x_0)$, si $x\in(x_0; x_0+\delta)$.
Demuestren que: 1) del crecimiento de la función $f(x)$ en cada punto de cierto intervalo se deduce el crecimiento de $f(x)$ sobre este intervalo; 2) la función

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\operatorname{sen}(2/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

crece en el punto $x = 0$, pero no es creciente en ninguno de los intervalos que contienen ese punto.

20.13. Hallen los puntos del máximo y el mínimo de la función: 1) $y = x^3 - 4x^2$. 2) $y = x(x-3)^2(x+1)^3$.

3) $y = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x$. 4) $y = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$.

5) $y = (x-5)e^x$. 6) $y = x^2 e^{1/x}$.

7) $y = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$. 8) $y = \dfrac{\sqrt[3]{1+|x|}}{1+|4x+5|}$.

20.14. Hallen el punto del mínimo de la función

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - x_k)^2, \quad x_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

20.15. Hallen el polinomio de menor orden, que tiene máximo local igual a 6 con $x = 1$ y mínimo local igual a 2 con $x = 3$.

Hallen los máximos y mínimos de las funciones (**20.16—20.25**):

20.16. 1) $y = x^4 - 8x^2 + 12$. 2) $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$

3) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 6x + 3$.

4) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$.

5) $y = (x^3 - 10)(x+5)^2$. 6) $y = (x+2)^2(x-3)^3$.

20.17. 1) $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$. 2) $y = \dfrac{x}{x^2+4}$. 3) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$.

4) $y = \dfrac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$. 5) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$. 6) $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

20.18. 1) $y = \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. 2) $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

3) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$. 4) $y = x + \operatorname{sen} x$. 5) $y = x - 2\operatorname{sen}^2 x$.

6) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$. 7) $y = (x-2)\cos \pi x - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{sen} \pi x$.

8) $y = (x^2+1)\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4}x^2 - x$.

20.19. 1) $y = (x-1)e^{3x}$. 2) $y = (3 - x^2)e^x$.

3) $y = (x^2 - 8)e^{-x}$. 4) $y = x^3 e^{-4x}$. 5) $y = x^4 e^{-x^2}$.

6) $y = (x+1)^5 e^{-x}$. 7) $y = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}$.

8) $y = (x+2)e^{1/x}$.

20.20. 1) $y = \sqrt{x}\ln x$. 2) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

3) $y = \dfrac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}$. 4) $y = x^2 - 4x - 1 - \ln(x^2 - 4x + 4)$.

5) $y = \ln\cos x - \cos x$. 6) $y = \ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg} x$.

20.21. 1) $y=x+\sqrt{3-x}$. 2) $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}$.
3) $y=\sqrt[3]{x^2}-x$. 4) $y=x\sqrt[3]{x-1}$. 5) $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1}$.
6) $y=x/\sqrt[3]{x^2-4}$. 7) $y=\sqrt{(x-2)^2(x-4)^2}$.
8) $y=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$. 9) $y=\sqrt[3]{(3x-2)^2/(x-1)}$.
10) $y=1-\sqrt[3]{(x+1)^2/(x+2)^2}$.
20.22. 1) $y=x^x$. 2) $y=x^{1/x}$.
20.23. 1) $y=|x-5|(x-3)^3$. 2) $y=\text{máx}\{7x-6x^2,\ |x^3|\}$.
3) $y=\sqrt{1+2|x-1|}/(6+|3x-2|)$. 4) $y=\sqrt[3]{x^2|2-x|}$.
5) $y=|x-1|\sqrt[3]{x+2}$. 6) $y=|x^2-1|e^{|x|}$.
7) $y=|x^2-4|e^{-|x|}$. 8) $y=e^{-|x-1|}/(x+1)$.
20.24. 1) $y=\operatorname{sen}(x+1)-|\cos x|$, $x\in(0;\ \pi)$.
2) $y=\operatorname{sen}|x-3|+\cos x$, $x\in(0;\ \pi)$.
3) $y=\dfrac{1+|\cos x|}{2+\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen} x}$, $x\in(0;\ \pi)$.

20.25. 1) $y(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0,\\ x\ln x, & x>0.\end{cases}$

2) $y(x)=\begin{cases} 1+x, & x\leqslant 0,\\ (x)^{x^3}, & x>0.\end{cases}$ 3) $y(x)=\begin{cases} 1+x, & x\leqslant 0,\\ x^{x^2\ln x}, & x>0.\end{cases}$

20.26. Investigar la función en lo que se refiere al extremo:
1) $y=(x+1)^n e^{-x}$, $n\in\mathbb{N}$.
2) $y=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$, $n\in\mathbb{N}$.
3) $y=x^k(1-x)^n$, $k, n\in\mathbb{N}$.
4) $y=ae^{px}+be^{-px}$, $a, b, p\in\mathbb{R}$.
20.27. Investiguen la función en lo que se refiere al extremo en el punto $x=a$

$$y=(x-a)^n\varphi(x),\quad n\in\mathbb{N};$$

$\varphi(x)$ es continua en el punto $x=a$ y $\varphi(a)\neq 0$.
20.28. Investiguen la función $y=f(x)$ en lo que se refiere al extremo, si ella está prefijada implícitamente con la ecuación:
1) $x^3+y^3=3x^2$. 2) $x+y=xy(y-x)$, $|y|<|x|$.
3) $x^4-y^4=x^2-2y^2$, $y>|x|$.
4) $(x^2-y^2)(x-y)=1$, $y>|x|$.
20.29. Investiguen la función $y=f(x)$ en lo que se refiere al extremo, si ella está prefijada paramétricamente con las ecuaciones:
1) $x=\dfrac{1}{t(t+1)}$, $y=\dfrac{(t+1)^2}{t}$, $t>0$,
2) $x=\ln\operatorname{sen}(t/2)$, $y=\ln\operatorname{sen} t$.

20.30. Demuestren que si en el punto del mínimo existe una derivada a la derecha, ella no es negativa, mientras que si existe la derivada a la izquierda, ella es no positiva.

20.31. Sea la función $f(x)$ definida sobre el intervalo $(a; b)$ y continua en el punto $x_0 \in (a; b)$. Demustren que si $f(x)$ crece en el intervalo $(a; x_0)$ y decrece en el intervalo $(x_0; b)$, x_0 es el punto del máximo; pero si $f(x)$ decrece en el intervalo $(a; x_0)$ y crece en el intervalo $(x_0; b)$, x_0 es el punto del mínimo.

20.32. Demuestren que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}^2(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

tiene en el punto $x = 0$ mínimo no estricto.

20.33. Demuestren que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2(2+\cos(1/x)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

tiene mínimo estricto en el punto $x = 0$, pero en ningún intervalo $(-\delta; 0)$, $\delta > 0$, es decreciente y en ningún intervalo $(0; \delta)$, $\delta > 0$, es creciente.

20.34. Sean

$$f(x)=\begin{cases} |x|(2+\cos(1/x)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} e^{-1/|x|}\left(\frac{6}{5}+\cos\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Demuestren que:

1) $f'(0)$ no existe, $g^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $f(x)$ y $g(x)$ tienen en el punto $x = 0$ mínimo estricto.

3) $f(x)$ y $g(x)$ en ningún intervalo $(-\delta; 0)$, $\delta > 0$, son decrecientes y en ningún intervalo $(0; \delta)$, $\delta > 0$, son crecientes.

20.35. Sean

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Demuestren que:

1) $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$.

2) $f(x)$ tiene en el punto $x = 0$ mínimo estricto, $g(x)$ no tiene extremo en el punto $x = 0$.

20.36. Sea $f(x)$ una función par, dos veces continuamente derivable, con ello $f''(0) \neq 0$. Demuestren que el punto $x = 0$ es el punto de extremo de la función.

Hallen los valores máximo y mínimo absolutos de las funciones (20.37 — 20.40):

20.37. 1) $y = x^3 - 6x^2 + 9,\ x \in [-1; 2]$.

2) $y = \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 48x,\ x \in [0;\ 9]$.

3) $y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100,\ x \in [-4;\ 5]$.

4) $y = x^4 - 8x^2 + 3,\ x \in [-1;\ 2]$.

5) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1,\ x \in [-1;\ 2]$.

20.38. 1) $y = \frac{9}{x} + \frac{25}{1-x},\ x \in (0;\ 1)$.

2) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2},\ x \in [0;\ 1]$. 3) $y = \frac{x^2+1}{x^2+x+1},\ x \in \mathbb{R}$.

4) $y = \frac{x^4+1}{x^2+1},\ x \in [-1;\ 1]$.

20.39. 1) $y = x - 2\sqrt{x},\ x \in [0;\ 5]$.

2) $y = x - 2\ln x,\ x \in [3/2;\ e]$. 3) $y = x\ln(x/5),\ x \in [1;\ 5]$.

4) $y = |x^2 + 2x - 3| + 1{,}5\cdot\ln x,\ x \in [1/2;\ 2]$.

5) $y = (x-3)\,e^{|x+1|},\ x \in [-2;\ 4]$. 6) $y = x^x,\ x \in (0;1]$.

20.40. 1) $y = 2\,\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,2x,\ x \in [0;\ 3\pi/2]$.

2) $y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right),\ x \in \mathbb{R}$.

3) $y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \mathrm{sen}\,x,\ x \in [\pi;\ 2\pi]$.

4) $y = 2\,\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arcsen}\,\frac{2x}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$.

Hallen los extremos de la función $y = f(x)$ sobre el intervalo $(a;\ b)$, así como su valor mínimo absoluto m y su valor máximo absoluto M sobre el segmento $[a;\ b]$ (20.41 — 20.43):

20.41. 1) $y = (x-3)^2 e^{|x|},\ a = -1,\ b = 4$.

2) $y = (x-3)^3 e^{|x+1|},\ a = -2,\ b = 4$.

3) $y = e^{\sqrt{x^2|x+1|}},\ a = -2,\ b = 1$.

4) $y = \ln\left(1 + \sqrt{|x|\,(x+1)^2}\right),\ a = -2,\ b = 1$.

5) $y = \mathrm{arctg}\,\sqrt{|x|\,(x-1)^2},\ a = -1,\ b = 2$.

6) $y = \mathrm{arcctg}\,\sqrt{x^2\,|1-x|},\ a = -1,\ b = 2$.

20.42. $y = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ 2ex\ln x, & x > 0, \end{cases}\ a = -1,\ b = 2.$

2) $y = \begin{cases} 1 + 3x, & x \leqslant 0, \\ (x)^{x^2}, & x > 0, \end{cases}\ a = -1,\ b = 2.$

3) $y = \frac{E(x)}{x} + \frac{x}{3},\ a = 1,\ b = 3$.

20.43. 1) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\operatorname{sign}x\right)+\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, $a=-\pi$, $b=\pi$.

2) $y=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\operatorname{sign}x\right)$, $a=-\pi$, $b=\pi$.

3) $y=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\operatorname{sign}x\right)$, $a=-\pi$, $b=\pi$.

20.44. Hallen el número n del término mayor de la sucesión:

1) $\{105n+3n^2-n^3\}$. 2) $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1985}\right\}$. 3) $\left\{\frac{\sqrt[3]{n}}{n+19}\right\}$.

4) $\left\{\frac{n^2}{n^3+200}\right\}$. 5) $\left\{\frac{n^{15}}{e^n}\right\}$. 6) $\left\{\frac{n^{10}}{2^n}\right\}$.

Hallen $\inf f$ y $\sup f$ (20.45—20.47):

20.45. $f=\frac{1}{x}+x^2$, $x\in(0;\ 1]$. 2) $f=\ln x-x$, $x\in(0;\ +\infty)$.

3) $f=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x$, $x\in(-\pi/2;\ \pi/2)$.

4) $f=\operatorname{tg}x-3x$, $x\in[-\pi/4;\ \pi/2)$.

20.46. 1) $f=(x^2+4)e^{-x}$, $x\in(0;\ +\infty)$.

2) $f=e^{-x^2}\cos x^2$, $x\in\mathbb{R}$. 3) $f=\frac{1}{x}e^{-1/x}$, $x\in(0;\ +\infty)$.

4) $f=x^x$, $x\in(0;\ 1/2]$.

20.47. 1) $f=x+\left(\frac{2}{x-2}\right)^2$, $x\in(3/2;\ 5)$.

2) $f=(x+1)\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$, $x\in(3/2;\ 6)$.

3) $f=\frac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

4) $f=\frac{x^2+1}{x^2+3}$, $x\in(a;\ +\infty)$, $a\in\mathbb{R}$.

20.48. Hallen los intervalos de convexidad de las funciones:

1) $f=x^\alpha$, $\alpha>1$, $x>0$. 2) $f=x^\alpha$, $0<\alpha<1$, $x>0$.

3) $f=e^x$. 4) $f=\ln x$. 5) $f=x\ln x$. 6) $f=\operatorname{arctg}x$.

Hallen los intervalos de convexidad y los puntos de inflexión de las funciones (20.49—20.50):

20.49. 1) $f=2x^4-3x^2+x-1$. 2) $f=x^5-10x^2+3x$.

3) $f=\frac{1}{1-x^2}$. 4) $f=\frac{x^3}{12+x^2}$. 5) $f=\sqrt[3]{x+3}$.

6) $f=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$. 7) $f=\sqrt[3]{4x^3-12x}$. 8) $f=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

20.50. 1) $f=\cos x$. 2) $f=x+\operatorname{sen}x$.

3) $f=e^{-x^2}$. 4) $f=e^{1/x}$. 5) $f=\frac{10}{x}\ln\frac{x}{10}$.

6) $f=x\operatorname{sen}\ln x$. 7) $f=\operatorname{arctg}(1/x)$. 8) $f=e^{\operatorname{arctg}x}$.

Hallen los puntos de inflexión de las funciones (**20.51.**—**20.53**):

20.51. 1) $f = x^4 - 6x^2 + 5x$. 2) $f = x^4 - 12x^3 + 48x^2$.
3) $f = 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, 4) $f = (x^2 - 1)^3$.

20.52. 1) $f = 4x^2 + \frac{1}{x}$. 2) $f = \frac{x^2}{(x-1)^2}$. 3) $f = \sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 4}$.
4) $f = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$. 5) $f = \frac{|x-1|}{x^2}$.

20.53. 1) $f = (x^2 + 1)e^x$. 2) $f = x^3 e^{-4x}$. 3) $f = x^2 \ln x$.
4) $f = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 5) $f = e^{\cos x}$.

Hallen los puntos de inflexión del gráfico de las funciones (**20.54**—**20.56**):

20.54. 1) $f = 36x(x-1)^3$. 2) $f = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.
3) $f = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$. 4) $f = \frac{x^5}{20} - x^4 + 8x^3 - 32x^2$.
5) $f = \frac{2x^2 - x - 4}{x^2 - 4x + 4}$. 6) $f = \frac{x^4}{(x+1)^3}$.

20.55. 1) $f = \sqrt[3]{1 - x^3}$. 2) $f = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.
3) $f = 5 + \sqrt[3]{(x-5)^5}$. 4) $f = \sqrt{\frac{8 - x^2}{3x}}$.

20.56. 1) $f = e^{2x - x^2}$. 2) $f = xe^{-(x/2)^2}$.
3) $f = 2x^2 + \ln x$. 4) $f = e^{-2x} \operatorname{sen}^2 x$.

20.57. Hallen los puntos de inflexión de la función f:
1) $f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$, $\sigma > 0$. 2) $f = \frac{ax}{x^2 + b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

20.58. Investiguen los polinomios en lo que se refiere a los puntos de inflexión:
1) $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.
2) $P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$.

20.59. ¿Con qué valores del parámetro a la función $f = e^x + ax^3$ tiene puntos de inflexión?

20.60. Demuestren que el gráfico de la función

$$y(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

tiene tres puntos de inflexión que yacen en una misma recta.

20.61. Demuestren que los puntos de inflexión del gráfico de la función $y(x) = x \operatorname{sen} x$ yacen en la curva

$$y^2(4 + x^2) = 4x^2.$$

20.62. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^3(2 + \cos(1/x^2)), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demuestren que

1) El gráfico de la función $f(x)$ tiene una tangente en el punto $(0; 0)$.

2) El gráfico de la función $f(x)$ pasa de un lado de la tangente a él en el punto $(0; 0)$ a su otro lado.

3) El punto $(0; 0)$ no es punto de inflexión del gráfico de la función $f(x)$.

20.63. 1) ¿Puede ser el punto de inflexión de una función su punto del extremo?

2) ¿Puede tener una función convexa por doquier hacia las y negativas (positivas) más de un extremo?

20.64. Demustren que en cualquier función dos veces derivable:

1) Entre dos puntos del extremo yace al menos un punto de inflexión.

2) Entre los puntos de inflexión de la función puede no haber puntos del extremo.

20.65. Demuestren que:

1) Cada polinomio de orden impar, distinto del lineal, tiene al menos un punto de inflexión.

2) Cada polinomio par con coeficientes positivos no tiene puntos de inflexión.

20.66. Sea $f(x)$ una función continuamente derivable sobre el intervalo $(a; b)$ y sea que para cualesquiera puntos x_1, x_2 de este intervalo existe un punto único c tal que

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c).$$

Demuestren que $f(x)$ no tiene puntos de inflexión.

20.67. Hallen los puntos de inflexión del gráfico de la función $y=f(x)$ prefijada paramétricamente con las ecuaciones:

1) $x=te^t$, $y=te^{-t}$, $t>0$.

2) $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t^3}{t-1}$, $t>2$.

3) $x=\dfrac{2t^2+2}{t}$, $y=\dfrac{t^3+3t+1}{t^2}$, $0<t<1$.

4) $x=\dfrac{t^2-2t-5}{t^2+10t+25}$, $y=\dfrac{t^2-4t+5}{t^2+4t-5}$, $t>1$.

20.68. Demuestren que si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones $f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ y $f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$, $x>x_0$, entonces $f(x)>g(x)$ con $x>x_0$.

Demuestren las desigualdades (**20.69.**—**20.71**):

20.69. 1) $e^x\geqslant ex$, $x\in\mathbb{R}$.

2) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $x>0$.

3) $\ln(1+x)>\dfrac{x}{x+1}$, $x>0$.

4) $1-2\ln x \leqslant \frac{1}{x^2}$, $x>0$. 5) $e^x \geqslant 1+\ln(1+x)$.

6) $\frac{\ln x}{x-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$, $x\neq 1$.

20.70. 1) $\cos x \geqslant 1-\frac{x^2}{2}$, $x\in \mathbb{R}$. 2) $\operatorname{ch} x \geqslant 1+\frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

3) $\operatorname{tg} x > x+\frac{x^3}{3}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$. 4) $\operatorname{arctg} x \leqslant x$, $x \geqslant 0$.

5) $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{2}{\pi} x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

6) $x-\frac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$, $x>0$.

7) $\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x>2x$, $0<x<\pi/2$.

8) $x-\frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x-\frac{x^3}{6}$, $0<x\leqslant 1$.

9) $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 \geqslant \cos x$, $0<|x|\leqslant \frac{\pi}{2}$.

20.71. 1) $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y} \leqslant \sqrt[n]{x-y}$, $x\geqslant y \geqslant 0$.

2) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \frac{x^n+y^n}{2}$, $x\geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $n\in \mathbb{N}$.

3) $(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta+y^\beta)^{1/\beta}$, $x>0$, $y>0$, $0<\alpha<\beta$.

4) $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$, $x>y>0$.

5) $\frac{x\ln x+y\ln y}{x+y} > \ln\frac{x+y}{2}$, $x>0$, $y>0$.

20.72. Demuestren la desigualdad

$$x^\alpha-1 \leqslant \alpha(x-1), \quad x>0, \quad 0<\alpha<1.$$

20.73. Demuestren la desigualdad de Young: si $a>0$, $b>0$, $p>1$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces:

$$a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p}+\frac{b}{q},$$

con la particularidad de que la igualdad sólo tiene lugar con $a=b$.

20.74. Demuestren la desigualdad de Hölder: si $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $p>1$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}.$$

20.75. Demuestren la desigualdad de Minkovski: si $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $p>1$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

§ 21. Trazado de gráficos

Al trazar el gráfico de una función hay que sujetarse, p. ej., al siguiente esquema:

1. Hallen el campo de definición de la función. Comprueben si la función es par, impar, periódica.

Hallen los puntos de intersección del gráfico con los ejes de coordenadas, los intervalos donde los valores de la función son positivos, negativos.

Hallen los puntos de discontinuidad de la función.

2. Hallen las asíntotas del gráfico (§ 11).

Hallen los límites unilaterales de la función en los puntos de frontera del campo de definición y en los puntos de discontinuidad.

3. Hagan un esbozo del gráfico, reflejando en él los resultados obtenidos.

4. Calculen la primera derivada de la función, hallen los extremos y los intervalos de su crecimiento y decrecimiento.

5. Calculen la segunda derivada, hallen los puntos de inflexión del gráfico, los intervalos de convexidad hacia las y positivas y negativas.

6. Tracen el gráfico de la función.

Al resolver un problema concreto, las etapas por separado de este esquema pueden ser ampliadas, otras pueden ser excesivas e irrealizables. P. ej., si los puntos del gráfico se aproximan monótonamente a la asíntota, debe intentarse aclarar por qué lado de ella están dispuestos. Esto se puede realizar mediante el método de separación de la parte principal o bien por la dirección conocida de convexidad de la curva. El primer método también se puede emplear para precisar el dibujo en las cercanías de puntos aislados o bien con $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ (§11). Con frecuencia no es difícil hallar y dibujar la tangente al gráfico en los puntos de inflexión, en los puntos angulosos, etc.

Ejemplo 1. Tracen el gráfico de la función

$$y = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x - 3).$$

△ La función dada está definida y es infinitamente derivable sobre $\mathbb{R}$, ella no tiene asíntotas.

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty.$$

El gráfico corta el eje de ordenadas en el punto $(0; -3/4)$.

Hallemos los extremos de la función. Calculemos la derivada

$$y' = \frac{3}{4}(x^2 + 2x - 3)$$

y hallamos que $y' > 0$ con $x < -3$, $y' < 0$ con $-3 < x < 1$, $y' > 0$ con $x > 1$. Esto significa que $x = -3$ es el punto del má-

ximo, $y(-3)=6$, mientras que $x=1$ es el punto del mínimo, $y(1)=-2$.

Marquemos los tres puntos hallados del gráfico y dibujemos su esbozo (fig. 90,*a*)).

Al calcular la segunda derivada

$$y''=\frac{3}{2}(x+1)$$

hallamos que la función es convexa hacia las y positivas con $x<-1$ ($y''<0$) y convexa hacia las y negativas con $x>-1$ ($y''>0$).

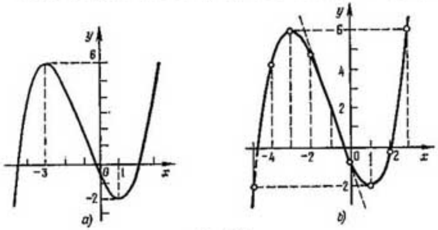


Fig. 90

En el punto de inflexión $x=-1$ calculamos $y(-1)=2$, $y'(-1)=-3$. Para que la representación del gráfico sea más precisa, hallemos varios valores más de la función (tabla 1). Marcando los puntos obtenidos en el diseño, trazamos una tangente al gráfico en el punto $(-1; 2)$ con coeficiente angular igual a -3 y trazamos el gráfico (fig. 90, *b*)). De la tabla 1 y el gráfico se desprende que las raíces del polinomio dado no son enteras y, por ello, no sería conveniente comenzar la investigación de la función hallando las raíces. ▲

Tabla 1

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y(x)$	-2	$17/4$	6	$19/4$	2	$-3/4$	-2	$1/4$	6

Ejemplo 2. Construyan el gráfico de la función

$$y=\frac{x^3}{4(2-x)^2}.$$

△ La función está definida con toda $x \in \mathfrak{R}$, salvo $x = 2$. Su gráfico corta los ejes de coordenadas en un solo punto (0; 0). La función es positiva con $x > 0$, $x \neq 2$, y negativa con $x < 0$. La fun-

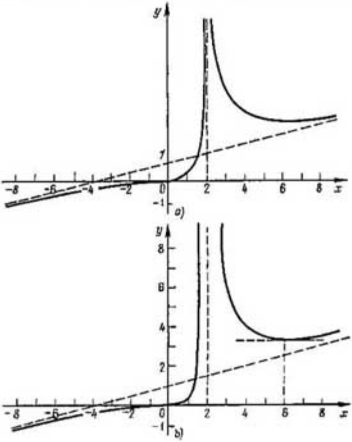


Fig. 91

ción es discontinua en el punto $x = 2$ y como el $\lim\limits_{x \to 2} y(x) = +\infty$, la recta $x = 2$ es la asíntota vertical del gráfico. Del hecho que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \to \infty} \left(y(x) - \frac{1}{4} x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x(x-1)}{(x-2)^2} = 1$$

se desprende que con $x \to \infty$ el gráfico tiene una asíntota oblicua

$$y = \frac{1}{4} x + 1.$$

Señalando que, además, $y \sim \frac{1}{16} x^3$ con $x \to 0$, realizamos el dibujo previo del gráfico (fig. 91,*a*)).

Calculemos la primera derivada

$$y'(x) = \frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}$$

y hallamos el único punto del extremo $x = 6$, que es el punto del mínimo, $y(6) = 27/8$. En los intervalos $(-\infty; 2)$ y $(6; +\infty)$ la función crece, en el intervalo $(2; 6)$, decrece. En el punto $x = 0$ la tangente al gráfico es horizontal, como fue indicado en la fig. 91, *a*). Calculemos la segunda derivada

$$y''(x) = \frac{6x}{(x-2)^4}.$$

De aquí se deduce que sólo hay un punto de inflexión de la función $x = 0$, con ello $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Con $x < 0$ la función es convexa hacia las y positivas, por lo que su gráfico, con $x \to -\infty$, se aproxima a la asíntota inferiormente. Con $0 < x < 2$ y con $x > 2$ la función es convexa hacia las y negativas. De aquí se desprende que con $x \to +\infty$ el gráfico se aproxima a la asíntota superiormente. Después de calcular varios puntos más del gráfico, sobre la base de la investigación realizada, hacemos un dibujo más preciso (fig. 91, *b*)). ▲

Ejemplo 3. Construyan el gráfico de la función

$$y = x\sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

△ La función está definida y es continua sobre $\mathbb{R}$. El gráfico corta los ejes de coordenadas en los puntos $(0; 0)$ y $(-1; 0)$. La función es positiva con $x > 0$ y negativa con $x < 0$, $x \neq -1$. Como $y(-1) = 0$, $x = -1$ es el punto del máximo de la función. Es evidente que

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad y(x) \sim x^{5/3} \text{ con } x \to +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty, \quad y(x) \sim x^{5/3} \text{ con } x \to -\infty.$$

Es fácil advertir que

$$y(x) \sim x \qquad \text{con } x \to 0,$$
$$y(x) \sim -(x+1)^{2/3} \text{ con } x \to -1.$$

Hacemos el esbozo del gráfico: con «grandes» valores de $|x|$ él «se parece» al gráfico de la función potencial $y = x^{5/3}$, en el entorno del punto $x = -1$, al gráfico de la función $y = -(x+1)^{2/3}$, mientras que en el entorno del punto $x = 0$ se acerca a la recta $y = x$ (fig. 92, *a*)).

Con el fin de precisar el dibujo hallemos e investiguemos las derivadas

$$y'(x) = \frac{5(x+3/5)}{3(x+1)^{1/3}}, \tag{1}$$

$$y''(x) = \frac{10(x+6/5)}{9(x+1)^{4/3}}. \tag{2}$$

De (1) se desprende que la función crece sobre los intervalos $(-\infty; -1)$, $(-3/5; +\infty)$ y decrece sobre el intervalo $(-1; -3/5)$.

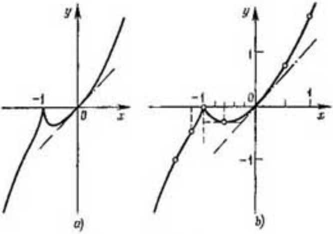


Fig. 92

En el punto $x = -1$ la función tiene máximo $(y(-1) = 0)$, lo que fue señalado con anterioridad, mientras que en el punto $x = -3/5$, mínimo $y(-3/5) = -\frac{3}{25}\sqrt[3]{20} \approx -0{,}3$. En el punto $x = 0$ el gráfico hace contacto con la recta $y = x$, en tanto que en el punto $x = -1$ la tangente al gráfico es vertical, ya que

$$\lim_{x\to -1-0} y'(x) = +\infty. \quad \lim_{x\to -1+0} y'(0) = -\infty.$$

De (2) se deduce que sobre el intervalo $(-\infty; -6/5)$ la función es convexa hacia las y positivas, mientras que sobre los intervalos $(-6/5; -1)$ y $(-1; +\infty)$, convexa hacia las y negativas. El punto $x = -6{,}5$ es el de inflexión de la función

$$y\left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{6}{25}\sqrt[3]{5} \approx -0{,}4, \quad y'\left(-\frac{6}{5}\right) = \sqrt[3]{5} \approx 1{,}7.$$

Empleando estos resultados y después de calcular algunos puntos más del gráfico, trazamos un dibujo más preciso (fig. 92,*b*).▲

Ejemplo 4. Tracen el gráfico de la función

$$y(x)=\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}.$$

△ Transformemos la fórmula a la forma

$$y(x)=|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}.$$

La función dada está definida con $x\leqslant 2$ y con $x>3$, es positiva con $x\neq 0$ y $x\neq 2$, $y(0)=y(2)=0$. Como

$$\lim_{x\to 3+0} y(x)=+\infty,$$

$x=3$ es la asíntota vertical. Con $x\to\infty$, tenemos

$$y(x)=|x|\left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^{1/2}=|x|\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/2}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-1/2}=$$

$$=|x|\left(1-\frac{1}{x}+o(1/x)\right)\left(1+\frac{3}{2x}+o(1/x)\right)=$$

$$=|x|\left(1+\frac{1}{2x}+o(1/x)\right);$$

de aquí, con $x\to+\infty$, obtenemos

$$y(x)=x+\frac{1}{2}+o(1),$$

en tanto que con $x\to-\infty$

$$y(x)=-x-\frac{1}{2}+o(1).$$

Esto significa que $y=x+\frac{1}{2}$ es la asíntota con $x\to+\infty$, mientras que $y=-x-\frac{1}{2}$, la asíntota con $x\to-\infty$.

Señalemos, además, que $y(x)\sim 2\sqrt{2-x}$ con $x\to 2-0$ e $y(x)\sim\sim\sqrt{2/3}\,|x|$ con $x\to 0$ ($\sqrt{2/3}\approx 0{,}8$).

El primer esbozo del gráfico se ofrece en la fig. 93,*a*).

La función dada es en su campo de definición infinitamente derivable por doquier, salvo $x=0$ y $x=2$. Calculemos las derivadas

$$y'(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}\,\frac{2x^2-11x+12}{2(x-2)(x-3)}\operatorname{sign} x, \tag{3}$$

$$y''(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}\,\frac{11x-24}{4(x-2)^2(x-3)^2}\operatorname{sign} x. \tag{4}$$

De (3) hallamos que con $x = 3/2$ la función tiene máximo igual a $y(3/2) = \sqrt{3}/2 \approx 0,9$, mientras que con $x = 4$, mínimo $y(4) = 4\sqrt{2} \approx 5,7$. Con $x \to 2 - 0$ la tangente al gráfico se hace vertical, ya que

$$\lim_{x \to 2-0} y'(x) = +\infty.$$

Además, señalemos que

$$\lim_{x \to -0} y'(x) = -\sqrt{2/3}, \quad \lim_{x \to +0} y'(x) = \sqrt{2/3} \approx 0,8.$$

De (4) se deduce que con $x > 3$ y con $x < 0$ la función es convexa hacia las y negativas, en particular, esto significa que el gráfico se

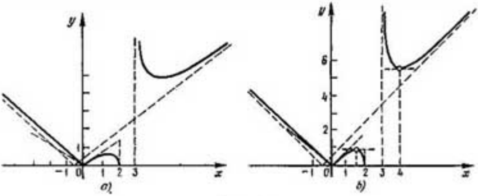


Fig. 93

aproxima superiormente a la asíntota tanto con $x \to +\infty$ como con $x \to -\infty$. Con $0 < x < 2$ la función es convexa hacia las y positivas. El gráfico de la función está representado en la fig. 93,b). ▲

Ejemplo 5. Construyan el gráfico de la función

$$y(x) = \frac{x^2 - 4}{x} e^{-5/(3x)}.$$

△ La función está definida con toda $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Su gráfico corta el eje de abscisas en los puntos $(2; 0)$, $(-2; 0)$. La función es positiva sobre los intervalos $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$ y negativa sobre los intervalos $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$.

En el punto $x = 0$ la función es discontinua y

$$\lim_{x \to -0} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +0} y(x) = -0.$$

De aquí se desprende que $x = 0$ es la asíntota vertical del gráfico con $x \to -0$; con ello, $y(x) \to +\infty$.

Haciendo uso de la fórmula de Taylor para el exponente, hallamos que

$$y(x)=\left(x-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{3x}+\frac{25}{18x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=$$
$$=x-\frac{5}{3}-\frac{47}{18x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to\infty.$$

De aquí se desprende que el gráfico tiene la asíntota oblicua $y=x-\frac{5}{3}$ y se aproxima a ella inferiormente con $x \to +\infty$, y con

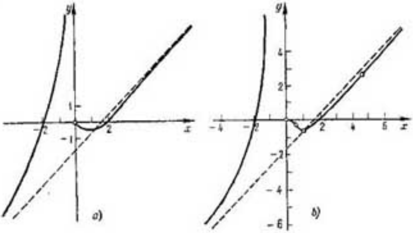


Fig. 94

$x\to-\infty$, superiormente. El esbozo previo del gráfico se muestra en la fig. 94,*a*).

Calculemos las derivadas

$$y'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+8x+20)}{3x^3}e^{-5/3x}, \tag{5}$$

$$y''(x)=-\frac{47x^2-240x+100}{9x^5}e^{-5/3x}. \tag{6}$$

De (5) hallamos que sobre los intervalos $(-\infty; 0)$ y $(1; +\infty)$ la función dada crece, en tanto que en el intervalo $(0; 1)$, decrece. Con $x=1$ la función tiene mínimo, $y(1)=-3e^{-5/3}\approx-0{,}6$. Además, hallamos que

$$\lim_{x\to+0} y'(x)=-\frac{20}{3}\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^3}e^{-5/3x}=0,$$

es decir, con $x\to+0$ la tangente al gráfico será horizontal.

De (6) hallamos los puntos de inflexión de la función

$$x_1 = 10\frac{12-\sqrt{97}}{47} \approx 0{,}5, \quad x_2 = 10\frac{12+\sqrt{97}}{47} \approx 4{,}6$$

y calculamos

$$y(x_1) \approx 0{,}2, \quad y(x_2) \approx 2{,}8.$$

Sobre los intervalos $(-\infty; 0)$ y $(x_1; x_2)$ la función es convexa hacia las y negativas, mientras que sobre los intervalos $(0; x_1)$, $(x_2; +\infty)$, convexa hacia las y positivas.

Como habitualmente, después de calcular algunos puntos más del gráfico, lo trazamos (fig. 94,*b*)).▲

Al construir una curva prefijada de forma paramétrica, es útil construir, previamente, los gráficos de las funciones $x(t)$ e $y(t)$. A veces, es cómodo dividir el eje t en intervalos, sobre los que ambas funciones $x(t)$ e $y(t)$ son monótonas. Sobre cada uno de semejantes intervalos este par de funciones define la función $y(x)$ o bien $x(y)$ y aquí se puede hacer uso de los procedimientos de análisis y trazado de los gráficos, indicados más arriba.

Ejemplo 6. Construyan la curva

$$x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}, \quad y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}.$$

△ Construyamos los gráficos de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ (fig. 95,*a*), *b*)). Indicamos algunos de los resultados del análisis de estas funciones: $x = -(t+1)/4$ y $t = 1$ son las asíntotas del gráfico de $x(t)$, $t = 1$, la asíntota del gráfico de $y(t)$,

$$x'_t = \frac{t(2-t)}{4(1-t)^2}, \quad y'_t = \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2},$$

$t = 0$ es el punto del mínimo de la función $x(t)$, $x(0) = 0$,
$t = 2$ es el punto del máximo de la función $x(t)$, $x(2) = -1$,
$t = 3/2$ es el punto del mínimo de la función $y(t)$, $y(3/2) = -27/32$.

Además, señalemos que:

a) $x \sim -\frac{1}{4}(t+1)$, $y \sim \frac{1}{8}(t^2+t+1)$ con $t \to -\infty$ y con $t \to +\infty$; de aquí se desprende que $y \sim \frac{1}{8}(16x^2+4x+1)$ con $t \to -\infty$ y con $t \to +\infty$.

b) $x \sim t^2/4$, $y \sim -t^3/8$ con $t \to 0$, de donde se deduce que $x \sim y^{2/3}$ con $t \to 0$.

c) $x \sim \frac{1}{4(1-t)}$, $y \sim \frac{1}{8(t-1)}$ con $t \to 1$, de donde se deduce que $y \sim -x/2$ con $t \to 1$.

Consideremos cinco intervalos: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 3/2)$, $(3/2; 2)$, $(2; +\infty)$. Sobre el primer intervalo x e y decrecen desde $+\infty$

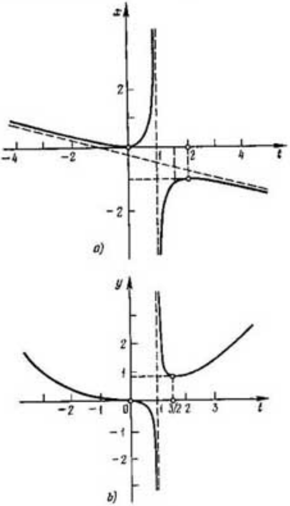


Fig. 95

hasta 0. De a) se desprende que

$$y \sim \frac{1}{8}(16x^2 + 4x + 1) \text{ con } x \to +\infty$$

(aquí, esto corresponde a que $t \to -\infty$), en tanto que de b) se desprende que

$$x \sim y^{2/3} \text{ o bien } y \sim x^{3/2} \text{ con } x \to +0$$

(esto corresponde a que $t \to -0$). Con estos datos hacemos el esbozo de la primera parte de la curva (fig. 96).

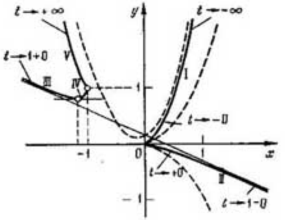


Fig. 96

En el segundo intervalo los valores de x crecen desde 0 hasta $+\infty$, en tanto que los valores de y decrecen desde 0 hasta $-\infty$. Con ello, de b) y c) se deduce que

$$x \sim y^{2/3} \text{ e } y \sim -x^{3/2} \text{ con } x \to +0$$

y que

$$y \sim -x/2 \quad \text{con } x \to +\infty$$

(aquí, esto corresponde a que $t \to 1-0$). Ahora, aclaremos si esta parte de la curva (también dicen, rama) tiene asíntota con $x \to +\infty$. Hallamos que

$$\lim_{t \to 1-0} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{t \to 1-0} \left(y(t) + \frac{1}{2} x(t) \right) = \frac{1}{8}.$$

Por lo tanto,

$$y = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{8}$$

es la asíntota oblicua de la curva. De acuerdo con este resultado se representa la segunda parte de la curva.

Sobre el intervalo (1; 3/2) los valores de x crecen desde $-\infty$ hasta $x(3/2) = -9/8$, en tanto que los de y decrecen desde $+\infty$ hasta 27/32. De c) se deduce que $y \sim -x/2$ con $x \to -\infty$ (esto

corresponde a que $t \to 1 + 0$). Lo mismo que en el caso anterior, establecemos que

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$$

es la asíntota de esta parte de la curva con $x \to -\infty$ (fig. 96).

Sobre el intervalo $(3/2;\ 2)$ los valores de x crecen desde $-9/8$ hasta -1, en tanto que los de y crecen desde $27/32$ hasta $y(2) = 1$. Sobre el intervalo $(2;\ +\infty)$ los valores de x decrecen desde -1 hasta $-\infty$, en tanto que los de y crecen desde 1 hasta $+\infty$, con ello, de acuerdo con a), $y \sim \frac{1}{8}(16x^2 + 4x + 1)$ con $x \to -\infty$.

En la fig. 96 se indica a qué valores de t corresponde una u otra parte de la curva.

Sobre cada uno de los intervalos considerados, las funciones $x(t)$ e $y(t)$ definen la función $y(x)$ (y la función $x(y)$). Con el fin de precisar el dibujo de la curva dirijámonos a sus derivadas.

Hallamos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{t\left(t - \frac{3}{2}\right)}{t-2},$$

$$y''_{xx} = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}$$

con $t \neq 1$, $t \neq 0$, $t \neq 2$. Examinando estas derivadas sobre los intervalos introducidos, establecemos que la I parte de la curva es el gráfico de una función creciente, convexa hacia las y negativas ($y'_x > 0$, $y''_{xx} > 0$), la II parte, el gráfico de una función decreciente, convexa hacia las y positivas ($y'_x < 0$, $y''_{xx} < 0$), la III parte, el gráfico de una función decreciente, convexa hacia las y negativas ($y'_x < 0$, $y''_{xx} < 0$), la IV parte, el gráfico de una función creciente, convexa hacia las y negativas ($y'_x > 0$, $y''_{xx} > 0$), la V parte, el gráfico de una función decreciente ($y'_x < 0$). En el último caso, la curva tiene punto de inflexión con $t = 3$, $x = x(3) = -9/8$, $y = y(3) = 27/16$. La curva es convexa hacia las y positivas con $x \in (-9/8;\ -1)$ y convexa hacia las y negativas con $x \in (-\infty;\ -9/8)$.

Señalemos, asimismo, que $\lim\limits_{x \to +0} y'_x = 0$ tanto para la primera como para la segunda parte de la curva (correspondientemente, $t \to -0$, $t \to +0$), además, $y'_x|_{x=-9/8} = y'_x|_{t=3/2} = 0$, es decir, las tangentes a la curva en el origen de coordenadas y en el punto $(-9/8;\ 27/32)$ son horizontales. En el punto $(-1;\ 1)$ la tangente a la curva es vertical, ya que $\lim\limits_{x \to -1} y_x = \lim\limits_{t \to 2} y'_x = \infty$.

Teniendo en cuenta estos nuevos datos hacemos un dibujo más preciso de la curva (fig. 97).▲

Ejemplo 7. Construyan el gráfico de la ecuación

$$x^3 + y^3 = 3xy \text{ (folio de Descartes).} \tag{7}$$

△ En el ejemplo 5 § 11 (figs. 73—75) ya fue realizado el análisis preliminar de esta curva que, en coordenadas polares ($x = r\cos\varphi$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$), es el gráfico de la función

$$r = \frac{3\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \mathrm{sen}^3\varphi}. \tag{8}$$

Completemos este análisis mediante la determinación de los extremos y el sentido de la convexidad y, de este modo, fundamentemos la fig. 75.

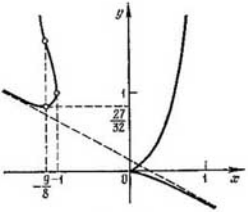


Fig. 97

Si $\cos\varphi = 0$, de (8) se deduce que, asimismo, $r = 0$, o sea, obtenemos el punto $x = y = 0$. Con $\cos\varphi \neq 0$, haciendo $t = \mathrm{tg}\,\varphi$, llegamos a la prefijación paramétrica de la curva

$$x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}. \tag{9}$$

De (9) y de que

$$x'_t = \frac{3(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}, \tag{10}$$

se desprende que la función $x(t)$ estrictamente crece sobre $(-\infty; -1)$ desde 0 hasta $+\infty$ y sobre $(-1; 1/\sqrt[3]{2})$, desde $-\infty$ hasta $\sqrt[3]{4}$ y estrictamente decrece sobre $(1/\sqrt[3]{2}; +\infty)$, desde $\sqrt[3]{4}$ hasta 0 (fig. 98). Sobre cada uno de estos intervalos la función $x(t)$ tiene su inversa y, por consiguiente, las funciones $x(t)$ e $y(t)$ definen la función $y(x)$ con $x \in (0\ +\infty)$ (I parte de la curva, fig. 99), con

$x \in (-\infty; \sqrt[3]{4})$ (II parte de la curva) y con $x \in (0; \sqrt[3]{4})$ (III parte). Hallamos

$$y'_t = \frac{3t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}$$

$$y'_x = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}, \qquad (11)$$

así como

$$y''_{xx} = \frac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)^3}. \qquad (12)$$

De (11) y (12) se desprende que $y'_x < 0$ con $t \in (-\infty; -1)$, es decir, $y(x)$ decrece al crecer x desde 0 hasta $+\infty$ (I parte de la

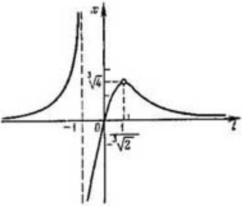


Fig. 98

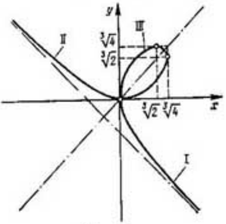


Fig. 99

curva), pero como $y''_{xx} > 0$, la curva es convexa hacia las y negativas y, por lo tanto, se aproxima a la asíntota superiormente. Con $t \in (-1; 1/\sqrt[3]{2})$ la función $y(x)$ tiene mínimo con $t=0$, es decir, $x=0$; al crecer x desde $-\infty$ hasta $x|_{t=1/\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$ los valores de $y(x)$ primero decrecen desde $+\infty$ hasta 0 (con $x=0$) y, a continuación, crecen desde 0 hasta $y|_{t=1/\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$. Con esto, $y''_{xx} > 0$, la curva es convexa hacia las y negativas y con $x \to -\infty$ se aproxima a la asíntota superiormente. Como $\lim\limits_{t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 0} y'_x = +\infty$ y $\lim\limits_{t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 0} y'_x = -\infty$, la tangente a la curva en el punto $x = \sqrt[3]{4}$, $y = \sqrt[3]{2}$ (corresponde a $t = 1/\sqrt[3]{2}$) es vertical.

En el tercer intervalo $t \in (1/\sqrt[3]{2};\ +\infty)$ la función $y(x)$ tiene máximo con $t = \sqrt[3]{2}$ y $x|_{t=\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$. Dicho máximo es igual a $y|_{t=\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$. Como $y''_{xx} < 0$ la curva es convexa hacia las y positivas. Si $x \to +0$, lo que corresponde a que $t \to +\infty$, entonces $y'_x \to +\infty$, o sea, en el punto $(0;\ 0)$ la curva «entra» con la tangente vertical.

Así, pues, hemos obtenido la plena fundamentación de la fig. 99 y encontrado dos puntos adicionales $(\sqrt[3]{4};\ \sqrt[3]{2})$ y $(\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{4})$ con las tangentes vertical y horizontal.▲

21.1. Aduzcan un ejemplo de tal función derivable $y = f(x)$, $x \in (0;\ +\infty)$, cuyo

1) gráfico tiene asíntota con $x \to +\infty$, pero el $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ no existe.

2) gráfico no tiene asíntota con $x \to +\infty$, pero el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ existe.

21.2. El gráfico de la función $y = f(x)$ tiene asíntota oblicua con $x \to +\infty$. Demuestren que si $f''(x) > 0$ con $x \geqslant x_0$, el gráfico se aproxima a esa asíntota superiormente, mientras que si $f''(x) < 0$, el gráfico se aproxima a la asíntota inferiormente.

Tracen los gráficos de las funciones (21.3—21.20):

21.3. 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$. 2) $y = -x^3 + 4x - 3$.

3) $y = (x-1)^2(x+2)$. 4) $y = \frac{x^3}{4} - 3x + 4$.

5) $y = x(x-1)^3$. 6) $y = (x+2)^2(x-1)^2$.

7) $y = (x-1)^3(x+1)^2$. 8) $y = 32x^2(x^2-1)^3$.

21.4. 1) $y = \frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$. 2) $y = \frac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$. 3) $y = \frac{20x^2}{(x-1)^3}$.

4) $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$. 5) $y = \frac{x^3}{x-1}$. 6) $y = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x}$.

7) $y = \frac{1+x^2}{1+(x-2)^2}$. 8) $y = \frac{5x^2+42x+77}{x^2+7x+14}$.

21.5. 1) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$. 2) $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$. 3) $y = \frac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$.

4) $y = \frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$. 5) $y = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}$. 6) $y = (x+1)\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$.

21.6. $y = \frac{x^4}{x^3+2}$. 2) $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$. 3) $y = 3x + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}$.

4) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$. 5) $y = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$. 6) $y = \frac{(x-1)^5}{(x-2)^4}$.

7) $y = \frac{x^5-8}{x^4}$. 8) $y = \frac{x^5}{x^4-1}$.

21.7. 1) $y=x+\sqrt{x^2-1}$. 2) $y=x-\sqrt{x^2-2x}$.
3) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. 4) $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$.
5) $y=\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x+1}$. 6) $y=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+4\sqrt{x}$.

21.8. 1) $y=\sqrt{2x^3+9x^2}$. 2) $y=\sqrt{x^2-x^3}$.
3) $y=\sqrt{x^3-3x}$. 4) $y=x^2\sqrt{x+1}$. 5) $y=x(x+1)^{3/2}$.
6) $y=\sqrt[4]{x^4-4x^3}$.

21.9. 1) $y=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$. 2) $y=\frac{x+8}{\sqrt{x^2+4x+16}}$.
3) $y=\frac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$. 4) $y=\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$. 5) $y=\frac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$.
6) $y=\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$. 7) $y=\frac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}}$. 8) $y=\sqrt{\frac{(x+6)^2}{x^2-4}}$.
9) $y=4\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2}}$. 10) $y=\sqrt{\frac{3x^2-4}{x^3}}$. 11) $y=\sqrt{\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3x}}$.
12) $y=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$. 13) $y=\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{2}$.

21.10. 1) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. 2) $y=\sqrt[3]{x^2(3-x)}$.
3) $y=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$. 4) $y=\sqrt[3]{x^3-4x}$.
5) $y=x\sqrt[3]{(x-5)^2}$. 6) $y=(x+1)^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$.
7) $y=(1+x)\,x^{2/3}$. 8) $y=x^3(x-1)^{2/3}$.
9) $y=(x^2-4)^{2/3}$. 10) $y=(x^2+8x+12)^{2/3}$.
11) $y=\sqrt[3]{x(3-x)^2}-x$. 12) $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-4}$.

21.11. 1) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. 2) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$.
3) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$. 4) $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{1+x}}$.
5) $y=\sqrt[3]{\frac{(3x-2)^2}{x-1}}$. 6) $y=\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}$.
7) $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$. 8) $y=\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$.

21.12. 1) $y=|x|\sqrt{1-x^2}$. 2) $y=x\sqrt{|x^2-1|}$.
3) $y=4\frac{\sqrt{|x-1|}}{x-2}$. 4) $y=\sqrt{|3x^2-x^3|}$.
5) $y=(x+1)\sqrt{|x^2-1|}$. 6) $y=\frac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}$.
7) $y=(x^2-1)\sqrt{x+1}$. 8) $y=\frac{\sqrt{|x|-1}}{x-2}$.

9) $y=|x|\sqrt[3]{1+3x}$. 10) $y=\sqrt[3]{x^2|2-x|}$.

21.13. 1) $y=e^x-x$. 2) $y=xe^{-2x}$. 3) $y=x^2e^{-x}$.

4) $y=x^3e^{-x}$. 5) $y=(x^2-2)e^{-2x}$.

6) $y=(1-x)e^{3x+1}$. 7) $y=e^{1-x^2}$.

8) $y=e^{4x-x^2}$. 9) $y=xe^{-x^2/2}$.

10) $y=(x^2+2)e^{-x^2}$. 11) $y=\frac{e^{-x}}{1-x}$.

21.14. 1) $y=e^{(1-x)/(1+x)}$. 2) $y=x^2e^{1/x}$.

3) $y=(x-2)e^{-1/x}$. 4) $y=\frac{x^2+2x-3}{x}e^{1/x}$.

5) $y=xe^{1/x^2}$.

21.15. 1) $y=\ln x-x+1$. 2) $y=\frac{\ln x}{x}$. 3) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

4) $y=x^2\ln x$. 5) $y=x\ln^2 x$. 6) $y=\frac{\ln^3 x}{x}$.

7) $y=\frac{x}{\ln x}$. 8) $y=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}$. 9) $y=x^2-2\ln x$.

21.16. 1) $y=\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. 2) $y=\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$.

3) $y=\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^2 x$. 4) $y=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

5) $y=\cos 3x+3\cos x$.

21.17. 1) $y=\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 3x$. 2) $y=\cos x\cos 2x$.

3) $y=\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$.

21.18. 1) $y=\frac{\cos 2x}{\cos x}$. 2) $y=\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen} x}$. 3) $y=2x-\operatorname{tg} x$.

21.19. 1) $y=\frac{x}{2}-\operatorname{arctg} x$. 2) $y=\frac{1}{\operatorname{arcctg} x}$.

3) $y=|x|\operatorname{arctg} x$. 4) $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arcctg} x$.

5) $y=\frac{3}{2}x-\arccos\frac{1}{x}$. 6) $y=\operatorname{arcsen}\frac{2x}{1+x^2}$.

7) $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$. 8) $y=\frac{x}{2}-\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

21.20. 1) $y=e^{\cos x}$. 2) $y=e^{-\operatorname{arctg} x}$. 3) $y=\operatorname{sen} x-\ln\operatorname{sen} x$.

4) $y=x^x$. 5) $y=(1+x)^{1/x}$. 6) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

21.21. Tracen los gráficos de las funciones sin analizar la convexidad:

1) $y=x^{1/x}$. 2) $y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $x>0$. 3) $y=\cos^3 x+\operatorname{sen}^3 x$.

4) $y = \operatorname{sen} 5x - 5 \operatorname{sen} x$. 5) $y = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2 - \operatorname{sen} x}$.

6) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$. 7) $y = 2\ln x - 5 \operatorname{arctg} x$.

8) $y = \frac{1}{1+x^2} e^{1/(1-x^2)}$. 9) $y = \frac{x^2}{x^2-4} e^{1/x}$.

21.22. Tracen los gráficos de las funciones $y = f(x)$ prefijadas de forma paramétrica con las ecuaciones:

1) $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$.

2) $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6 \operatorname{arctg} t$.

3) $x = \frac{t^3}{1+t^2}$, $y = \frac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$.

4) $x = \ln \operatorname{sen}(t/2)$, $y = \ln \operatorname{sen} t$.

5) $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$ (*cicloide*).

6) $x = \cos t + \ln \operatorname{tg}(t/2)$, $y = \operatorname{sen} t$ (*tractriz*).

Construyan las curvas (**21.23 — 21.25**):

21.23. 1) $x = t^3 + 2t^2 + t$, $y = -2 + 3t - t^3$.

2) $x = (t-1)^2(t-2)$, $y = (t-1)^2(t-3)$.

3) $x = \frac{1}{t(t+1)}$, $y = \frac{(t+1)^2}{t}$. 4) $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t^2-1}{t}$.

5) $x = \frac{(t+1)^2}{t}$, $y = \frac{t+1}{t+2}$. 6) $x = \frac{t^2}{t^2-1}$, $y = \frac{t^2+1}{t+2}$.

7) $x = \frac{t^2+1}{t}$, $y = \frac{t^2+1}{t^2}$.

21.24. 1) $x = \frac{t^2 + 6t + 5}{3}$, $y = \frac{t^3 - 54}{2t}$.

2) $x = \frac{t^2}{1-2t}$, $y = \frac{t^2}{1-2t}$. 3) $x = \frac{t^2}{1+t^3}$, $y = \frac{t^3}{1+t^3}$.

4) $x = t^3 - 3t$, $y = \left(\frac{t-1}{t}\right)^2$. 5) $x = \frac{1}{t-t^3}$, $y = \frac{1}{t-t^3}$.

6) $x = \frac{1}{t^3 - t^2}$, $y = \frac{1}{t^2 - t}$. 7) $x = \frac{1}{t-t^4}$, $y = \frac{t^4}{1-t^4}$.

8) $x = \sqrt{2}\,\frac{t+t^3}{1+t^4}$, $y = \sqrt{2}\,\frac{t-t^3}{1+t^4}$.

21.25. 1) $x = e^t - t$, $y = e^{2t} - 2t$. 2) $x = te^t$, $y = te^{-t}$.

3) $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t$, $y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t$.

4) $x = \frac{e^t}{t}$, $y = (t-1)^2 e^t$. 5) $x = \frac{e^t}{t+1}$, $y = \frac{e^{-t}}{t+1}$.

6) $x = 2t + \ln|t-1|$, $y = t + \ln|t-1|$.

7) $x = t\ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$.

8) $x = 2t^2$, $y = \frac{t^2}{2} - 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$.

9) $x=\frac{\operatorname{sen} t+\cos t}{\operatorname{sen} t}$, $y=\frac{\cos 2t}{\operatorname{sen} t}$.

10) $x=\operatorname{ctg} 2t$, $y=\frac{2\cos 2t-1}{2\cos t}$.

11) $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 2t$.

12) $x=2\cos 2t$, $y=2\cos 3t$.

13) $x=\operatorname{sen} 2t$, $y=\operatorname{sen} 3t$.

14) $x=\cos t+t\operatorname{sen} t$, $y=\operatorname{sen} t-t\cos t$, $t\geqslant 0$.

15) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\operatorname{sen} t$.

Construyan la curva (**21.26—21.27**):

21.26. 1) $x^3-y^3=1$. 2) $x^4+y^4=1$.
3) $y^2(1-x)=x^2(1+x)$. 4) $3y^2x=x^3-2$.
5) $y^2=2x^3-x^4$. 6) $y^2=9(x^2-x^6)$.
7) $y^2x^2=4(x-1)$. 8) $y^2(2-x)=x^3$.
9) $y^2x^4=(x^2-1)^3$. 10) $y^2(x^2-1)=x^4-4x^2$.
11) $(x-1)\left(y^2-\frac{x^2}{3}\right)=\frac{4}{3}x^2$.

21.27. 1) $(x-y+1)(x+y-1)=1$.
2) $(x-2y)^2+(4x+2y)^2=4$. 3) $x^2y^2+y=1$.
4) $xy^2+x^2y=1$. 5) $xy(x-y)+x+y=0$.
6) $x^3+y^3=6x^2$.

21.28. Prefijen la curva, dada como el gráfico de una ecuación, de forma paramétrica y constrúyanla:
1) $x^4-y^4=4x^2y$. 2) $(x+y)^3=xy$.
3) $(x+y)^4=x^2+y^2$. 4) $x^4-2x^2y^2+y^3=0$.
5) $x^3-y^3+2x-y=0$. 6) $(x^2-y^2)(x-y)=1$.
7) $x^{2/3}+y^{2/3}=1$. 8) $x^{4/3}-y^{4/3}=1$.

21.29. Construyan la curva pasando a las coordenadas polares:
1) $(x^2+y^2)x=y$. 2) $(x^2+y^2)^2=xy$.
3) $x^4+y^4=x^2+y^2$. 4) $x^4+y^4=2xy$. 5) $x^4-y^4=xy$.
6) $x^4-y^4=x^2-2y^2$. 7) $(x^2+y^2-2x)^2=x^2+y^2$.
8) $(x^2+y^2-x)^2=4(x^2+y^2)$.

21.30. Construyan la curva:
1) $x^4+y^4-6y^3+8x^2y=0$.
2) $(x^2+y^2)^3=27x^2y^2$. 3) $x^4+2y^3=4x^2y$.
4) $(x^2-y^2)(x-y)=4x^2$. 5) $x^2y^2+y^4=4x^2$.
6) $x^3+y^3=x^2+y^2$. 7) $x^2y^2=x^3-y^3$. 8) $x^y=y^x$.

21.31. Construyan el gráfico de la función en coordenadas polares:
1) $r=|\operatorname{sen} 2\varphi|$. 2) $r=\cos 3\varphi$. 3) $r=\operatorname{tg} 2\varphi$.
4) $r=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} 3\varphi}}$. 5) $r=2+\cos\varphi$. 6) $r=1+\cos\varphi$.
7) $r=1+2\cos\varphi$. 8) $r=1-2\cos\varphi$. 9) $r=\frac{2}{\cos\varphi}-1$.
10) $r=1+\operatorname{tg}\varphi$.

§ 22. Problemas para hallar los valores máximo y mínimo absolutos

En los problemas aplicados, al hallar el valor máximo o mínimo absolutos de la función derivable $f(x)$ sobre el segmento $[a; b]$ o sobre el intervalo $(a; b)$, la ecuación $f'(x) = 0$ tiene, por regla, la solución única $x_0 \in (a; b)$, con la particularidad de que la derivad $f'(x)$ tiene un mismo signo sobre el intervalo $(a; x_0)$ y signo contrario sobre el intervalo $(x_0; b)$. En tal caso, el número $f(x_0)$ no sólo es el extremo local de la función f, sino también su valor máximo absoluto sobre el intervalo $(a; b)$ o sobre el segmento $[a; b]$ si la derivada cambia el signo más por el menos al pasar por el punto x_0 y el valor mínimo absoluto si la derivada cambia el signo menos por el más al pasar por el punto x_0.

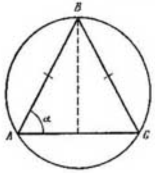


Fig. 100

Ejemplo 1. Entre los triángulos isósceles inscritos en el círculo dado, hallen el triángulo con el perímetro máximo.

△ Sea que el triángulo ABC está inscrito en un círculo de radio R, con ello $AB = BC$ (fig. 100). Designemos el $\angle BAC = \alpha$. Según el teorema de los senos $AB = BC = 2R \operatorname{sen} \alpha$, $AC = 2R \operatorname{sen} (\pi - 2\alpha) = 2R \operatorname{sen} 2\alpha$, por ello el perímetro del triángulo ABC es igual a

$$P(\alpha) = 2R(2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha),$$

donde $0 < \alpha < \pi/2$, de donde hallamos

$$P'(\alpha) = 4R(\cos 2\alpha + \cos \alpha) = 4R(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1) = 4R(2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1).$$

La ecuación $P'(\alpha) = 0$ tiene sobre el intervalo $(0; \pi/2)$ la única solución $\alpha = \pi/3$, con ello $P'(\alpha) > 0$ con $\alpha \in (0; \pi/3)$ y $P'(\alpha) < 0$ con $\alpha \in (\pi/3; \pi/2)$. Por lo tanto, el número $P(\pi/3)$ es el valor máximo absoluto de la función $P(\alpha)$ sobre el intervalo $(0; \pi/2)$. Pero si $\angle BAC = \alpha = \pi/3$, entonces $\angle BCA = \pi/3$ y, por consiguiente, $\angle ABC = \pi/3$, es decir, ABC es un triángulo equilátero. Así, pues, entre todos los triángulos isósceles, inscritos en el círculo dado, el perímetro máximo lo tiene el triángulo equilátero. ▲

Ejemplo 2. Determinen las dimensiones de una caja cerrada de volumen v con base cuadrada, para cuya fabricación se consume la cantidad mínima de material.

△ Sean x el lado de la base de la caja, h, su altura, S, su área total. Entonces,

$$S = 2x^2 + 4xh, \quad v = x^2h,$$

de donde

$$S(x) = 2x^2 + \frac{4v}{x}$$

y, por consiguiente,

$$S'(x) = 4\left(x - \frac{v}{x^2}\right).$$

La ecuación $S'(x) = 0$ con $x > 0$ tiene la solución única $x_0 = \sqrt[3]{v}$, con ello al pasar por el punto x_0 la función $S'(x)$ cambia el signo menos por el más. Por lo tanto, x_0 es el punto del mínimo de la función $S(x)$, mientras que el número $S(x_0)$ es el valor mínimo absoluto de esta función con $x > 0$. De la fórmula $v = x^2h$ se desprende que si $x = \sqrt[3]{v}$, entonces $h = \sqrt[3]{v}$. De este modo, la altura de la caja debe ser igual al lado de la base, o sea, la caja ha de ser un cubo con arista igual a $\sqrt[3]{v}$. ▲

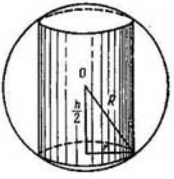


Fig. 101

Ejemplo 3. Hallen el radio de la base del cilindro de mayor volumen inscrito en una esfera de radio R.

△ Sean r y h el radio de la base y la altura del cilindro inscrito en una esfera de radio R, v, el volumen del cilindro (fig. 101).

Entonces

$$v = \pi r^2 h, \quad (h/2)^2 + r^2 = R^2,$$

de donde

$$v = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}, \quad \text{donde} \quad 0 < r < R.$$

Designemos $t = r^2$, entonces

$$v = 2\pi t \sqrt{R^2 - t}, \quad 0 < t < R^2.$$

Consideremos la función

$$v^2 = 4\pi^2 t^2 (R^2 - t).$$

Como $v \geqslant 0$, la función $v(t)$ tiene sobre el intervalo $(0; R^2)$ los mismos puntos del extremo que la función

$$v^2/4\pi^2 = t^2 (R^2 - t) = f(t).$$

Hallemos los puntos críticos de la función $f(t)$, para lo cual resolvemos la ecuación

$$f'(t) = 2tR^2 - 3t^2 = 0.$$

Esta ecuación tiene sobre el intervalo $(0; R^2)$ la única solución $t_0 = 2R^2/3$, con ello t_0 es el punto del máximo de la función, en tanto que el número $f(t_0)$, el valor máximo absoluto de la función $f(t)$ sobre el intervalo $(0; R^2)$. De modo que con $r = \sqrt{t_0} = R\sqrt{2/3}$ la función v tiene el valor máximo absoluto, es decir, el radio de la base del cilindro inscrito en la esfera de radio R y que tiene el máximo volumen es igual a $R\sqrt{2/3}$.▲

22.1. Entre todos los rectángulos que tienen el área dada S hallen aquel que: 1) tenga el menor perímetro; 2) tenga la menor diagonal.

22.2. Hallen la mayor área del rectángulo inscrito en un círculo de radio R.

22.3. Hallen en la hipérbola $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ el punto más próximo al punto $(3; 0)$.

22.4. Hallen en la parábola $y = x^2$ el punto más próximo al punto $A\ (2; 1/2)$.

22.5. Hallen el área máxima de un rectángulo cuyos dos vértices yacen en los ejes Ox y Oy de un sistema cartesiano de coordenadas, el tercero en el punto $(0; 0)$ y el cuarto está en la parábola $y = 3 - x^2$.

22.6. Hallen el coeficiente angular de la recta que pasa por el punto $A\ (1; 2)$ y que corta del primer ángulo de coordenadas el triángulo de área mínima.

22.7. Hallen la longitud del lado del trapecio que tenga el perímetro mínimo entre todos los trapecios isósceles con área prefijada S y ángulo α entre el lado y la base inferior.

22.8. Por el punto $A\ (2; 1/4)$ se trazan rectas que cortan los semiejes positivos en los puntos B y C. Hallen la ecuación de aquella recta para la que el segmento BC tiene la longitud mínima.

22.9. Hallen los ángulos agudos del triángulo rectángulo que tiene el área máxima entre todos los triángulos en los que la suma de las longitudes de uno de los catetos y la hipotenusa es constante.

22.10. Hallen la longitud mínima del segmento que divide el triángulo equilátero de lado a en dos figuras de áreas iguales.

22.11. Determinen los ángulos del triángulo ABC de área máxima, si se da la longitud de su base BC y sabemos que el ángulo BAC es igual a α.

22.12. Hallen los lados del rectágulo de área máxima inscrito en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

de forma que los lados del rectángulo sean paralelos a los ejes de la elipse.

22.13. Calculen el área máxima del trapecio inscrito en un semicírculo de radio R de forma que la base inferior del trapecio sea el diámetro del semicírculo.

22.14. La sección de un túnel tiene la forma de un rectángulo que termina en un semicírculo. Determinen el radio del semicírculo con el que el área de la sección será la máxima si el perímetro de la sección es igual a p.

22.15. ¿Por qué punto de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

se debe trazar una tangente de forma que sea la mínima el área del triángulo formado por esta tangente y los semiejes positivos Ox y Oy?

22.16. Una hoja de cartón tiene la forma de un rectángulo con lados a y b. Cortando por sus ángulos cuadrados y doblando las partes sobresalientes de la figura cruciforme, obtenemos una caja abierta por arriba, cuya altura es igual al lado del cuadrado. ¿Cuál debe ser el lado del cuadrado para que el volumen de la caja sea el máximo?

22.17. Con tres tablas de igual anchura hay que ensamblar un canalón. ¿Con ángulo de inclinación de las paredes laterales el área de la sección transversal del canalón será la máxima?

22.18. Hallen la altura de un prisma triangular regular del volumen máximo, inscrito en una esfera de radio R.

22.19. Un círculo de radio R está dividido en dos segmentos con la recta l alejada del centro del círculo a una distancia h. Entre todos los rectángulos inscritos en el menor de dichos segmentos hallen aquel que tiene el área máxima.

22.20. Hallen el volumen máximo de un cilindro, cuyo perímetro en la sección axial es igual a a.

22.21. Calculen el volumen máximo de un cilindro, cuya área total es igual a S.

22.22. Una lata de conservas tiene forma cilíndrica. Hallen las más ventajosas dimensiones de la lata, es decir, determinen la razón entre el diámetro de la base y la altura del cilindro con la que tenga el volumen máximo con la superficie total prefijada.

22.23. ¿Cómo debe ser una caldera constituida por un cilindro terminado en dos semiesferas, con las paredes del grosor prefijado, para que con la capacidad prefijada v para su construcción se emplee la cantidad mínima de material?

22.24. Determinen la razón entre el radio de la base y la altura de un cilindro que, con el volumen dado, tenga la superficie total mínima.

22.25. Hallen el área total máxima de un cilindro inscrito en una esfera de radio R.

22.26. Hallen el cilindro con el volumen máximo entre todos los cilindros inscritos en un cubo con arista a, de forma que el eje de cada cilindro coincida con la diagonal del cubo, en tanto que las circunferencias de las bases hagan contacto con las caras del cubo.

22.27. Hallen la altura del cono de volumen máximo, inscrito en una esfera de radio R.

22.28. Hallen la altura del cono de volumen mínimo circunscrito a una esfera de radio R.

22.29. En un cono, en el que el radio de la base es igual a R y la altura H, está inscrito el cilindro de volumen máximo. Hallen el radio de la base y la altura de dicho cilindro.

22.30. De una chapa redonda de hojalata, se corta un sector que se enrolla en forma de un embudo cónico. ¿Cuál debe ser el ángulo del sector para que el embudo tenga el volumen máximo?

22.31. Hallen el área lateral mínima de un cono de volumen v.

22.32. Hallen el volumen máximo de un cono con la generatriz l dada.

22.33. Hallen el volumen mínimo de un cono circunscrito a una semiesfera de radio r (se supone que las bases de la semiesfera y del cono están en un mismo plano y son concéntricas).

22.34. Consideremos un haz de rectas que pasan por el punto $M(a;\ b)$, donde $a > 0$, $b > 0$, y que cortan los semiejes positivos Ox y Oy. Hallen la longitud mínima del segmento PQ, donde P y Q son los puntos de intersección de una recta del haz con los semiejes positivos.

22.35. Una piedra ha sido lanzada a velocidad inicial prefijada bajo el ángulo α respecto al horizonte. Despreciando la resistencia del aire, determinen con qué α la distancia de vuelo de la piedra será la máxima.

22.36. La resistencia interna de un elemento galvánico es igual a r. ¿Con qué resistencia externa la potencia de la corriente que suministra a la red exterior dicho elemento será la máxima?

22.37. A una taza que tiene forma de una semiesfera de radio R se introduce un macho homogéneo de largura l, donde $2R < l \leqslant 4R$. Hallen la posición de equilibrio del macho.

22.38. Hacia un río cuya anchura es igual a a, bajo ángulo recto, se ha construido un canal de anchura b. Hallen la longitud máxima del tronco que puede pasar del río al indicado canal.

22.39. Con el fin de reducir el rozamiento del líquido por las paredes de un canal, el área que el agua humedece debe ser la menor posible. Muestren que la mejor forma de un canal abierto rectangular, con el área de la sección transversal prefijada, es tal que, con ella, la anchura del canal es dos veces mayor que su altura.

22.40. De un tronco redondo se corta una viga de sección trans-

versal rectangular. Considerando que la resistencia de la viga es proporcional a ah^2, donde a es la base, h, la altura del rectángulo, hallen tal razón h/a con la que la viga tendrá la resistencia máxima.

22.41. Un recipiente con pared vertical de altura h se encuentra sobre un plano horizontal. De un orificio en la pared del recipiente fluye un chorro. Determinen la posición del orificio con la que el alcance del chorro será el máximo si la velocidad del líquido que fluye es igual a$\sqrt{2gx}$, donde x es la profundidad del orificio (ley de Torricelli).

22.42. La fábrica A debe unirse mediante una carretera con la línea férrea rectilínea en la que se encuentra el poblado B. La distancia AC desde la fábrica hasta el ferrocarril es igual a a, en tanto que la distancia BC por el ferrocarril es igual a b. El costo del transporte de las mercancías por la carretera es k veces ($k > 1$) mayor que por el ferrocarril. ¿En qué punto D del segmento BC hay que trazar la carretera desde la fábrica para que el costo del transporte de las mercancías desde la fábrica A hasta el poblado B sea el mínimo?

22.43. ¿A qué altura sobre el centro de una mesa redonda de radio R hay que situar una bombilla eléctrica para que la iluminación del borde de la mesa sea la máxima?

22.44. Un punto luminoso está situado en la línea de los centros de dos esferas y se encuentra fuera de ellas ¿Con qué posición del punto luminoso será máxima la suma de las áreas de las partes iluminadas de las superficies de las esferas?

22.45. Una carga que yace sobre el plano horizontal P ha de desplazarse con una fuerza aplicada a ella. Determinen el ángulo formado por dicha fuerza con el plano P, con el que el valor de la fuerza será el mínimo si el coeficiente de rozamiento de la carga es igual a k.

22.46. Un observador se encuentra frente a un cuadro colgado de una pared vertical. El borde inferior del cuadro está situado a una distancia a sobre el nivel de los ojos del observador, el borde superior, a una distancia b. ¿A qué distancia de la pared debe hallarse el observador para que el ángulo bajo el que ve el cuadro sea el máximo?

22.47. El punto A $(x_0;\ y_0)$ se dispone dentro de la parábola $y^2 = 2px$, $p > 0$, el punto B, en la propia parábola, F es su foco. Demuestren que la longitud de la quebrada ABF será la mínima si el segmento AB es paralelo al eje de la parábola y el ángulo FBA se divide por la mitad con la normal al punto B (principio del espejo parabólico).

22.48. Los puntos A y B están situados en los semiplanos superior e inferior del sistema cartesiano xOy, respectivamente. Una partícula está en movimiento por la quebrada AMB, donde M

es un punto en el eje Ox. Las velocidades de movimiento de la partícula en los semiplanos superior e inferior son iguales a v_1 y v_2, respectivamente. Demuestren que el tiempo de movimiento de la partícula será el mínimo si $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}$, donde α, β son los ángulos formados por los segmentos AM y BM con la normal al eje Ox (en óptica se llaman ángulos de incidencia y de reflexión, respectivamente).

§ 23. Resolución numérica de ecuaciones

El intervalo que contiene una sola raíz*) (una solución) de la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

lleva el nombre de *intervalo de aislamiento* de dicha raíz. *Separar las raíces* de una ecuación significa indicar el intervalo de aislamiento de cada una de ellas. Para separar las raíces se emplean, por regla, las siguientes afirmaciones.

Sea que la función f tiene valores de diferentes signos en los extremos del segmento $[a;\ b]$, es decir, $f(a)\,f(b) < 0$. Entonces:

1) Si f es continua sobre $[a;\ b]$, la ecuación (1) tiene sobre el intervalo $(a;\ b)$ al menos una raíz.

2) Si f es continua y estrictamente monótona sobre $[a;\ b]$, la ecuación (1) tiene sobre el intervalo $(a;\ b)$ una y sólo una raíz.

Ejemplo 1. Determinen el número de raíces de la ecuación y sepárenlas:

1) $2x^3 - 8x + 1 = 0$. 2) $e^{x-2} - x = 0$.

△1) Designemos $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$. Ya que

$f(-3) = -29 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -5 < 0$, $f(2) = = 1 > 0$,

la ecuación dada tiene una raíz en cada uno de los intervalos $(-3;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 2)$. Un polinomio de tercer grado tiene no más de tres raíces, por lo que cada uno de los indicados intervalos sólo contiene una raíz, es decir, es un intervalo de aislamiento.

2) Consideremos la función $f(x) = e^{x-2} - x$. Esta ecuación no tiene solución con $x \leqslant 0$, ya que $f(x) > 0$ con $x \leqslant 0$.

La función f toma el valor mínimo absoluto con $x = 2$ y $f(2) = = -1 < 0$. Como $f(0) = e^{-2} > 0$ y ya que la función f estrictamente decrece sobre $[0;\ 2]$ (ya que $f'(x) = e^{x-2} - 1 < 0$ con $0 \leqslant \leqslant x < 2$), la ecuación dada tiene y, con ello, una sola raíz sobre $(0;\ 2)$. Como intervalo de aislamiento para esta raíz se puede tomar el intervalo menor $(0;\ 1)$, ya que $f(1) = e^{-1} - 1 < 0$. Con $x > 2$ la función f estrictamente crece, ya que $f'(x) > 0$ y, además.

*) Por doquier en este apartado, si no se especificó otra cosa, vamos sólo a tratar las raíces reales de las ecuaciones.

$f(3) = e - 3 < 0$, en tanto que $f(4) = e^2 - 4 > 0$. De aquí se deduce que la ecuación dada tiene una raíz en el intervalo (3; 4) y, con ello, sólo una. Así, pues, la ecuación dada tiene dos raíces, (0; 1) y (3; 4) que son los intervalos de aislamiento de estas raíces.▲

Según el conocido gráfico de la función $y = f(x)$, con más o menos precisión, es posible indicar su punto de intersección con el eje de abscisas, o sea, hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. como suele decirse, resolver la ecuación de forma gráfica.

A veces, puede ser posible representar la ecuación $f(x) = 0$ en tal forma $g(x) = h(x)$, en la que es más fácil construir los gráficos de las funciones g y h, que el de f. En este caso, los valores aproximados de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ se hallan como las abscisas de los puntos de intersección de los gráficos de las funciones g y h.

Ejemplo 2. Gráficamente hallen el valor aproximado de la raíz menor de la ecuación:

1) $2x^3 - 8x + 1 = 0$. 2) $e^{x-2} - x = 0$.

△ 1) Hacer uso del gráfico de la función $2x^3 - 8x + 1$ es incómodo, ya que al alcanzar $x = -3$ ella tiene un valor de -29 y sería necesario tomar una escala demasiado pequeña. Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{4}(2x^3 - 8x + 1)$. Su gráfico está representado en la fig. 102: (con $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ y $x = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$, la función tiene, correspondientemente, máximo y mínimo) y en la tabla se aducen varios valores de la función. Del estudio de la fig. 102 vemos que la ecuación $f(x) = 0$ (equivalente a la dada) tiene tres

x	$-5/2$	-2	-1
$f(x)$	$-41/16$	$1/4$	$7/4$

raíces: $x_1 \approx -2$, $x_2 \approx 0$, $x_3 \approx 2$. Así, pues, la raíz menor es x_1, para la cual se puede tomar el valor aproximado $x_1^* = -2{,}1$ (véase la fig. 102).

Empleando las propiedades del gráfico de la función f, con ayuda de sencillos cálculos, hallamos el error del valor aproximado que hemos tomado. La tabla contiene las coordenadas de tres puntos A, B, C del gráfico (fig. 103). Con $x < 0$ la función $y = f(x)$ es convexa hacia las y positivas, por lo que la parte AB de su gráfico está situada a la izquierda del segmento AB (fig. 103). De aquí se desprende que si x_1' es la abscisa del punto de intersección del segmento AB con

el eje Ox, entonces $x_1' > x_1$. La ecuación de la recta AB tiene la forma

$$\frac{y+\frac{41}{16}}{\frac{1}{4}+\frac{41}{16}}=\frac{x+\frac{5}{2}}{-2+\frac{5}{2}}.$$

Poniendo aquí $y = 0$, hallamos $x_1' = -92/45$.

De la convexidad de la función hacia las y positivas con $x < 0$ también se deduce que la raíz x_1 yace a la derecha del punto de inter-

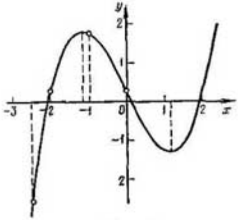


Fig. 102

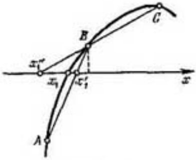


Fig. 103

sección de la recta BC con el eje Ox, es decir, si x_1'' es la abscisa de este punto, $x_1'' < x_1$. Componemos la ecuación de la recta BC:

$$\frac{y-\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{x+2}{-1+2}$$

y, haciendo $y = 0$, hallamos $x_1'' = -13/6$. Así, pues,

$$-13/6 < x_1 < -92/45.$$

El valor aproximado de $x_1^* = -2{,}1$ también satisface estas desigualdades y, por ello,

$$|x_1^* - x_1| < \text{máx}\{x_1' - x_1^*,\ x_1^* - x_1''\} = 1/15.$$

2) Escribamos la ecuación en la forma $x = e^{x-2}$. Los gráficos de las funciones $y = x$ e $y = e^{x-2}$ se muestran en la fig. 104. Vemos que la ecuación tiene dos raíces. Como el valor aproximado de la raíz menor x_1 tomamos 0,2.

Haciendo uso de que la función e^{x-2} es creciente y convexa hacia las y negativas, es fácil apreciar el error de esta aproximación. Tomemos en el gráfico los puntos $A\ (0;\ e^{-2})$ y $B\ (1;\ e^{-1})$. El segmento

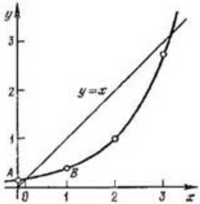


Fig. 104

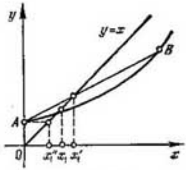


Fig. 105

AB corta la recta $y = x$ en el punto cuya abscisa x_1' es mayor que la raíz x_1 (fig. 105). En la ecuación de la recta AB:

$$\frac{y-e^{-2}}{e^{-1}-e^{-2}}=x$$

ponemos $y = x$ y hallamos

$$x_1' = \frac{1}{e^2-e+1} < 0{,}177.$$

La recta trazada por el punto A paralelamente al eje de abscisas, corta la recta $y = x$ en el punto cuya abscisa $x_1'' = e^{-2}$ es menor que la raíz x_1 (fig. 105). De este modo

$$0{,}135 < \frac{1}{e^2} < x_1 < \frac{1}{e^2-e+1} < 0{,}177.$$

Estimemos el error del valor aproximado de $x_1 \approx 0{,}2$:

$$0{,}2 - x_1 < 0{,}2 - 0{,}135 = 0{,}065.$$

Los cálculos realizados permiten indicar un valor aproximado mucho mejor

$$x_1^* = \frac{1}{2}\,(x_1' + x_1'') = \frac{2e^2-e+1}{2e^2\,(e^2-e+1)} \approx 0{,}156$$

con un error

$$|x_1^* - x_1| \leqslant \frac{1}{2}\,(x_1' - x_1'') = \frac{e-1}{2e^2\,(e^2-e+1)} < 0{,}021.$$

Redondeando los cálculos, tomamos definitivamente $x_1^* = 0{,}156$ con error de redondeo de $5 \cdot 10^{-4}$ y error total

$$|x_1 - 0{,}156| < 0{,}021 + 0{,}0005 < 0{,}022. \blacktriangle$$

El método de la *división por la mitad* (*bisección*) se emplea para hallar la primera aproximación (con frecuencia se llama la nula) a la raíz de la ecuación, así como para mejorar los límites de la raíz, es decir, con el fin de hallar un intervalo de aislamiento suficientemente pequeño.

Sea $f(x)$ continua sobre el segmento $[a; b]$, $(a; b)$ es el intervalo de aislamiento de la raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$. Determinemos el signo de $f(c)$ en el punto medio c del segmento $[a; b]$ (si $f(c) = 0$, la raíz $\xi = c$ ya está hallada) y sea $[a_1; b_1]$ aquel de los segmentos $[a; c]$, $[c; b]$ en cuyos extremos la función $f(x)$ tiene valores de distintos signos. Por analogía, elegimos el segmento $[a_2; b_2]$, dos veces menor que $[a_1; b_1]$, etc. Como resultado, obtenemos un conjunto de segmentos encajados $\{[a_n; b_n]\}$, la longitud del n-ésimo segmento es igual a $(b - a)/2^n$ o bien en cierto paso hallamos la raíz ξ. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

y

$$0 \leqslant \xi - a_n \leqslant (b - a)/2^n, \quad 0 \leqslant b_n - \xi \leqslant (b - a)/2^n. \qquad (2)$$

Con estas fórmulas podemos determinar el número de pasos suficiente para alcanzar la precisión predeterminada.

El método de las *iteraciones* (método de las *aproximaciones sucesivas*) se utiliza para hallar con elevada precisión los valores aproximados de las raíces de las ecuaciones.

Sea que la ecuación $f(x) = 0$ tiene sobre $[a; b]$ la única raíz ξ. Para esta ecuación se elige sobre $[a; b]$ una ecuación equivalente a ella de la forma

$$x = \varphi(x) \qquad (3)$$

y el valor de $x_0 \in [a; b]$ de forma que esté definida la sucesión

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (4)$$

y que ésta converja hacia la raíz ξ.

Las condiciones suficientes de la convergencia del proceso de iteraciones son las siguientes.

Sea la función φ derivable sobre $[a; b]$ y

$$|\varphi'(x)| \leqslant k < 1, \quad x \in [a; b]. \qquad (5)$$

Sean $x_0 \in [a; b]$ y $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in [a; b]$ para toda $n \in \mathbf{N}$. Entonces, la ecuación (3) tiene sobre $[a; b]$ la única raíz ξ y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

Para la existencia de la sucesión (4) con la condición (5) es suficiente elegir

$$x_0 \in \left[a + \frac{d}{3};\ b - \frac{d}{3}\right], \text{ donde } d = b - a.$$

Con el fin de efectuar la estimación del error del método de iteraciones se utilizan las desigualdades

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{6}$$

aquí y más adelante k se toma de la condición (5). Para estimar el número n de iteraciones con el error prefijado, se puede emplear la fórmula

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{7}$$

Con el error prefijado Δ se continúa el proceso iterativo hasta obtener la estimación

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{1-k}{k}\Delta, \tag{8}$$

entonces, de antemano, $|\xi - x_n| \leqslant \Delta$.

El cálculo de las aproximaciones x_n transcurre, por regla, con redondeo y el error de éste se debe tomar en consideración al hallar el error de la aproximación.

En el proceso de iteración convergente la sucesión $|\xi - x_n|$ tiende a cero monótonamente.

Sea que la función φ satisface la condición (5) y $\varphi'(x) \geqslant 0$ sobre $[a; b]$; entonces, la sucesión (4) monótonamente converge hacia la raíz ξ. Si, al contrario, $\varphi'(x) \leqslant 0$ sobre $[a; b]$, una de las sucesiones $\{x_{2k}\}$ y $\{x_{2k-1}\}$ crece y la otra, decrece. En semejante caso, la raíz ξ yace entre los dos términos vecinos de las sucesiones x_n y x_{n+1} para cualquier $n \in \mathbf{N}$ y, por lo tanto, los signos decimales estacionarios de la aproximación x_n pertenecen, asimismo, a la raíz ξ.

Al elegir la ecuación (3) hay que tomar en consideración que mientras menor sea el valor de k de la condición (5) menos iteraciones se requerirá para alcanzar la precisión prefijada (como dicen, con mayor rapidez converge el proceso de iteraciones).

Ejemplo 3. 1) Indiquen un proceso convergente de iteración para calcular la raíz menor de la ecuación

$$2x^3 - 8x + 1 = 0.$$

2) Con ayuda de iteraciones hallen el valor aproximado de la raíz menor de la ecuación

$$x - \ln x - 2 = 0$$

con un error no más de $5\cdot 10^{-5}$.

△ 1) En el ejemplo 2 fue hallado el intervalo $(-13/6;\ -92/45)$ de aislamiento de la raíz menor ξ de la ecuación dada. Sobre este intervalo la ecuación es equivalente a cada una de las siguientes ecuaciones:

$$x = \frac{2x^3+1}{8} = \varphi_1(x),$$

$$x = \frac{8x-1}{2x^2} = \varphi_2(x),$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{8x-1}{2}} = \varphi_3(x).$$

Para las derivadas $\varphi_k'(x)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ sobre el segmento $\left[-\frac{13}{6};\ -\frac{92}{45}\right]$ tenemos las estimaciones

$$|\varphi_1'(x)| = \frac{3}{4}x^2 > \frac{3}{4}\cdot 4 = 3 > 1,$$

$$|\varphi_2'(x)| = \left|\frac{1-4x}{x^3}\right| \geqslant \frac{1+4\cdot\frac{13}{6}}{\left(\frac{13}{6}\right)^3} > 0{,}95,$$

$$|\varphi_3'(x)| = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{8x-1}\right)^{2/3} \leqslant 0{,}32.$$

Está claro que para realizar el proceso iterativo es preciso elegir la tercera ecuación $x = \sqrt[3]{\frac{8x-1}{2}}$. Su segundo miembro satisface la condición (5) con $k = 0{,}32$. Si en calidad de la aproximación nula se toma el valor de $x_0 = -2{,}1$, obtenido en el ejemplo 2, la sucesión (4) estará determinada y convergerá hacia la raíz ξ.

2) El primer miembro de la ecuación dada es positivo con $x = 1/e^2$ y negativo con $x = 1$. La derivada del primer miembro es negativa con $0 < x < 1$, por ello sobre el intervalo $(0;\ 1)$ la ecuación tiene y, con ello, sólo una raíz ξ; ella es la menor. La ecuación dada escrita en la forma $x = \ln x + 2$, es inútil para el proceso iterativo, ya que $(\ln x + 2)' = 1/x > 1$ con $x \in (0;\ 1)$. Transformemos la ecuación a la forma

$$x = e^{x-2}. \tag{9}$$

Aquí, $(e^{x-2})' = e^{x-2} \leqslant e^{-1} < 1$ con $x \in [0;\ 1]$ y, por lo tanto, para la ecuación (9) el proceso iterativo convergerá. En el ejemplo 2 fue-

ron hallados el valor aproximado de la raíz menor $x_0 = 0{,}156$ y su intervalo de aislamiento $(0{,}135;\ 0{,}177)$. Sobre este intervalo

$$(e^{x-2})' \leqslant e^{-1{,}823} < 0{,}162 = k$$

(en este ejemplo para los cálculos se ha empleado un microordenador de la serie «Electrónica»). Calculemos la primera aproximación

$$x_1 = e^{x_0-2} = 0{,}1581834\ \ldots$$

Vemos que $x_0 < \xi$. La sucesión iterativa $x_n = e^{x_{n-1}-2}$, $n \in \mathbb{N}$, es creciente. Redondeando por defecto, tomamos $x_1 = 0{,}158183$ y, de acuerdo con (7), hallamos el número de iteraciones necesario para alcanzar la precisión prefijada:

$$\frac{0{,}162^n}{1-0{,}162}\cdot(0{,}158183-0{,}156) \leqslant 5\cdot 10^{-5},$$

$$0{,}162^n \leqslant 1{,}919\cdot 10^{-2},\quad 1{,}62^n\cdot 10^{-n} \leqslant 1{,}919\cdot 10^{-2};$$

comprobando con $n = 2$ y $n = 3$, hallamos que $n = 3$. Con este n tendremos, de acuerdo con (7), una estimación:

$$0 < \xi - x_3 < 1{,}11\cdot 10^{-5}. \qquad (10)$$

Los resultados de los cálculos se aducen en la tabla

n	x_n	e^{x_n-2}
0	0,156	0,158183
1	0,158183	0,158529
2	0,158529	0,158584
3	0,158584	

Redondeando otra vez por defecto es posible tomar $x^* = 0{,}15858$ con un error que de antemano no supera $2\cdot 10^{-5}$. También podemos señalar que de (10) se desprenden las desigualdades

$$0{,}158584 < \xi < 0{,}158596$$

(tomando en consideración el error de redondeo), por ello la elección del valor aproximado $x^* = 0{,}15859$ ofrece gran precisión. ▲

Una serie de fórmulas iterativas para resolver la ecuación $f(x) = 0$ se obtiene de la fórmula de Taylor para la función f o la función inversa a f.

Sea la función f derivable sobre $[a;\ b]$ y

$$0 < m_1 \leqslant |f'(x)| \leqslant M_1,\quad x \in [a;\ b]. \qquad (11)$$

Sea ξ la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ sobre $(a; b)$ (única debido a (11)); entonces, con $x \in [a; b]$, tenemos $f(x) = f(\xi) + f'(\theta(x)) \times$ $\times (x - \xi)$, de donde

$$\xi = x - \frac{f(x)}{f'(\theta(x))}, \tag{12}$$

donde $\theta(x)$ yace entre ξ y x. Eligiendo $x_0 \in [a; b]$ y poniendo en (12) x_{n-1} en lugar de x, x_n en lugar de ξ y cualquier expresión aproximada en lugar de $f'(\theta(x))$, obtenemos la fórmula iterativa de la forma (4).

Como adición a lo indicado sea la función f dos veces derivable sobre $[a; b]$ y

$$0 < m_2 \leqslant |f''(x)| \leqslant M_2, \quad x \in [a; b] \tag{13}$$

y sea x_0 elegida de tal manera que

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0. \tag{14}$$

Poniendo en (12) $f'(x)$ en lugar de $f'(\theta(x))$, llegamos a la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

que define la sucesión $\{x_n\}$ monótonamente convergente hacia la raíz ξ. La fórmula (15) describe el *método de Newton* (*método de los tangentes*).

Para la estimación del error (sin tomar en consideración el error de redondeo) en el método de Newton se emplean las fórmulas

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

donde m_1 satisface la condición (11), M_2, la condición (13).

Si x_0 se ha elegido tal que

$$\frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_0| < 1, \tag{18}$$

el proceso iterativo converge con rapidez, y si $M_2/2m_1 \leqslant 1$, el número de signos decimales ciertos en cada paso se duplica.

Sustituyendo en (12) $f'(\theta(x))$ por $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, llegamos a la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(x_0)}(x_{n-1} - x_0), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

o, lo que es lo mismo.

$$x_n = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_{n-1}) - f(x_0)}(x_{n-1} - x_0), \quad n \in \mathbb{N} \tag{20}$$

para la construcción de la sucesión que converge monótonamente hacia la raíz ξ. Las fórmulas (19), (20) describen el *método de las cuerdas* (*método de la posición falsa*). La estimación del error de aproximación según el método de las cuerdas puede obtenerse con la fórmula (16), así como con la fórmula

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

El método simplificado de Newton se aplica cuando la derivada $f'(x)$ poco varía sobre el segmento $[a; b]$. En este caso, en (12) se sustituye $f'(x(x))$ por $f'(x_0)$, entonces la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

prefija una sucesión que converge hacia la raíz ξ. El error de las aproximaciones puede determinarse con las fórmulas (16), (21).

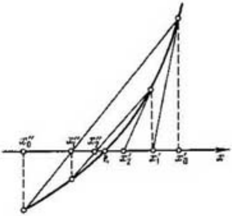


Fig. 106

El método combinado se obtiene uniendo los métodos de las cuerdas y de las tangentes. Debido a (11) y (13) las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ no cambian los signos sobre el segmento $[a; b]$; sea para mayor determinación

$$f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0. \tag{23}$$

Elegimos x_0' y x_0'' de $[a; b]$ de forma que $f(x_0'') < 0$ y $f(x_0') > 0$ (fig. 106), entonces $x_0'' < \xi < x_0'$. La sucesión $\{x_n'\}$ se prefija me-

diante el método de las tangentes, en tanto que la sucesión $\{x''_n\}$, con el método de las cuerdas:

$$x'_n = x'_{n-1} - \frac{f(x''_{n-1})}{f'(x'_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

$$x''_n = x''_{n-1} - \frac{f(x''_n - 1)}{f(x''_{n-1}) - f(x'_{n-1})}(x''_{n-1} - x'_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = \xi \ \text{y} \ x''_n < \xi < x'_n, \tag{26}$$

$$0 < \xi - x''_n < x'_n - x''_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Al calcular los valores de x''_n es posible redondear por defecto, mientras que los valores de x'_n, con exceso. El proceso cesa cuando

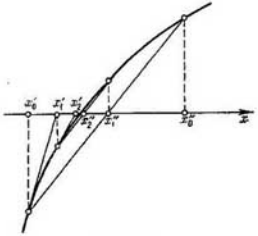


Fig. 107

el segundo miembro de (21) sea menor que el error prefijado. Con frecuencia, como valor aproximado de la raíz se toma $(x'_n + x''_n)/2$.

Por analogía, se confecciona la sucesión con otras combinaciones de los signos de $f'(x)$ y $f''(x)$. En cada caso, la sucesión $\{x'_n\}$ se construye según el método de las tangentes partiendo del valor inicial x'_0 que satisface la condición (14).

Las sucesiones iterativas indicadas, confeccionadas sobre la base de la fórmula (12), convergen con rapidez si la derivada $f'(x)$ es suficientemente grande (véanse (16), (17), (21)).

Partiendo de la fórmula de Taylor con término residual de más alto orden que el primero, es posible obtener sucesiones iterativas que convergen con mayor rapidez que las indicadas.

El orden del método de iteraciones es tal número τ que para la sucesión iterativa, convergente hacia la raíz ξ, es cierta la estimación

$$|\xi - x_{n+1}| \leqslant C\,|\xi - x_n|^{\tau}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

El método de Newton tiene el orden $\tau = 2$.

Ejemplo 4. Hallen la raíz menor de la ecuación $2x^3 - 8x + 1 = 0$ con error menor que $5 \cdot 10^{-5}$

△ En el ejemplo 2 fue hallado el intervalo $(-13/6;\ -92/45)$ de aislamiento de la raíz menor ξ. Con el fin de reducir este intervalo hagamos uso del método combinado. Como

$$f'(x) = 6x^2 - 8 > 16 > 0 \ \text{ y } f''(x) = 12x < -24 < 0,$$

confeccionamos la sucesión iterativa según el método de las tangentes a partir de la aproximación inicial $x_0' = -13/6$:

$$x_n' = x_{n-1}' - \frac{f(x_{n-1}')}{f'(x_{n-1}')}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

en tanto que para la sucesión según el método de las cuerdas tomemos como aproximación inicial $x_0'' = -92/45$, el resto de los términos de la sucesión se calculan haciendo uso de (20) con la fórmula

$$x_n'' = x_{n-1}'' - \frac{f(x_{n-1}'')}{f(x_{n-1}'') - f(x_{n-1}')}(x_{n-1}'' - x_{n-1}'), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{30}$$

poniendo en cada etapa en (20) en lugar de x_0 el valor de x_{n-1}' (fig. 107). Realizamos los cálculos, p. ej., con el esquema ofrecido en la tabla (véase la pág. 512).

Aquí

$$p_n = \frac{f(x_n')}{f'(x_n')}, \quad q_n = \frac{f(x_n'')}{f(x_n'') - f(x_n')}. \tag{31}$$

Ya después de la segunda etapa de los cálculos, obtenemos que

$$-2{,}05983 \leqslant \xi < -2{,}05978,$$

por lo que haciendo

$$x^* = -\frac{1}{2}(2{,}05983 + 2{,}05978) \approx -2{,}05980,$$

obtenemos el valor aproximado de la raíz con un error de no más de $2{,}5 \cdot 10^{-5}$. ▲

23.1. Resuelvan por procedimiento gráfico la ecuación indicando para cada raíz el intervalo de aislamiento, cuya longitud no supera 0,5:

1) $x^3 - 6x + 2 = 0$. 2) $x^4 - 4x - 1 = 0$. 3) $x^3 + 2x + 7{,}8 = 0$.
4) $x^3 - 1{,}75x + 0{,}75 = 0$. 5) $2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$.
6) $x^3 + x^2 - 5x - 12 = 0$. 7) $x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$.
8) $0{,}3x^4 - 0{,}7x^3 - 0{,}3x^2 - 2 = 0$.

n	0	1	2
x'_n	$-\frac{13}{6}$	$-2,067034$	$-2,059829$
x''_n	$-\frac{92}{45}$	$-2,058686$	$-2,059786$
$f(x'_n)$	$-\frac{217}{108}$	$-0,127069$	
$f'(x'_n)$	$\frac{121}{6}$	$17,635777$	
$f(x''_n)$	$0,265011$	$0,019292$	
p_n	$-\frac{217}{2178}$	$-0,007205$	
q_n	$-0,664269$	$-0,868189$	
$x''_n - x'_n$	$0,122222$	$0,008348$	

23.2. Resuelvan por procedimiento gráfico la ecuación indicando para cada raíz el intervalo de aislamiento, cuya longitud no supera 0,1;

1) $2x^3 + x + 1 = 0$. 2) $x^4 - x - 1 = 0$. 3) $x + e^x = 0$.
4) $x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$. 5) $x = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0;\ \pi)$.
6) $x^2 - \cos x = 0$. 7) $4x - 5 \ln x = 5$. 8) $x^x = 10$.

23.3. Demuestren que mediante el desplazamiento a lo largo del eje Ox, o bien la contracción (alargamiento) a lo largo de dicho eje, la ecuación

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

puede reducirse a la forma

$$b_0t^n + b_2t^{n-2} + \ldots + b_{n-1}t + b_n = 0$$

o bien a la forma

$$c_0z^n + c_1z^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$

donde $|c_0| = |c_n|$.

23.4. Sea que los coeficientes del polinomio

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

satisfacen las igualdades $a_i = a_{n-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Demuestren que.:

1) Si n es impar, $x = -1$ es la raíz del polinomio y los coeficientes del cociente

$$Q_{n-1} = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

de la división de $P_n(x)$ entre $x + 1$ satisfacen las igualdades $b_i = b_{n-1-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

2) Si n es par, la sustitución de $z = x + \frac{1}{x}$ reduce la ecuación $P_n(x) = 0$ a la ecuación del grado $n/2$ y a las $n/2$ ecuaciones cuadráticas.

3) Si n es par la sustitución de

$$z = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

también reduce la ecuación $P_n(x) = 0$ a la ecuación de grado $n/2$ y a las $n/2$ ecuaciones cuadráticas.

23.5. Sea que los coeficientes del polinomio

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + + \ldots a_{n-1}x + a_n, \ a_0 \neq 0$$

satisfacen las igualdades $a_i = -a_{n-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Demuestren que:

1) Si n es impar, $x = 1$ es la raíz del polinomio, en tanto que si n es par, $x = 1$ y $x = -1$ son las raíces del polinomio.

2) Los coeficientes del cociente

$$Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

de la división de $P_n(x)$ entre $x - 1$ satisfacen las igualdades $b_i = b_{n-1-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

23.6. Sea que la función f está definida, es dos veces derivable sobre $\mathbb{R}$ y f'' no varía de signo sobre $\mathbb{R}$. Demuestren que:

1) La ecuación $f(x) = 0$ no puede tener más de dos raíces reales.

2) Si $f(x_0)f'(x_0) < 0$, $f(x_0)f''(x_0) < 0$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene la única raíz sobre el intervalo $\left(x_0;\ x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)$.

3) Si $f'(x_0) = 0$ y $f(x_0)f''(x_0) < 0$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz sobre cada uno de los intervalos $(-\infty;\ x_0)$, $(x_0;\ +\infty)$.

23.7. 1) Sea la función f continua sobre $[a;\ +\infty)$, derivable sobre $(a;\ +\infty)$, $f(a) < 0$, $f'(x) \geqslant m > 0$ sobre $(a;\ +\infty)$. Demuestren que la ecuación $f(x) = 0$ tiene, además sólo una, raíz real sobre $(a;\ +\infty)$.

2) Aduzcan un ejemplo que muestre que la condición «$f'(x) \geqslant m > 0$ sobre $(a;\ +\infty)$» no se puede sustituir por la condición $f'(x) > 0$».

3) Demuestren que con las condiciones 1) la raíz de la ecuación pertenece al intervalo $\left(a;\ a-\frac{f(a)}{m}\right]$.

23.8. La raíz ξ de la ecuación $f(x)=0$ recibe el nombre de p-multiplicidad, $(p\in\mathbb{N})$ si $f(x)=(x-\xi)^p\ \varphi(x)$, donde $\varphi(\xi)\neq 0$. La raíz de primer orden de multiplicidad se denomina *simple*.

1) Demuestren que *si* f es derivable en el entorno de la raíz ξ de p-multiplicidad $(p\geqslant 2)$ de la ecuación $f(x)=0$, ξ es la raíz de $(p-1)$-multiplicidad de la ecuación $f'(x)=0$.

2) Demuestren que si $a^2-3b<0$, la ecuación

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

tiene una raíz real simple.

23.9. Demuestren que la ecuación

$$x^{2k+1}+a_1x^{2k-1}+a_2x^{2k+3}+\ldots+a_kx+a_{k+1}=0,$$

donde $a_i\geqslant 0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1)$, $a_k>0$, tiene una raíz real única y, además, simple.

23.10. Sea $R(x)$ el máximo común divisor del polinomio $P_n(x)$ y de su derivada $P_n'(x)$ $(n\in\mathbb{N})$. Demuestren que todas las raíces del cociente de la división de $P_n(x)$ entre $R(x)$ son simples y coinciden con las raíces del polinomio $P_n(x)$.

23.11. Demuestren que si todas las raíces del polinomio

$$x^n+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

son reales, entonces $a_2\leqslant 0$.

23.12. Demuestren que el polinomio

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x-a_n,$$

donde $a_i\geqslant 0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$, $a_n>0$, sólo tiene una raíz positiva y, además, ella es simple y no supera a $\sqrt[n]{a_n}$.

23.13. Demuestren que todas las raíces de la derivada del polinomio

$$P_4(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$

son reales y hallen sus intervalos de aislamiento, cuya largura es no más de 0,5.

23.14. Demuestren que el polinomio

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\quad a_0\neq 0,$$

tiene al menos una raíz sobre el intervalo (0; 1) si

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0.$$

23.15. Dispongamos los coeficientes del polinomio en el orden de crecimiento de sus números

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

$a_0, \ldots,$ omitiendo los coeficientes iguales a cero. *El número de cambios* de signo del juego ordenado obtenido recibe el nombre de número de pares de elementos vecinos que tienen diferentes signos.

Demuestren que el número de raíces positivas del polinomio no es mayor que el número de cambios de signo en el juego de sus coeficientes no iguales a cero.

23.16. Demuestren que el polinomio:

1) $x^5-2x^4-x^2-5=0$ sólo tiene una raíz real, además única; indiquen para esta raíz el intervalo de aislamiento, cuya longitud es no más de 0,1.

2) $x^6+2x^4+x-3=0$ tiene dos y sólo dos raíces reales; para éstas indiquen los intervalos de aislamiento cuya longitud es no más de 0,1.

23.17. Demuestren que todas las raíces de la ecuación

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \quad a_0\neq 0,$$

1) satisfacen la desigualdad

$$|\xi|<1+\frac{M_1}{|a_0|},$$

donde

$$M_1=\text{máx}\{|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|\};$$

2) con $a_n\neq 0$ satisfacen la desigualdad

$$|\xi|>\left(1+\frac{M_2}{|a_n|}\right)^{-1},$$

donde

$$M_2=\text{máx}\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n-1}|\}.$$

23.18. Sea que en la ecuación

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

$a_0>0$, a_k $(k\geqslant 1)$ es el coeficiente negativo con el número menor, A es el mayor de los valores absolutos de los coeficientes negativos. Demuestren que todas las raíces reales de esta ecuación satisfacen la desigualdad

$$\xi<1+\sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}$$

(*teorema de Lagrange*).

23.19. Sea que para el polinomio

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

existe tal número $c > 0$ que

$$P_n^{(k)}(c) \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

y sea $a_0 > 0$. Demuestren que todas las raíces reales de dicho polinomio satisfacen la desigualdad $\xi \leqslant c$ (*teorema de Newton*).

23.20. Sea que el polinomio $P_n(x)$ está representado en la forma

$$P_n(x) = Q(x) + R(x),$$

donde $Q(x)$ contiene el término de mayor grado del polinomio $P_n(x)$ con coeficiente positivo y todos los términos con coeficientes negativos, mientras que $R(x)$ contiene los demás términos de $P_n(x)$. Demuestren que si $Q(c) > 0$ con cierto $c > 0$, todas las raíces reales de $P_n(x)$ son menores que c.

23.21. Demuestren que la ecuación $P(x) = 0$ no tiene raíces negativas y, haciendo uso de los resultados de los problemas **23.17—23.20**, indiquen el segmento $[a; b]$, $0 < a < b$, que contiene todas las raíces positivas si:

1) $P(x) = 2x^5 - 100x^2 + 2x - 1$.
2) $P(x) = x^4 - 35x^3 + 380x^2 - 1350x + 1000$.

23.22. Indiquen los segmentos $[a_1; b_1]$, $a_1 < b_1 < 0$, y $[a_2; b_2]$, $0 < a_2 < b_2$, que contienen todas las raíces negativas y positivas, correspondientemente, de la ecuación

$$3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Para las raíces positivas indiquen los intervalos de aislamiento, cuya longitud no supera 0,5.

23.23. Demuestren que la ecuación

$$x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 5 = 0$$

tiene la única raíz e indiquen el intervalo de su aislamiento, cuya longitud no supera 0,1.

23.24. 1) Demuestren que si $4p^3 + 27q^2 > 0$, la ecuación $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$ tiene una raíz real, en tanto que si $4p^3 + 27q^2 < 0$, esa ecuación tiene tres raíces reales.

2) ¿Con qué condición para a, b, c todas las raíces de la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

son reales?

23.25. ¿Con qué condición para p y q todas las raíces de la ecuación

$$x^5 - 5px^3 + 5p^2x + 2q = 0$$

son reales?

23.26. ¿Con qué condición para p y q todas las raíces de la ecuación

$$x^m + px^n + q = 0,$$

donde $m > n > 0$, m, $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $p \neq 0$, son reales?

23.27. Demuestren que la ecuación

$$x^{2n+1} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_n x = a_0, \qquad (32)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \ldots, n$), tiene al menos una raíz sobre el intervalo $(-2; 2)$, si $|a_0| < 2$.

2) Demuestren que la ecuación (32) tiene una raíz en el intervalo $(-2l; 2l)$, donde $l = (|a_0|/2)^{1/(2n+1)}$ (*teorema de Chebishev*).

23.28. En función de los valores de $a \in \mathbb{R}$, indiquen la cantidad de raíces reales de la ecuación:

1) $x^4 - 4ax^3 - 2 = 0$. 2) $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0$.

23.29. Hallen todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ con los que la ecuación tiene el indicado número de raíces reales:

1) $2x^3 + 13x^2 - 20x + a = 0$, una raíz.
2) $3x^3 + 1{,}5x^2 - 12x + a = 0$, una raíz doble y una raíz simple.
3) $3x^4 + 8x^3 + a = 0$, dos raíces simples.
4) $9x^4 + 14x^3 - 15x^2 + a = 0$, cuatro diferentes raíces.

23.30. Demuestren que la ecuación

$$2e^x + x^2 + 18x - 6 = 0$$

tiene la única raíz positiva, indiquen su intervalo de aislamiento, cuya longitud no supera 0,2.

23.31. Indiquen el número de raíces de las ecuaciones en función de los valores de a:

1) $\ln x + ax = 0$. 2) $x \ln x = a$. 3) $e^x = ax^2$.
4) $\operatorname{ch} x = ax$. 5) $\cos^3 x \operatorname{sen} x = a$, $x \in [0; \pi]$.

23.32. Indiquen todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ con los que la ecuación tiene el número indicado de raíces reales:

1) $e^x = a + x - x^2$, dos raíces diferentes.
2) $x^2 + x - \ln x + a = 0$, una raíz doble.
3) $x^2 = a \ln x$, dos raíces diferentes.
4) $6 \operatorname{arctg} x - x^3 + a = 0$, tres raíces diferentes.

23.33. Está dada la ecuación

$$\ln x - a - bx = 0.$$

1) Demuestren que esta ecuación no puede tener más de dos raíces.

2) Indiquen en el plano de coordenadas los conjuntos de puntos $(a; b)$ para los que el número de las raíces de la ecuación dada es igual a 0, 1, 2.

23.34. Está dada la ecuación

$$e^x - a - bx^3 = 0.$$

1) Demuestren que esta ecuación no puede tener más de cuatro raíces.

2) Indiquen en el plano de coordenadas los conjuntos de puntos $(a;\ b)$ para los que el número de las raíces de la ecuación es igual a 0, 1, 2, 3, 4.

23.35. Sea $a > 1$. Demuestren que la ecuación

$$a^x = bx,$$

1) tiene dos raíces reales con $b > e \ln a$;
2) tiene una raíz real doble con $b = e \ln a$;
3) no tiene raíces reales con $0 \leqslant b < e \ln a$;
4) tiene una raíz simple con $b < 0$.

23.36. Indiquen la cantidad de raíces de la ecuación

$$x^n = ae^x, \quad n \in \mathbb{N},$$

en función de $a \in \mathbb{R}$.

23.37. Separen las raíces reales de la ecuación, indicando los intervalos de aislamiento, cuya longitud no supera la unidad:

1) $x^3 + 2x - 7 = 0$. 2) $x^3 - 27x - 17 = 0$.
3) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$. 4) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 2 = 0$.
5) $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$. 6) $x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.
7) $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$. 8) $x^5 + 5x^3 - 7x + 2 = 0$.
9) $x^5 + 7x^3 - 5x + 11 = 0$.
10) $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 17x + 1 = 0$.

23.38. Separen las raíces de la ecuación

$$\frac{p^2}{a^2+x} + \frac{q^2}{b^2+x} + \frac{r^2}{c^2+x} = 1,$$

donde $p,\ q,\ r,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a^2 > b^2 > c^2,\ pqr \neq 0$.

23.39. Separen las raíces reales de la ecuación, indicando para cada raíz el intervalo de aislamiento, cuya longitud no supera 0,1:

1) $x - \operatorname{sen} 2x = 0$. 2) $x = 4 \cos x$. 3) $e^x - x - \dfrac{5}{4} = 0$.
4) $2x^2 - e^{x+1} = 0$. 5) $x + \ln (x + 2) = 0$.

23.40*. Según el método de bisección resuelvan la ecuación con el error Δ indicado:

1) $x^3 + x - 10 = 0$, $\quad \Delta = 10^{-2}$.
2) $x^3 - 12x - 8 = 0$, $\quad \Delta = 10^{-2}$.
3) $x^4 + x^2 - 5x - 12 = 0$, $\quad \Delta = 10^{-2}$.
4) $x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0$, $\quad \Delta = 10^{-3}$.
5) $x - 2x^3 + x - 1 = 0$, $\quad \Delta = 10^{-3}$.
6) $(x - 1)^2 - 2 \operatorname{sen} x = 0$, $\quad \Delta = 10^{-2}$.
7) $e^x = 2(1 - x)^2$, $\quad \Delta = 10^{-2}$.
8) $10(x - 1) = \operatorname{sen} x$, $\quad \Delta = 10^{-3}$.
9) $10 \ln x = x^3 - 3$, $\quad \Delta = 10^{-3}$.
10) $xe^x = 1$, $\quad \Delta = 10^{-3}$.

23.41. Una esfera de radio 1 m, con densidad específica 0,75, flota en el agua. Calculen la altura de la parte de la esfera que sobresale del agua con un error de 0,05 mm.

23.42. Empleando los gráficos de las hipérbolas

$$xy = y + 1 \quad \text{y} \quad x^2 - y^2 = 1$$

y el método de bisección, calculen con un error de 0,01 las coordenadas de los puntos de intersección de dichas hipérbolas.

23.43. 1) Aduzcan un ejemplo de la ecuación $f(x) = 0$ con la raíz ξ y su valor aproximado x^* de forma que se cumplan las desigualdades $f'(x) > 0$ y

$$|x^* - \xi| \geqslant 10^3, \quad |f(x^*)| \leqslant 10^{-3},$$

es decir, cerciórense de que de la «proximidad» de $f(x^*)$ a cero *no se desprende* la «proximidad» de x^* a la raíz ξ.

2) Aduzcan un ejemplo de la ecuación $f(x) = 0$ con raíz ξ y su valor aproximado x^* de forma que se cumplan las desigualdades $f'(x) > 0$ y

$$|x^* - \xi| \leqslant 10^{-3}, \quad |f'(x^*)| \geqslant 10^3,$$

es decir, cerciórense de que de la «proximidad» del valor aproximado x^* a la raíz ξ *no se desprende* la «proximidad» de $f(x^*)$ a cero.

23.44. La ecuación

$$3x^4 - 16x^3 + 192 = 0 \tag{33}$$

con $x > 0$ es equivalente a cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x = 2\sqrt[4]{\dfrac{x^3-12}{3}}$; b) $x = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}(x^4+64)}$;

c) $x = \dfrac{16}{3}\left(1 - \dfrac{12}{x^3}\right)$; d) $x = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{8}{x^2}\right)$.

1) Demuestren que la ecuación (33) tiene dos raíces positivas y sepárenlas.

2) De las ecuaciones a) — d) indiquen aquella para la que las iteraciones convergen con la mayor rapidez hacia la menor raíz positiva de la ecuación (33).

Calculen dicha raíz con una precisión de hasta 10^{-3}.

3) Realicen para la mayor raíz de la ecuación (33) la tarea análoga a la 2).

23.45. Con el método de iteraciones hallen las raíces reales de las ecuaciones con el error Δ indicado:

1) $x^3 + x = 1000$, $\quad \Delta = 10^{-4}$.
2) $x^3 - 3x^2 + 8x + 10 = 0$, $\quad \Delta = 10^{-5}$.
3) $x^5 + 5x + 1 = 0$, $\quad \Delta = 10^{-5}$.
4) $10x = e^{-x}$, $\quad \Delta = 5 \cdot 10^{-4}$.
5) $4^x = 8x$, $\quad \Delta = 10^{-3}$.

6) $4e^x = 5(x+1)$, $\Delta = 10^{-4}$.
7) $x^3 - 2x - 5 = 0$, $\Delta = 10^{-10}$.
8) $\operatorname{sen} x = 2x - 0{,}5$, $\Delta = 5\cdot 10^{-5}$.
9) $x - \operatorname{sen} x = 0{,}25$, $\Delta = 10^{-3}$.

23.46. 1) ¿Con qué $a > 0$ la ecuación

$$x = a^x$$

tiene solución?

2) ¿Con qué a converge la sucesión iterativa

$$x_0 = a, \quad x_n = a^{x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}?$$

23.47. Hallen con cuatro cifras exactas después de la coma:

1) La menor raíz positiva de la ecuación

$$x \operatorname{sen} x + 1 = 0.$$

2) Dos raíces positivas, la menor y la más próxima a ella, de la ecuación

$$\cos x \operatorname{ch} x = 1.$$

23.48. Resuelvan la ecuación con un error de no más de 10^{-4}

$$4x - 5 \ln x = 5,$$

eligiendo para cada raíz un proceso iterativo convergente.

23.49. Resuelvan según el método de las cuerdas la ecuación con el error Δ indicado:

1) $x^3 - 4x + 2 = 0$, $\Delta = 10^{-3}$.
2) $x^4 + x - 1 = 0$, $\Delta = 10^{-3}$.
3) $x^3 - 3{,}2x^2 + 3{,}1x - 2{,}2 = 0$, $\Delta = 10^{-3}$.
4) $0{,}1 \operatorname{sen} x = x + 2$, $\Delta = 10^{-3}$.
5) $\cos x = x^2$, $\Delta = 10^{-3}$.
6) $x^3 - 5x + 1 = 0$, $\Delta = 10^{-5}$.

23.50. Según los métodos de las cuerdas y las tangentes resuelvan la ecuación con el error Δ indicado:

1) $x^2 = 13$, $\Delta = 10^{-8}$.
2) $2x^3 + 2x^2 - 11x + 3 = 0$, $\Delta = 10^{-6}$.
3) $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$, $\Delta = 5\cdot 10^{-5}$.

23.51. Según el método de las tangentes resuelvan la ecuación con el error Δ indicado:

1) $x^3 - 2x - 2 = 0$ $\Delta = 5\cdot 10^{-5}$.
2) $x^3 + x - 3 = 0$, $\Delta = 5\cdot 10^{-5}$.
3) $2x^3 - 7x^2 + x + 9 = 0$, $\Delta = 10^{-3}$.
4) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$, $\Delta = 10^{-3}$. 5) $x = \cos x$, $\Delta = 10^{-6}$.
6) $x \log x = 1$, $\Delta = 10^{-4}$. 7) $x + e^x = 1$, $\Delta = 10^{-5}$.
8) $x \operatorname{th} x = 1$, $\Delta = 10^{-6}$.
9) $\operatorname{tg} x = x$, $\Delta = 5\cdot 10^{-5}$ (la menor raíz positiva).
10) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$, $\Delta = 10^{-3}$ (hallen sólo dos raíces positivas, la menor y la más próxima a ella).

23.52. Según el método de las tangentes calculen la raíz negativa de la ecuación

$$x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$$

con tres cifras exactas tras la coma.

23.53. Hallen con cuatro cifras exactas las raíces imaginarias puras de la ecuación

$$z \operatorname{sen} z + 1 = 0.$$

23.54. Resuelvan la ecuación

$$x^3 + 1{,}1x^2 + 0{,}9x - 1{,}4 = 0.$$

1) Según el método de la bisección con una precisión de $5\cdot10^{-3}$; 2) según el método de las cuerdas con una precisión de $5\cdot10^{-4}$; 3) según el método de las tangentes con una precisión de $5\cdot10^{-4}$.

23.55. ¿A cuál de las raíces de la ecuación $x^3 - x = 0$ converge la sucesión confeccionada según el método de las tangentes en función de la elección de la aproximación inicial $x_0 \in \mathbb{R}$?

23.56. Demuestren que para la ecuación $\sqrt{|x|}\operatorname{sign} x = 0$ el método de las tangentes no converge.

23.57. Comprueben que para la función

$$f(x) = \frac{\ln 2}{\pi}\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\ln x}{\ln 2}\right) + 1$$

la sucesión confeccionada según el método de las tangentes a partir de $x_0 = 1$, converge hacia un número que no es raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

23.58. Haciendo uso del método de las tangentes construyan el proceso iterativo de 2º orden para calcular $\sqrt{a}$.

23.59. Demuestren que si $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, entonces

$$x_{n+1} - \frac{1}{8m}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 \leqslant \sqrt{a} \leqslant x_{n+1}, \tag{34}$$

donde $m = \min\{x_n,\ a/x_n\}$.

23.60. Demuestren que si ξ es la raíz doble de la ecuación $f(x) = 0$, para hallarla es posible emplear el proceso iterativo

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{35}$$

(método de Newton modificado). Indiquen la condición suficiente de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ hacia la raíz ξ.

23.61. ¿Qué precisión proporciona el empleo doble del método combinado al calcular la raíz de la ecuación

$$x^4 - x - 1 = 0$$

a partir del intervalo (1,22; 1,23)?

23.62. Resuelvan la ecuación

$$x^3 - 4,1x^2 + 6,1x - 1,6 = 0$$

1) según el método de bisección con una precisión de $5\cdot10^{-3}$; 2) según el método de las cuerdas con una precisión de $5\cdot10^{-4}$; 3) según el método de las tangentes con una precisión de $5\cdot10^{-4}$; 4) según el método combinado con una precisión de $5\cdot10^{-4}$.

23.63. Calculen según el método combinado la mayor raíz de la ecuación $x^5 - x - 0,2 = 0$ con una precisión de 10^{-4}.

23.64. Calculen según el método combinado las raíces de la ecuación

$$x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$$

de los intervalos $(-11;\ -10)$ y $(9;\ 10)$ con una precisión de 10^{-4}.

23.65. Calculen la menor raíz positiva de la ecuación

$$x \operatorname{sen} x = 0,5$$

con una precisión de 10^{-6}.

23.66. Resuelvan según el método combinado, con el error Δ indicado, la ecuación:

1) $2x^2 - e^{1-x} = 0, \qquad \Delta = 10^{-5}$.

2) $2 - x - \log x = 0, \quad \Delta = 10^{-6}$.

23.67. Demuestren que el método de Newton (método de las tangentes) tiene el segundo orden.

23.68. Demuestren que la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 2ax_n}{3x_n^2 + a}$$

para resolver la ecuación $x^2 = a$, $a > 0$, tiene el tercer orden.

23.69. Haciendo uso del desarrollo de una función con la fórmula de Taylor de hasta el 2º orden obtengan la fórmula iterativa para resolver la ecuación $f(x) = 0$ y demuestren que ella tiene el tercer orden:

$$1)\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\, f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - \frac{1}{2} f(x_n)\, f''(x_n)}. \tag{36}$$

$$2)\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)\, f''(x_n)}{2\,(f'(x_n))^3} \tag{37}$$

(*fórmula de Chebishev*).

23.70. Demuestren que la menor raíz positiva ξ de la ecuación

$$\operatorname{ctg} x = \lambda - x, \quad \lambda > 2$$

satisface la desigualdad

$$\xi < \frac{2}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}.$$

23.71. Sea $\{x_n\}$ la sucesión creciente de las raíces positivas de la ecuación $x \operatorname{sen} x = 1$. Demuestren que con $n \to \infty$:

1) $x_n = \pi n + o(1)$. 2) $x_n = \pi n + \frac{(-1)^n}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) $x_n = \pi n + \frac{(-1)^n}{\pi n} - \frac{1}{\pi^3 n^3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{6}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

23.72. Sea $\{x_n\}$ la sucesión creciente de las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Demuestren que con $n \to \infty$

$$x_n = \pi n + \frac{1}{(\pi n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

23.73. Sea $\{x_n\}$ la sucesión creciente de las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg} x = x.$$

Demuestren que con $n \to \infty$:

1) $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n + o(1)$. 2) $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n} - \frac{2}{3\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

§ 24. Función vectorial. Curvas

1. Función vectorial de argumento escalar. Si X es un subconjunto del conjunto de números reales ($X \subset \mathbb{R}$) y a cada valor de $t \in X$ se ha puesto en correspondencia el vector $\mathbf{r}(t)$ del espacio tridimensional R^3, se dice que sobre el conjunto X está prefijada la *función vectorial* $\mathbf{r}(t)$ *de argumento escalar* t.

Si en el espacio R^3 está fijado un sistema cartesiano de coordenadas x, y, z, el prefijar la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $t \in X$, es equivalente a prefijar tres funciones escalares $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, es decir, las coor-

denadas del vector $\mathbf{r}(t)$ (estas funciones llevan el nombre de funciones de coordenadas de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$):

$$\mathbf{r}(t) = (x(t);\ \ y(t);\ z(t)).$$

Si $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ son versores de coordenadas,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \tag{1}$$

Si el origen de todos los vectores $\mathbf{r}(t)$ yace en el origen de coordenadas ellos son llamados radio vectores, en tanto que el conjunto de sus extremos, hodógrafa de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $t \in X$. El sentido físico de la hodógrafa de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ consiste en que ella es la trayectoria de un punto en movimiento que coincide con el extremo del radio vector $\mathbf{r}(t)$, con la particularidad de que t puede considerarse como el tiempo.

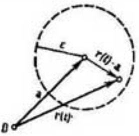


Fig. 108

Si la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ está definida en cierto entorno punzado del punto t_0, el vector $\mathbf{a}$ se denomina *límite de la función* $\mathbf{r}(t)$ en el punto t_0 (o bien, lo que es igual, con $t \to t_0$) si para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que para todos t que satisfagan la condición

$$|t - t_0| < \delta, \quad t \neq t_0, \tag{2}$$

se verifica la desigualdad

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon. \tag{3}$$

En este caso se escribe

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \text{ o bien } \lim_{t - t_0 \to 0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}. \tag{4}$$

Desde el punto de vista geométrico esto significa que el vector $\mathbf{r}(t)$ con $t \to t_0$ tiende hacia el vector $\mathbf{a}$ tanto en valor como en sentido (fig. 108).

La condición (2)—(3) es equivalente a que para toda sucesión $t_n \in X$, $t_n \neq t_0$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t_0$ tiene lugar la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{r}(t_n) = \mathbf{a}. \tag{5}$$

Si $\mathbf{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, para que $\mathbf{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t)$ es necesario y suficiente que

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \tag{6}$$

Si

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{o}, \tag{7}$$

la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ lleva el nombre de *infinitamente pequeña* con $t \to t_0$.

Si la función $\mathbf{r}(t)$ está definida en cierto entorno del punto t_0 y

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0), \tag{8}$$

la función $\mathbf{r}(t)$ se denomina *continua* en el punto t_0.

Si existe el límite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}, \tag{9}$$

él recibe el nombre de *derivada* de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ en el punto t_0 y se designa $\mathbf{r}'(t_0)$ o bien $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$.

Si

$$\Delta t = t - t_0, \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$$

(el vector $\Delta\mathbf{r}$ se llama *incremento* de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ en el punto t_0), entonces (fig. 109).

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{10}$$

La función vectorial $\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ tiene en el punto t_0 una derivada cuando y sólo cuando sus funciones de coordenadas tienen en dicho punto derivadas, con ello

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0); \; y'(t_0); \; z'(t_0)). \tag{11}$$

Si la hodógrafa de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es la trayectoria de un punto en movimiento y por el parámetro t se ha tomado el tiempo, la derivada

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \mathbf{v}$$

es la velocidad instantánea en el momento de tiempo $t = t_0$.

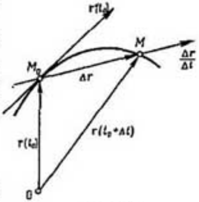


Fig. 109

La recta que pasa por el extremo M_0 del vector $\mathbf{r}(t_0)$ en el sentido del vector $\Delta\mathbf{r}$ (véase la fig. 109), recibe el nombre de *secante* de la hodógrafa, mientras que su posición límite con $\Delta t \to 0$, *tangente* a la hodógrafa en el punto M_0. Si $\Delta\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, el vector $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$, con cualquier

signo del incremento $\Delta t \neq 0$, siempre está dirigido por la secante en el sentido del crecimiento del parámetro t; por ello, si la derivada $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$, de acuerdo con (10), ella está dirigida por la tangente a la hodógrafa en el punto M_0 en el sentido de crecimiento del parámetro t. En este caso, la ecuación de la tangente tiene la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)\,u, \quad -\infty < u < +\infty \tag{12}$$

o bien en coordenadas

$$x = x_0 + x'(t_0)\,u, \quad y = y_0 + y'(t_0)\,u, \quad z = z_0 + z'(t_0)\,u, \quad -\infty < u < +\infty, \tag{13}$$

donde $\mathbf{r}(t_0) = (x_0;\ y_0;\ z_0)$. De aquí se desprende que

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{14}$$

Con el fin de que la función vectorial, definida en el entorno del punto t_0, tenga en el punto derivada es necesario y suficiente que su incremento $\Delta\mathbf{r}$ en este punto pueda representarse en la forma

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{a}\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t, \tag{15}$$

donde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) = \mathbf{o}$. De la igualdad (15) se desprende que

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}'(t_0),$$

es decir, la igualdad (15) se puede escribir en la forma

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\,\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t. \tag{16}$$

La función vectorial $\boldsymbol{\alpha}(t)$, infinitamente pequeña con $t \to t_0$, recibe el nombre de *infinitamente pequeña de un orden mayor* que la función vectorial $\boldsymbol{\beta}(t)$ con $t \to t_0$ si existe tal función vectorial $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, infinitamente pequeña con $t \to t_0$, que

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \beta(t)\,\boldsymbol{\varepsilon}(t).$$

En tal caso, se escribe

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{o}(\beta(t)), \quad t \to t_0. \tag{17}$$

Haciendo uso de esta designación, la igualdad (16) puede escribirse en la forma

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\,\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t), \quad \Delta t \to 0. \tag{18}$$

La función vectorial $\mathbf{r}'(t_0)\,\Delta t$, lineal según el argumento Δt, se denomina *diferencial de la función vectorial* $\mathbf{r}(t)$ en el punto t_0 y se designa con $d\mathbf{r}$ o bien, con mayor detalle, $d\mathbf{r}(t_0)$. El incremento del argumento Δt se designa en este caso con frecuencia dt, así, pues,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\,dt. \tag{19}$$

Si la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ tiene derivada en el punto t_0, también se dice que en ese punto ella *es derivable*.

Las derivadas y diferenciales de órdenes superiores se determinan para las funciones vectoriales de modo inductivo.

La derivada $\mathbf{r}^{(n)}$ de orden n es la derivada de la derivada del orden $n-1$:

$$\mathbf{r}^{(n)} = (\mathbf{r}^{(n-1)})', \quad \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

La diferencial $d^n \mathbf{r}(t)$ de orden n se define como la diferencial por la variable t de la diferencial $d^{n-1}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^{(n-1)}(t)\, dt^{(n-1)}$ del orden $n-1$ a condición de que el incremento del argumento t al tomar la nueva diferencial coincide con el antiguo incremento del argumento, es decir,

$$d^n\mathbf{r}(t) = d\,(\mathbf{r}^{(n-1)}(t)\, dt^{n-1}) = \mathbf{r}^{(n)}(t)\, dt^n. \tag{21}$$

De esta fórmula se desprende que

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = \frac{d^n\mathbf{r}(t)}{dt^n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Si la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ tiene en el punto t_0 derivadas de hasta el orden n incluido, en el entorno de ese punto es válida la *fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano*:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \mathbf{o}((t-t_0)^n),$$
$$t \to t_0. \tag{23}$$

Si la hodógrafa de la función vectorial es la trayectoria de un punto en movimiento, en tanto que cómo parámetro t se ha tomado el tiempo, la segunda derivada $r''(t_0)$ es la aceleración del punto en el momento de tiempo t_0.

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores, con $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ se designa el *producto escalar* y con $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, *el vectorial*: a veces el producto escalar $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ se designa con $\mathbf{a}^2$. Para tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ con $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ se designa el *producto mixto*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}).$$

Para las funciones vectoriales son válidas las siguientes reglas de derivación:

$$(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t), \tag{24}$$

$$(f(t)\,\mathbf{r}(t))' = f'(t)\,\mathbf{r}(t) + f(t)\,\mathbf{r}'(t), \tag{25}$$

$$(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))' = (\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t)), \tag{26}$$

$$[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_2(t)] + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t)]. \tag{27}$$

Ejemplo 1. Construyan la hodógrafa de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

escriban la ecuación de su tangente en un punto tomado al azar y demuestren que ella forma un ángulo constante con el eje z.

△ Para cualquier punto $(x; y; z)$ de la hodógrafa de la función vectorial (28) tenemos $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\,t$, $z = bt$ y, por ello, con cualquier $t \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad $x^2 + y^2 = a^2$, o sea, todos los puntos de la hodógrafa de la mencionada función vectorial (28) yacen en un cilindro, cuya directriz es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano de las variables x, y, mientras que su generatriz es paralela al eje z. Si interpretamos el parámetro t como el tiempo, con el movimiento uniforme por la circunferencia de la proyección del extremo del radio vector (28) sobre el plano de las variables x, y, su proyección sobre el eje de la variable z estará en movimiento uniforme y rectilíneo a una velocidad b. Hablando de otro modo, la z-coordenada del punto de la hodógrafa de la función vectorial (28) crece proporcionalmente al ángulo de giro de su proyección sobre el plano x, y. Por esta razón, la hodógrafa tiene la forma representada en la fig. 110 y se denomina hélice. Para precisar la imagen es posible confeccionar la tabla de las posiciones de los puntos de la hodógrafa para valores aislados de t, p. ej., la tabla

t	$\mathbf{r}$
0	$a\mathbf{i}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{b\pi}{4}\mathbf{k}$
$\frac{\pi}{2}$	$a\mathbf{j} + \frac{b\pi}{2}\mathbf{k}$
π	$-\mathbf{i} + b\pi\mathbf{k}$
$\frac{3}{2}\pi$	$-a\mathbf{j} + \frac{3}{2}\pi\mathbf{k}$
2π	$a\mathbf{i} + 2b\pi\mathbf{k}$

Con el fin de hallar las tangentes a la hélice determinamos la derivada de la función vectorial (28)

$$\mathbf{r}'(t) = -a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}.$$

De aquí se desprende que la ecuación de la tangente a la hélice tiene la forma

$$\frac{x-x_0}{-a\operatorname{sen} t_0}=\frac{y-y_0}{a\cos t_0}=\frac{z-z_0}{b},$$

mientras que para el coseno del ángulo φ, formado con el eje z es válida la igualdad

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{r}'(t),\ \mathbf{k})}{|\mathbf{r}'(t)|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

así, pues, el ángulo φ es constante, lo que significa que la hélice corta bajo ese mismo ángulo todas las generatrices del cilindro $x^2+y^2=a^2$, en el que ella está situada. ▲.

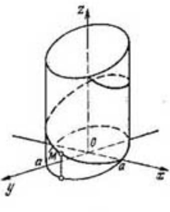


Fig. 110

Ejemplo 2. Demuestren que si

$$\mathbf{r}^{(k)}(t_0)=\mathbf{o}\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$
$$\mathbf{r}^{(n)}(t_0)\neq\mathbf{o}, \tag{29}$$

la ecuación de la tangente a la hodógrafa en el extremo del radio vector $\mathbf{r}(t_0)$ tiene la forma

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}^{(k)}(t_0)\,t+\mathbf{r}(t_0),\quad -\infty<t<+\infty. \tag{30}$$

△ De la condición (29) se desprende que en el caso que consideramos la fórmula de Taylor para el radio vector $\mathbf{r}(t)$ tiene la forma

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}(t_0)=\frac{1}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(t_0)\,\Delta t^n+\mathbf{o}(\Delta t^n),\quad \Delta t\to 0.$$

Por ello, para todos Δt suficientemente pequeños se verifica la condición $\Delta\mathbf{r}\neq\mathbf{o}$ y, por lo tanto, la recta que pasa por los extremos de los radio vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}(t_0+\Delta t)$ está definida unívocamente. El vector $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t^n}$ es paralelo a esa recta y existe el límite

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t^n}=\frac{1}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(t_0).$$

Por ello, con $\Delta t\to 0$ existe el límite de la indicada secante, es decir, hay una tangente a la hodógrafa en el extremo del radio vector $\mathbf{r}(t_0)$ y su ecuación tiene la forma (30). ▲

Ejemplo 3. Demuestren que si $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(t_0)\neq\mathbf{o}$, existe $\mathbf{r}_0'=\mathbf{r}'(t_0)$, $\mathbf{e}(t)$, es decir, un vector unitario en el sentido del vector $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{e}_0=\mathbf{e}(t_0)$, existe $\mathbf{e}_0'=\mathbf{e}'(t_0)$ y

$$\mathbf{r}_0'=(\mathbf{e}_0,\ \mathbf{r}_0')\,\mathbf{e}_0+|\mathbf{r}_0|\,\mathbf{e}_0'. \tag{31}$$

¿Cuál es el sentido mecánico de esta fórmula?

$\triangle$ Es evidente que de la continuidad de $\mathbf{r}(t)$ en el punto t_0 y de la condición $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{o}$ se desprende que en cierto entorno del punto t_0 se verifica la desigualdad $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{o}$, por ello en este entorno está definida la función

$$\mathbf{e}(t)=\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|},$$

con ello es evidente que

$$|\mathbf{e}(t)|=1. \tag{32}$$

Como $\mathbf{r}=|\mathbf{r}|\,\mathbf{e}$ y

$$(|\mathbf{r}|)'_{t=t_0}=(\sqrt{\mathbf{r}^2})'_{t=t_0}=\frac{(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\sqrt{\mathbf{r}^2}}\bigg|_{t=t_0}=\frac{(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|}\bigg|_{t=t_0}=(\mathbf{e}_0,\ \mathbf{r}'_0),$$

entonces de la derivabilidad de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ en el punto t_0 se deduce la derivabilidad de la función escalar $|\mathbf{r}(t)|$ y de la función vectorial $\mathbf{e}(t)=\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}$ en dicho punto. Por ello,

$$\mathbf{r}'_0=\mathbf{r}'(t_0)=(|\mathbf{r}|\mathbf{e})'_{t=t_0}=(|\mathbf{r}|'\mathbf{e}+|\mathbf{r}|\mathbf{e}')|_{t=t_0}=(\mathbf{e}_0,\ \mathbf{r}'_0)\,\mathbf{e}_0+|\mathbf{r}_0|\mathbf{e}'_0,$$

es decir, la igualdad (31) queda demostrada. De (32) se desprende que $\mathbf{e}^2(t)=1$. Derivando esta igualdad obtenemos $(\mathbf{e}(t_0),\ \mathbf{e}'(t_0))=0$, lo que significa que los vectores $\mathbf{e}_0=\mathbf{e}(t_0)$ y $\mathbf{e}'_0=\mathbf{e}'(t_0)$ son ortogonales. Por esta razón, en el caso cuando la hodógrafa de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es la trayectoria de un punto en movimiento, mientras que el parámetro t es el tiempo, la igualdad (31) muestra que el movimiento de dicho punto en cada momento de tiempo t_0 se puede considerar como el resultado de la adición de dos movimientos: de avance en el sentido del radio vector $\mathbf{r}_0$ y rotativo por la circunferencia de radio $|\mathbf{r}_0|$, es decir, en el sentido perpendicular al vector $\mathbf{r}_0$. La fórmula (31) proporciona la descomposición de la velocidad instantánea $\mathbf{v}_0=\mathbf{r}'_0$ sobre la componente radial $(\mathbf{e}_0,\ \mathbf{r}'_0)\,\mathbf{e}_0$ que es la proyección de la velocidad $\mathbf{v}_0$ sobre el sentido del radio vector $\mathbf{r}_0$ y de la componente transversal $|\mathbf{r}_0|\,\mathbf{e}'_0$ sobre el sentido del vector $\mathbf{e}'_0$, es decir, perpendicular al vector $\mathbf{e}'_0$ y, por lo tanto, asimismo al vector $\mathbf{r}_0$. $\blacktriangle$

Ejemplo 4. Sea que la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ está definida y no se reduce a cero en cierto entorno U del punto t_0 y sea que $\varphi(t)$ es el ángulo no negativo menor, expresado en radianes, entre los vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}(t)$, $t\in U$, $0\leqslant\varphi(t)\leqslant\pi$; entonces, $\Delta\varphi=\varphi(t)-\varphi(t_0)=\varphi(t)$ (ya que $\varphi(t_0)=0$). Hagamos $\Delta t=t-t_0$. El límite

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| \tag{33}$$

lleva el nombre de velocidad angular de rotación de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ en el punto t_0 y se designa con $\omega=\omega(t'_0;\mathbf{r})$. Demuestren

que si $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) \neq \mathbf{o}$ y existe la derivada $\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}'(t_0)$, entonces existe también la velocidad angular de rotación $\omega = \omega(t_0; \mathbf{r})$, con ello

$$\omega = \frac{|[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0']|}{r_0^2}. \tag{34}$$

Para el caso $|\mathbf{r}(t)| =$ const obtengan de aquí la fórmula

$$\omega = \frac{|\mathbf{r}_0'|}{|\mathbf{r}_0|}. \tag{35}$$

¿Cuál es su sentido mecánico?

△ Debido a la existencia de la derivada $\mathbf{r}_0'$ la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es continua en el punto t_0. De aquí y de la condición $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{o}$ se deduce que para todos los incrementos Δt suficientemente pequeños se verifica la desigualdad $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) \neq \mathbf{o}$ y, por ello, queda determinado el ángulo $\Delta\varphi$ entre los vectores $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$, con la particularidad de que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi = 0.$$

Con el fin de calcular el límite (33) sustituyamos la función $\Delta\varphi$, infinitamente pequeña con $\Delta t \to 0$, por la función sen $\Delta\varphi$, equivalente a ella, que se halla de la igualdad

$$|[\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)]| = |\mathbf{r}(t_0)|\,|\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)|\,|\operatorname{sen} \Delta\varphi|.$$

Así, pues, tendremos

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\operatorname{sen} \Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|[\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)]|}{|\mathbf{r}(t_0)|\,|\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)|\,|\Delta t|} =$$
$$= \frac{1}{r_0^2} \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{[\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)]}{\Delta t}\right| \tag{36}$$

(aquí fue utilizada de nuevo la continuidad de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ en el punto t_0: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0)$). A continuación, debido a la derivabilidad de la función $\mathbf{r}(t)$ en el punto t_0, tenemos

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0' \Delta t + \varepsilon(\Delta t)\,\Delta t,$$

donde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = \mathbf{o}$. Poniendo esta expresión en (36) y advirtiendo que $[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0] = \mathbf{o}$ y $\lim\limits_{\Delta t \to 0} [\mathbf{r}_0, \varepsilon(\Delta t)] = \mathbf{o}$, obtenemos la fórmula (34).

Si $|\mathbf{r}(t)| = r$ es constante, al derivar la igualdad $\mathbf{r}^2 = r^2$ tendremos $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0') = 0$, es decir, $|r_0|\,|\mathbf{r}_0'| \cos\psi = 0$, donde ψ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}_0'$. Como $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{o}$, o bien $\mathbf{r}_0' = \mathbf{o}$, o bien $\psi = \pi/2$, y, por lo tanto sen $\psi = 1$. En los dos casos,

$$|[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0']| = |\mathbf{r}_0|\,|\mathbf{r}_0'|\,|\operatorname{sen}\psi| = r_0\,|\mathbf{r}_0'|.$$

Poniendo esta expresión en (34) obtenemos la fórmula (35). Cuando la hodógrafa de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es la trayectoria de movimiento de un punto, en tanto que el parámetro t, el tiempo y, por consiguiente, $\mathbf{r}' = \mathbf{v}$, la velocidad, debido a (35), obtenemos

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad v = |\mathbf{v}|, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

o sea, la fórmula que liga el valor de la velocidad angular ω y la lineal v al moverse un punto por la superficie de la esfera $|\mathbf{r}| = r = \text{const}$. ▲

Ejemplo 5. Demuestren que si la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es continua sobre el segmento $[a; b]$ y derivable dentro de él, hay tal punto $\xi \in (a; b)$ que

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)|(b-a). \tag{37}$$

△ Si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, la igualdad (37) es cierta eligiendo el punto $\xi \in (a; b)$ de cualquier modo. Por ello, supongamos que $\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b)$ y designemos con $\mathbf{e}$ el vector unitario en el sentido del vector $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)$. Entonces

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a), \ \mathbf{e}) = (\mathbf{r}(b), \mathbf{e}) - (\mathbf{r}(a), \mathbf{e}). \tag{38}$$

Analicemos la función escalar $f(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{e})$. Ella satisface las condiciones del teorema de Lagrange acerca del valor medio, por lo que existe tal punto $\xi \in (a; b)$ que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, o sea,

$$(\mathbf{r}(b), \mathbf{e}) - (\mathbf{r}(a), \mathbf{e}) = (\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{e})(b-a).$$

De aquí, aplicando la desigualdad de Cauchy para estimar el segundo miembro de esta igualdad

$$|(\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{e})| \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)| \, |\mathbf{e}| = |\mathbf{r}'(\xi)|$$

y haciendo uso de la igualdad (38), obtenemos la desigualdad (37). ▲

24.1. Construyan las hodógrafas de las funciones vectoriale $(-\infty < t < +\infty)$

1) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 1$. 2) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = t^2$.
3) $x = 1$, $y = t$, $z = t^2$. 4) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.
5) $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 0$, $a > 0$.
6) $x = t^2 - 2t + 3$, $y = t^2 - 2t + 1$, $z = 0$.
7) $x = a \operatorname{sen}^2 t$, $y = b \cos^2 t$, $z = t$.

24.2. Demuestren que la hodógrafa de la función vectorial

$$\mathbf{r} = \operatorname{sen} 2\varphi \mathbf{i} + (1 - \cos 2\varphi)\mathbf{j} + 2\cos\varphi \mathbf{k}$$

yace en una esfera.

24.3. Demuestren que la hodógrafa de la función vectorial

$$\mathbf{r} = (a_1t^2 + b_1t + c_1)\,\mathbf{i} + (a_2t^2 + b_2t + c_2)\,\mathbf{j} + (a_3t^2 + b_3t + c_3)\,\mathbf{k}$$

yace en cierto plano y hallen la ecuación de éste.

24.4. Demuestren: si $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$, entonces $\lim\limits_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{a}|$. ¿Es cierta la afirmación inversa?

24.5. Demuestren que la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

es con $t \to 0$ infinitamente pequeña.

24.6. Hallen los límites de las funciones vectoriales:

1) $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1-t}{1+t}\,\mathbf{i} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathbf{j} - \dfrac{\ln(1-t)}{t}\,\mathbf{k}$ con $t \to 0$.

2) $\mathbf{r}(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t-\pi}\,\mathbf{i} + \dfrac{\ln(t/\pi)}{\pi - t}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ con $t \to \pi$.

24.7. Demuestren que para que la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ tenga límite con $t \to t_0$ es necesario y suficiente que ella puede ser representada en la forma

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\alpha}(t),$$

donde $\boldsymbol{\alpha}(t)$ es con $t \to t_0$ una función vectorial infinitamente pequeña

24.8. Demuestren: si $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$ y $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = \lambda$, entonces

$$\lim_{t\to t_0} f(t)\,\mathbf{r}(t) = \lambda\mathbf{a}.$$

24.9. Demuestren: si $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{a}$, $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{b}$ y $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_3(t) = \mathbf{c}$, entonces

1) $\lim\limits_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

2) $\lim\limits_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

3) $\lim\limits_{t\to t_0} [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

4) $\lim\limits_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

24.10. Demuestren que si las funciones escalares $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ y las funciones vectoriales $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_3(t)$ son continuas en el punto t_0, en este punto también lo son las funciones:

1) $\lambda_1(t)\,\mathbf{r}_1(t) + \lambda_2(t)\,\mathbf{r}_2(t)$. 2) $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))$.
3) $[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)]$. 4) $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t))$.
5) $|\mathbf{r}_1(t)|$.

24.11. Hallen la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ y escriban la ecuación de la tangente a un punto arbitrario de su hodógrafa si:
1) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. 2) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
3) $\mathbf{r}(t) = a \operatorname{sen}^2 \omega t\mathbf{i} + b \cos^2 \omega t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

24.12. Hallen las derivadas de las funciones:
1) $\mathbf{r}^2(t)$. 2) $\sqrt{\mathbf{r}^2(t)}$. 3) $[[\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)], \mathbf{r}''(t)]$.
4) $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t))$.

24.13. Demuestren que si la longitud de los vectores $\mathbf{r}(t)$ es constante en el entorno del punto t_0 y existe la derivada $\mathbf{r}'(t_0)$, los vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}'(t_0)$ son ortogonales. ¿Cuál es el sentido mecánico de este hecho?

24.14. Demuestren que para que en todos los puntos de cierto intervalo los vectores $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ sean ortogonales es necesario y suficiente que la función escalar $|\mathbf{r}(t)|$ sea constante en dicho intervalo.

24.15. Demuestren que para que la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, derivable y que no se reduce a cero sobre el intervalo $(a; b)$, tenga sentido constante (es decir, para que con todo $t \in ((a; b)$ el vector $\mathbf{r}(t)$ sea colineal, p. ej., con el vector $\mathbf{r}((a + b/2))$ es necesario y suficiente que los vectores $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ sean colineales.

24.16. Sea que la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ tiene en el punto t_0 una derivada. ¿Será derivable en él la función $|\mathbf{r}(t)|$? ¿Son ciertas en ese punto las igualdades $|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}|'$ y $(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{r}|'$?

24.17. Demuestren que si $\mathbf{r} = x_1(x, y, z, t)\mathbf{i} + x_2(x, y, z, t)\mathbf{j} + x_3(x, y, z, t)\mathbf{k}$, donde x_1, x_2, x_3 son las funciones derivables continuamente de sus argumentos y x, y, z, son funciones continuamente derivables de t, entonces

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

24.18. Construyan las hodógrafas de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (a \operatorname{sen} t, -a \cos t, bt^2)$ y de su derivada.

24.19. Haciendo uso de la definición de derivada de una función vectorial demuestren las fórmulas:
1) $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2'$.
2) $(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}'$, f es una función escalar.
3) $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2')$.
4) $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]' = [\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2']$.
5) $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2', \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3')$.

24.20. Demuestren: si $\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \operatorname{sen} \omega t$, donde ω, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ son constantes,

1) $\left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = [\omega\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. 2) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{r} = 0$.

24.21. Demuestren: si $\mathbf{r} = \mathbf{a}e^{\omega t} + \mathbf{b}e^{-\omega t}$, donde ω, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ son constantes,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{o}.$$

24.22. Demuestren que si la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es derivable en el punto t_0, ella es continua en él.

24.23. Sea que la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ satisface la ecuación diferencial $\mathbf{r}'' = [\mathbf{r}', \mathbf{a}]$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante. Expresen con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{r}'$:

1) $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']^2$. 2) $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$.

24.24. Sea que para la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, dos veces diferenciable sobre el segmento $[a; b]$, en todos los puntos de éste se verifican las condiciones

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)) = 0, \quad [\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)] \neq \mathbf{o}.$$

Demuestren que, en tal caso, la hodógrafa de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ yace en cierto plano.

24.25. Demuestren que si para la función vectorial, dos veces derivable en el segmento $[a; b]$, en todos los puntos de éste los vectores $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ son distintos de cero y colineales, la hodógrafa de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es un segmento de recta.

24.26. Demuestren que la hodógrafa de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$, $t \in \mathbb{R}$, donde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores constantes, con la particularidad de que los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no son colineales, es una parábola. ¿Qué será la hodógrafa si los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son colineales?

24.27. Demuestren que la hodógrafa de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \cos t\mathbf{b} + \operatorname{sen} t\mathbf{c}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, donde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores constantes y con ello los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no son colineales, es una elipse.

24.28. Demuestren que es plana la trayectoria de un punto material, en movimiento por el efecto de una fuerza central.

24.29. La trayectoria de movimiento de un punto está prefijada en coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{r}(t) = (\rho \cos \varphi;\ \rho \operatorname{sen} \varphi;\ z),$$

donde t es el tiempo, $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$, funciones conocidas. Hallen:

1) el coseno del ángulo α entre el radio vector del punto en movimiento y el vector de su velocidad instantánea.

2) el valor de la aceleración cuando el movimiento transcurre por el cilindro $\rho = \rho_0$.

24.30. La trayectoria de un punto en movimiento está prefijada en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{r}(t) = (\rho \cos \varphi \cos \theta;\ \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta;\ \rho \operatorname{sen} \theta),$$

donde t es el tiempo, $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$, funciones conocidas. Hallen el valor de la velocidad instantánea.

24.31. Sea m la masa de un punto, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$, la fuerza que actúa sobre él, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, la ley de movimiento del punto, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, su aceleración, $W = W(t)$, la energía cinética (t es el tiempo, m, una constante). Del principio de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ deduzcan la fórmula $dW = (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$.

24.32. Con las condiciones del anterior problema demuestren la fórmula $d\mathbf{N} = \mathbf{M}dt$, donde $\mathbf{N}$ es el momento de la cantidad de movimiento del punto con relación al origen de coordenadas O, tomado al azar, $\mathbf{M}$, el momento de la fuerza $\mathbf{F}$ respecto al punto O. (La cantidad de movimiento de un punto material se llama el vector igual al producto de su masa por la velocidad. Si cierto vector $\mathbf{b}$ está aplicado al punto P, el momento del vector $\mathbf{b}$ respecto al punto O lleva el nombre de vector $[\overline{OP}, \mathbf{b}]$).

24.33. Aduzcan el ejemplo de la función vectorial derivable $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, para la que no hay tal punto $\xi \in [a; b]$ que $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) = \mathbf{r}'(\xi)(b-a)$ (es decir, muestren que para la función vectorial es incierto, en este sentido, el análogo de la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange).

24.34. Demuestren que para que la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, derivable sobre el intervalo $(a; b)$, sea constante, es decir, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}$, $a < t < b$, $\mathbf{c}$ es un vector constante, es necesario y suficiente que la derivada $\mathbf{r}'(t)$ sea idénticamente igual a cero en el intervalo $(a; b)$.

---

2. Curvas en el plano y el espacio. Lleva el nombre de *curva* (o con mayor detalle, una curva prefijada paramétricamente) el conjunto Γ en el espacio R^3, preestablecido como la imagen continua de cierto segmento $[a; b]$, es decir,

$$t \to M(t) \in R^3, \quad t \in [a; b],$$

donde $M(t)$ es una aplicación continua. En tal caso, escribimos

$$\Gamma = \{M(t); \quad a \leqslant t \leqslant b\}. \tag{39}$$

Si en el espacio R^3 está fijado un sistema cartesiano de coordenadas x, y, z, la prefijación de la aplicación $M(t)$ es equivalente a la prefijación de tres funciones tales

$$x(t),\ y(t),\ z(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{40}$$

llamadas funciones coordenadas de la aplicación $M(t)$, que

$$M(t) = (x(t);\ y(t);\ z(t)). \tag{41}$$

La continuidad de la aplicación $M(t)$ significa la continuidad sobre el segmento $[a; b]$ de todas sus funciones coordenadas. La aplicación $M(t)$ recibe el nombre de *parametrización* o *representación de*

la curva Γ, en tanto que la aplicación (40), al verificarse la condiciones (41), su *representación coordenada*. La variable t se denomina *parámetro* de la curva Γ.

El conjunto de los valores de la aplicación $M(t)$ en el espacio R^3 se llama *portador de la curva* Γ. Si un mismo punto del portador de la curva Γ es, con la aplicación $M(t)$, la imagen de dos puntos diferentes del segmento $[a;\ b]$, él lleva el nombre de *punto múltiple* de la curva. Por regla, la curva y su portador se designan con una misma letra, con frecuencia el portador de la curva también se denomina *curva*.

P. ej., cuando se dice que el gráfico de la ecuación $F(x, y) = 0$ en el plano o bien la intersección de los gráficos de las ecuaciones $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ en el espacio son curvas, por esto se entiende que estos conjuntos son los portadores de las correspondientes curvas.

Si

$$t = t(t_1),\quad a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1 \tag{42}$$

es una función estrictamente monótona, la aplicación

$$M(t(t_1)),\quad a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1$$

lleva el nombre de representación de la misma curva (39), en tanto que la función (42), la transformación admisible del parámetro.

Así, pues, la curva es una determinada clase de las aplicaciones continuas de segmentos en el espacio ligados con las transformaciones admisibles del parámetro.

La función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (x(t);\ y(t);\ z(t)),\quad a \leqslant t \leqslant b \tag{43}$$

se denomina *representación vectorial de la curva* (39), con ello se escribe

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

De modo que, la curva Γ puede prefijarse con una de las tres formas:

$$\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\},$$
$$\Gamma = \{x(t),\ y(t),\ z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\},$$
$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

En algunas ocasiones, por curva se entiende también un conjunto en el espacio, prefijado como la imagen continua de cualquier intervalo en el eje numérico (es decir, no es obligatorio que sea un segmento, es posible que sea un intervalo o bien semiintervalo).

Toda parametrización de una curva genera en ella determinado orden de los puntos: si $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, el punto $M(t_2)$

se denomina el siguiente tras el punto $M(t_1)$ si $t_2 > t_1$. Si sobre la curva se ha prefijado el orden de puntos (para lo que es suficiente fijar alguna de sus parametrizaciones), ella se llama *curva orientada*. Para las curvas orientadas se admiten como transformaciones admisibles del parámetro sólo funciones estrictamente crecientes (42). Si $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, la curva orientada, prefijada con la representación $M(a+b-t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, se llama *curva orientada en sentido opuesto al de la curva prefijada* Γ.

Si las funciones coordenadas (40) de la aplicación $M(t)$ (véase (41)), o bien, lo que es lo mismo, las funciones coordenadas de la función vectorial (43) son derivables o bien continuamente derivables, etc., la curva (39) se llama *derivable* o *continuamente derivable*, o bien *dos veces derivable*, etc., respectivamente. Para una curva derivable (continuamente derivable, dos veces derivable, etc.) las transformaciones admisibles del parámetro son sólo derivables (correspondientemente, continuamente derivables, dos veces derivables, etc.) las transformaciones del parámetro para las que la derivada no se reduce a cero.

El punto $M(a)$ se llama *origen* y el punto $M(b)$, *punto extremo de la curva* (39). Si $M(a) = M(b)$ la curva (39) se llama *cerrada*.

Si la curva yace en cierto plano, ella se denomina *plana*, en tanto que si ella yace sobre cierta esfera, se denomina *esférica*. Si en el plano en que yace la curva plana que examinamos está prefijado un sistema polar de coordenadas ρ, φ, la prefijación de la curva con la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$, $a \leqslant \varphi \leqslant b$, lleva el nombre de su *representación en coordenadas polares*. Si hacemos uso de las fórmulas para pasar de las coordenadas cartesianas x, y a las polares: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$, de la representación de la curva en coordenadas polares se puede obtener su representación paramétrica con el parámetro φ:

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \operatorname{sen} \varphi, \quad a \leqslant \varphi \leqslant b.$$

Si están prefijadas dos curvas

$$\Gamma_1 = \{M_1(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \text{ y } \Gamma_2 = \{M_2(t);\ b \leqslant t \leqslant c\},$$

con la particularidad de que $M_1(b) = M_2(b)$, la curva

$$\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant c\},$$

en donde

$$M(t) = \begin{cases} M_1(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant b, \\ M_2(t) & \text{si } b \leqslant t \leqslant c \end{cases}$$

lleva el nombre de *unión (suma) de las curvas* Γ_1 y Γ_2 y se designa con $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Sea $\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva derivable y $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$ (o bien $\mathbf{r}(t_0) = \ldots = \mathbf{r}^{(n-1)}(t_0) = \mathbf{o}$, $\mathbf{r}^{(n)}(t_0) \neq \mathbf{o}$), $t_0 \in [a;\ b]$. Entonces la recta tangente a la hodógrafa de la función vectorial

$\mathbf{r}(t)$ en el extremo del radio vector $\mathbf{r}(t_0)$ se denomina asimismo *tangente a la curva* Γ. De este modo vemos que la determinada así la tangente a la curva no depende de la elección de la parametrización de la curva.

El vector $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$ se denomina *vector tangente* a la curva Γ y su sentido, *positivo en la tangente* con su parametrización fijada; él corresponde al crecimiento del parámetro, por lo que el vector $\mathbf{r}'(t_0)$ también lleva el nombre de *vector tangente de la curva orientada* Γ.

El plano que pasa por el extremo del radio vector $\mathbf{r}(t_0)$ y es perpendicular a la recta tangente, recibe el nombre de *plano normal* (en el correspondiente punto de la curva) en tanto que la recta que pasa por el extremo del mencionado radio vector y que yace en el plano normal se llama *normal*.

El ángulo entre las curvas orientadas, que se cortan en cierto punto, lleva el nombre de ángulo entre sus tangentes a ese punto.

Sea

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\quad a \leqslant t \leqslant b\} \tag{44}$$

una curva, $\tau = \{t_i\}\big|_{i=0}^{i=n}$, la partición del segmento $[a; b]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots t_n = b$, L_τ, una quebrada con los vértices en los

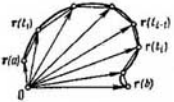


Fig. 111

extremos de los radio vectores $\mathbf{r}(t_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ (fig. 111), σ_τ, su longitud:

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|.$$

La longitud

$$S_\Gamma = \sup_\tau \sigma_\tau,$$

donde la cota superior se toma según las posibles particiones τ del segmento $[a; b]$ lleva el nombre de *longitud de la curva* (44).

Si $S_\Gamma < +\infty$ la curva Γ se llama *rectificable*.

Teorema 1. Si la curva (44) es continuamente derivable, ella es rectificable y su longitud S_Γ satisface la desigualdad

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant (b - a) \max_{[a,\, b]} |\mathbf{r}'(t)|. \tag{45}$$

Teorema 2. Si la curva (44) es continuamente derivable, entonces la longitud variable del arco s, contada desde el origen de la curva, o respectivamente, desde su extremo, es una función continuamente derivable creciente, correspondientemente decreciente, del parámetro t; con ello

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|, \text{ correspondientemente } \frac{ds}{dt}=-\left|\frac{d\mathbf{r}}{\partial t}\right|. \qquad (46)$$

Si $\mathbf{r}(t)=(x(t);\ y(t);\ z(t))$, entonces

$$\frac{ds}{dt}=\pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (47)$$

Cuando el parámetro de una curva continuamente diferenciable es la longitud variable del arco s:

$$\Gamma=\{\mathbf{r}(s);\ 0\leqslant s\leqslant S\};\ \mathbf{r}(s)=(x(s);\ y(s);\ z(s)), \qquad (48)$$

entonces

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right|=1,$$

es decir, el vector

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\mathbf{r}}{ds} \qquad (49)$$

es el *vector tangente unitario* a la curva (48). Por ello, si $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los *cosenos directores del sentido positivo de la tangente* a la curva (48), o sea,

$$\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma),$$

entonces

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta, \quad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma. \qquad (50)$$

Cuando la curva es el gráfico de la función $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, y la longitud variable de sus arcos $s=s(x)$ se cuenta desde el origen del gráfico $(a;\ f(a))$,

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

El punto $(x(t_0);\ y(t_0);\ z(t_0))$ de la curva (44) recibe el nombre de *singular* si $\mathbf{r}'(t_0)=\mathbf{0}$; si, al revés, $\mathbf{r}'(t_0)\neq\mathbf{0}$, *no singular*.

Para cada curva continuamente derivable (44) sin puntos singulares existe su representación $\mathbf{r}(s)$, $0\leqslant s\leqslant S$, en la que se toma como parámetro s la longitud variable del arco de dicha curva.

Ejemplo 6. Representen la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = Rx$ en forma de una curva prefijada de forma paramétrica (con mayor precisión, del portador de la curva).

△De la ecuación $x^2 + y^2 = Rx$ se desprende que $0 \leqslant x \leqslant R$. Por ello, podemos hacer $x = R \operatorname{sen}^2 t$. Entonces

$$y^2 = Rx - x^2 = R^2 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t,$$
$$z^2 = R^2 - (x^2 + y^2) = R^2 - Rx = R^2 \cos^2 t$$

y es fácil comprobar que la curva

$$\left.\begin{array}{c} x = R \operatorname{sen}^2 t, \quad y = R \operatorname{sen} t \cos t, \\ z = R \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \end{array}\right\} \tag{51}$$

coincide con la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = Rx$, con la particularidad de que el punto $(R; 0; 0)$ se obtiene con los valores de los parámetros $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$,

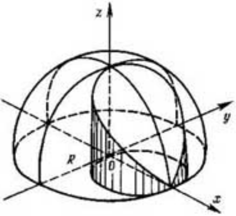


Fig. 112

es decir, es el punto múltiple. La línea (51) lleva el nombre de *curva de Viviani* (fig. 112).▲

Ejemplo 7. Hallen las rectas tangentes y normales al plano de la curva $z = x^2 + y^2$, $y = x$.

△Tomemos la variable x como parámetro de la curva dada. Entonces la representación de la curva tendrá la forma

$$\mathbf{r}(x) = (x;\ x;\ 2x^2).$$

Hallando de aquí el vector tangente $\mathbf{r}'(x) = (1;\ 1;\ 4x)$, obtenemos, debido a la fórmula (14), la ecuación de la tangente en el punto $(x_0;\ x_0;\ 2x_0^2)$ en la forma

$$x - x_0 = y - x_0 = \frac{z - 2x_0^2}{4x_0}.$$

Como el vector $\mathbf{r}'(x_0) = (1;\ 1;\ 4x_0)$ es perpendicular al plano normal de la curva en el punto que consideramos, la ecuación de este plano tiene la forma

$$(x - x_0) + (y - x_0) + 4x_0(z - 2x_0^2) = 0,$$

o sea,

$$x + y + 4x_0 z = 2x_0 + 8x_0^3. \blacktriangle$$

Ejemplo 8. ¿Con qué a la curva

$$\left.\begin{array}{l} x = e^{at}\cos t, \quad y = e^{at}\operatorname{sen} t, \\ z = e^{at}, \quad -\infty < t < +\infty \end{array}\right\} \tag{52}$$

corta todas las generatrices del cono $x^2 + y^2 = z^2$ bajo el ángulo $\pi/4$?

$\triangle$Con una simple sustitución en la ecuación del cono es fácil comprobar que la curva (52) en efecto yace en él. Si $\mathbf{r}(t)$ es un vector con coordenadas (52), el vector tangente $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t)$ a la curva (52), tiene la forma

$$\mathbf{r}'(t) = (e^{at}(a\cos t - \operatorname{sen} t);\ e^{at}(a\operatorname{sen} t + \cos t);\ ae^{at}),$$

mientras que el vector $\mathbf{l} = \mathbf{l}(t)$, dirigido por la generatriz del cono $x^2 + y^2 = z^2$ a ese mismo punto de la curva (52), la forma

$$\mathbf{l}(t) = \left(x;\ y;\ \sqrt{x^2+y^2}\right) = (e^{at}\cos t;\ e^{at}\operatorname{sen} t;\ e^{at}).$$

Como

$$|\mathbf{r}'(t)| = e^{at}\sqrt{2a^2+1}, \quad |\mathbf{l}(t)| = e^{at}\sqrt{2},$$

entonces

$$\cos(\widehat{\mathbf{r}', \mathbf{l}}) = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{l})}{|\mathbf{r}'|\,|\mathbf{l}|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+1}}. \tag{53}$$

Por esta razón, si el ángulo entre los vectores $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{l}$ es igual a $\pi/4$ ó $3\pi/4$, de (53) se obtiene la ecuación

$$\frac{|a|\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

de donde $a = \pm 1/\sqrt{2}. \blacktriangle$

Ejemplo 9. Hallen la longitud del arco $s(t)$ de la *hélice*

$$x = a\cos t,\ y = a\,\text{sen}\,t,\ z = bt,\ 0 \leqslant t < +\infty \tag{54}$$

y obtengan la parametrización de la hélice cuando se toma como su parámetro la longitud variable del arco.

△Como para el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ de la hélice tiene lugar la fórmula

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\,\text{sen}\,t;\ a\cos t;\ b),$$

debido a la fórmula (46), para la derivada por el parámetro t de la longitud del arco calculada hacia el crecimiento del parámetro, tendremos

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Si es constante la derivada de cierta función, ésta es lineal y, como en el caso dado $s(0)=0$,

$$s(t) = t\sqrt{a^2+b^2},\quad t \geqslant 0.$$

Poniendo $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en la fórmula (54), obtenemos

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y = a\,\text{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}.\ ▲$$

24.35. Confeccionen la ecuación paramétrica de una circunferencia desarrollada, es decir, la trayectoria del extremo de un hilo fuertemente tensado que se desenrolla de una bobina redonda plana e inmóvil.

24.36. La recta OL, no perpendicular al eje Oz, gira uniformemente alrededor de éste a velocidad angular constante ω. El punto M está en movimiento por la recta OL: 1) a una velocidad proporcional a la distancia OM del punto inmóvil M hasta el punto O; 2) a velocidad constante. En el primer caso el punto M describe una espiral cónica, en el segundo, una hélice cónica. Escriban las ecuaciones paramétricas de esas curvas.

24.37. Demuestren que las ecuaciones

$$x = \cos t,\ y = \text{sen}\,t,\ -\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$$

y

$$x = \sqrt{t(2-t)},\quad y = t-1,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

son las parametrizaciones de una misma curva.

24.38. Demuestren que las ecuaciones

$$x = a\cos t,\ y = b\,\text{sen}\,t,\ -\pi < t < \pi$$

$$x = a\,\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y = b\,\frac{2t}{1+t^2},\quad -\infty < t < +\infty$$

son las parametrizaciones de una misma curva. ¿Cómo se mueve un punto por esta curva cuando el parámetro t crece desde $-\infty$ hasta $+\infty$?

24.39. Muestren que la curva

$$x = e^{at}\cos t,\quad y = e^{at}\operatorname{sen} t,\quad z = e^{at}$$

yace en el cono $z^2 = x^2 + y^2$.

24.40. Muestren que la curva

$$x = \frac{t}{1+t^2+t^4},\quad y = \frac{t^2}{1+t^2+t^4},\quad z = \frac{t^3}{1+t^2+t^4}$$

es una curva esférica.

24.41. ¿Con qué condición sobre la matriz (a_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3)$ la curva

$$\begin{aligned} x &= a_{11}\varphi(t) + a_{12}\psi(t) + a_{13}\chi(t) + b_1,\\ y &= a_{21}\varphi(t) + a_{22}\psi(t) + a_{23}\chi(t) + b_2,\\ z &= a_{31}\varphi(t) + a_{32}\psi(t) + a_{33}\chi(t) + b_3 \end{aligned}$$

es una curva plana?

24.42. Demuestren que la proyección de la curva de Viviani

$$x = R\operatorname{sen}^2 t,\ y = R\operatorname{sen} t\cos t,\ z = R\cos t,$$
$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

sobre el plano de las variables x y z es el arco de una parábola.

24.43. Hallen la proyección de la curva $x = e^t\operatorname{sen} t$, $y = e^t\cos t$, $z = t$, $-\infty < t < +\infty$, en el plano de las variables x e y.

24.44. Demuestren que la proyección de la hélice

$$x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t,\ z = bt,\ -\infty < t < +\infty$$

sobre el plano de las variables y y z es una sinusoide.

24.45. Demuestren que al trasladar el origen de coordenadas al punto $O_1 = (0; 0; \beta b)$ y al girar los ejes de abscisas y ordenadas en torno del nuevo eje de las z-coordenadas al ángulo β a la representación de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$, $z = bt$ puede dársele la forma $x_1 = a\cos t_1$, $y_1 = a\operatorname{sen} t_1$, $z_1 = bt_1$. Esto muestra que la hélice es capaz de deslizarse por sí misma.

24.46. Hallen la ecuación de la tangente a la curva:

1) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t^2$ con $t = 1$.

2) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\operatorname{sen} t$, $z = e^t$ con $t = 0$.

24.47. Confeccionen la ecuación de la tangente a la curva

$$x = a(t - \operatorname{sen} t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a\operatorname{sen}(t/2)$$

con $t = \pi/2$. ¿Qué ángulo forma esta tangente con el eje Oz?

24.48. Hallen la ecuación de la recta tangente y normal al plano de la curva $x = t^4$, $y = t^3$, $z = t^2$ en un punto arbitrario.

24.49. Hallen la tangente a la curva de Viviani (véase 24.42) paralela al plano $y = 0$.

24.50. ¿En qué puntos es paralela al plano $3x + y + z + 2 = 0$ la tangente a la curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$?

24.51. Hallen el plano normal a la curva $z = x^2 + y^2$, $y = x$ perpendicular a la recta $x = y = z$.

24.52. Hallen la tangente a la curva $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 25$ en el punto (1; 3; 4).

24.53. Hallen los cosenos de los ángulos con los ejes de coordenadas de la tangente a la curva $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

24.54. A la curva $y^2 = 2px$, $z^2 = 2qx$ se ha trazado una tangente en el punto en donde $x = (p + q)/2$. Hallen la longitud del segmento de la tangente desde el punto de tangencia hasta el plano $x = 0$.

24.55. Demuestren que los planos normales a la curva $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} t$, $z = a \cos \alpha \operatorname{sen} t$ pasan por la recta $x = 0$, $z + y \operatorname{tg} \alpha = 0$.

24.56. Demuestren que las tangentes a la curva $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ forman un ángulo constante con cierto sentido determinado.

24.57. Las coordenadas de los puntos de cierta curva satisfacen la relación

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (xdx + ydy + zdz)^2.$$

Demuestren que las tangentes a esa curva son tangentes a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

24.58. Demuestren que las tangentes a la curva

$$x = a(\operatorname{sen} t + \cos t),\ y = a(\operatorname{sen} t - \cos t),\ z = be^{-t}$$

cortan el plano de las variables x e y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4a^2$.

24.59. Escriban la ecuación de la tangente y del plano normal a la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en el punto (1; 1; 1). ¿Qué curva obtenemos en la intersección de las tangentes con el plano de las variables x, y?

24.60. Hallen la ecuación del plano normal a la curva $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ $(y \neq \pm 1)$ en un punto tomado al azar.

24.61. Demuestren que todos los planos normales a la curva de Viviani $x = a \operatorname{sen}^2 t$, $y = a \operatorname{sen} t \cos t$, $z = a \cos t$ pasan por el origen de coordenadas.

24.62. Demuestren que si todos los planos normales a una curva tridimensional pasan por un punto fijado, la curva es esférica.

24.63. Demuestren que la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ corta todas las generatrices del cono $x^2 + y^2 = z^2$ bajo un mismo ángulo.

24.64. Demuestren que las curvas de intersección de los cilindros $y^2 + z^2 = b^2$ con la superficie $xy = az$ cortan todas las genera-

trices de dicha superficie, que pertenecen a un mismo sistema, bajo ángulo recto.

24.65. Demuestren que la curva $x = a \operatorname{tg} t$, $y = b \cos t$, $z = b \operatorname{sen} t$ yace en la superficie de un paraboloide y corta todas sus generatrices de un mismo sistema bajo ángulo recto.

24.66. La curva llamada *loxodrómica* se define con la ecuación

$$\varphi = a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right),$$

donde θ es la latitud, φ, la longitud de un punto sobre la esfera. Demuestren que ella corta los meridianos de la esfera bajo el ángulo α, cuya tangente es igual a a.

Enunciemos la definición de *proyección estereográfica* de un plano sobre una esfera tangente a él. Esté en el espacio R^3 fijado un sistema cartesiano de coordenadas x, y, z y esté dada una esfera de radio $a/2$ con centro en el punto $B =$

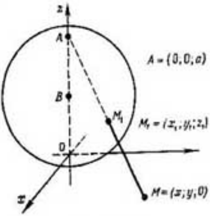


Fig. 113

$= (0;\ 0;\ a/2)$ y, por lo tanto, tangente al plano de las variables x e y (fig. 113). Su ecuación tiene la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = az. \tag{55}$$

Unamos con una recta el punto superior de la esfera, es decir, el punto $A = (0;\ 0;\ a)$ con el punto arbitrario fijado $M = (x;\ y;\ 0)$ del plano de las variables x e y. Entonces el punto $M_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, por el que dicha recta corta la esfera (55), recibe el nombre de *proyección estereográfica* del punto M en la esfera (55), mientras que el punto M, proyección estereográfica del punto de la esfera M_1 sobre el plano que consideramos. La proyección estereográfica establece la correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y de la esfera con

el punto punzado A. Las coordenadas de los puntos M y M_1 están ligadas con las relaciones

$$x_1=\frac{a^2x}{x^2+y^2+a^2}, \quad y_1=\frac{a^2y}{x^2+y^2+a^2},$$
$$z_1=\frac{a(x^2+y^2)}{x^2+y^2+a^2}. \qquad (56)$$

24.67. Demuestren que la proyección estereográfica proporciona una *representación conforme*, es decir, las curvas se cortan en el plano bajo el mismo ángulo que sus imágenes en una esfera.

24.68. Demuestren que la curva $\rho = e^{\lambda\varphi}$, situada en el plano de las variables x e y, de modo que el eje polar coincide con el eje positivo x, con la proyección estereográfica (56) se transforma en la loxodrómica.

24.69. Demuestren que las circunferencias en una esfera se convierten con la proyección estereográfica en circunferencias o rectas en el plano.

24.70. La proyección central del plano de coordenadas de las variables x, y sobre la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $0 \leqslant z < a$, consiste en lo siguiente. El punto $M = (x; y; 0)$, arbitrariamente fijado en el plano de las variables x e y, se une mediante una recta con el centro de la mencionada semiesfera, es decir, con el punto $A = (0; 0; a)$. El punto M_1, en el que esta recta corta la semiesfera, se toma como la representación del punto M sobre la semiesfera. Demuestren que esta proyección no es una representación conforme, o sea, que ella, generalizando, no conserva los ángulos entre las curvas.

24.71. Hallen la derivada de la longitud del arco según el parámetro para las siguientes curvas:

1) *La catenaria* $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, $-a \leqslant x \leqslant a$.
2) *La elipse* $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
3) *La hipérbola* $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $-\infty < t < +\infty$.
4) *La astroide* $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
5) *La cicloide* $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $-\infty < t < +\infty$.
6) *La hélice* $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, $-\infty < t < +\infty$.
7) *La curva de Viviani* $x = R\operatorname{sen}^2 t$, $y = R \operatorname{sen} t \cos t$, $z = R\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

24.72. Sea que la curva plana Γ está dada en coordenadas polares con la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$, donde la función $\rho(\varphi)$ es continuamente derivable sobre cierto segmento $[a; b]$. Demuestren que si $s = s(\varphi)$ es la longitud del arco de la curva Γ, calculada a partir de su origen, entonces

$$\frac{ds}{d\varphi}=\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\rho^2}.$$

24.73. Hallen la derivada de la longitud del arco para las siguientes curvas prefijadas en coordenadas polares:

1) *La espiral de Arquímedes* $\rho = a\varphi$.

2) *La espiral hiperbólica* $\rho = a/\varphi$.

3) *La espiral logarítmica* $\rho = ae^{b\varphi}$, $-\infty < \varphi < +\infty$.

24.74. Demuestren que la frontera de una figura convexa acotada en el plano es una curva rectificable.

24.75. Demuestren que durante la unión de las curvas, sus longitudes se suman: si $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $S_\Gamma = S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}$.

---

3. Curvatura y torsión de una curva. Sea

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\} \tag{57}$$

una curva dos veces continuamente derivable, s, la longitud variable de su arco y $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, el vector tangente unitario. La velocidad angular de rotación (véase (33)) del vector tangente $\boldsymbol{\tau}$ en el punto dado de la curva recibe el nombre de *curvatura de la curva* en dicho punto y se designa con $k = k(s)$, es decir (véase (35)),

$$k(s) = \omega(s;\ \boldsymbol{\tau}) = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s)\right|. \tag{58}$$

La magnitud inversa a la curvatura lleva el nombre de *radio de curvatura* de la curva en el punto dado:

$$R = R(s) = \frac{1}{k(s)}. \tag{59}$$

Si $k(s_0) \neq 0$, $s_0 \in [a;\ b]$, el vector unitario en el sentido del vector $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s_0)$ (él es perpendicular al vector $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s_0)$) lleva el nombre de *vector normal principal* y se designa con $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s_0)$. Así, pues

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\mathbf{v}. \tag{60}$$

La recta que pasa por un punto de la curva paralelamente al vector $\mathbf{v}$ se denomina *normal principal*.

El producto vectorial $[\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{v}]$ se denomina *vector binormal* y se designa con $\boldsymbol{\beta}$, es decir,

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{v}]. \tag{61}$$

La recta que pasa por el punto de la curva paralelamente al vector $\boldsymbol{\beta}$ recibe el nombre de *binormal*. Si la curva (57) es tres veces continuamente derivable, la derivada del vector binormal $\boldsymbol{\beta}$ es colineal con el vector $\mathbf{v}$; el factor por el que hay que multiplicar el vector $\mathbf{v}$ para obtener el vector $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ se designa con $-\varkappa$:

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\varkappa\mathbf{v}. \tag{62}$$

El coeficiente $\varkappa = \varkappa(s)$ se llama *torsión de la curva* en el punto dado. Para la derivada $\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}$ es válida la fórmula

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -k\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}. \tag{63}$$

Las fórmulas (60), (62) y (63) son llamadas *fórmulas de Frenet*. Para la curva Γ las ecuaciones

$$k = k(s), \quad \varkappa = \varkappa(s) \tag{64}$$

(s es la longitud variable del arco en la curva Γ, k, su curvatura, $\varkappa$, su torsión) llevan el nombre de *ecuaciones naturales de la curva*. El tetraedro con el vértice en un punto de la curva Γ, cuyas aristas tienen longitud igual a la unidad y están dirigidas por los vectores $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\beta}$ se llama *triedro intrínseco de Frenet*. A veces, para abreviar, los propios vectores $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\beta}$ se llaman *normal principal y binormal*, respectivamente.

Si la curva $\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ es tres veces continuamente derivable (t es un parámetro arbitrario), entonces, en la suposición de que los denominadores de las fracciones escritas a continuación no se reducen a cero, tienen lugar las siguientes fórmulas:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \tag{65}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{[[\mathbf{r}', \mathbf{r}''], \mathbf{r}']}{|[[\mathbf{r}', \mathbf{r}''], \mathbf{r}']|}, \tag{66}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}, \tag{67}$$

$$k = \frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3}, \tag{68}$$

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{k^2 |\mathbf{r}'|^6} = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|^2}, \tag{69}$$

o bien en la forma de coordenadas:

$$k = \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \tag{70}$$

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}. \tag{71}$$

Los puntos en los que la curvatura es nula reciben el nombre de *puntos de rectificación* de la curva, en tanto que los puntos en los que es nula la torsión, sus *puntos aplanables*.

El plano que pasa por el punto dado de la curva paralelamente a la tangente y a la normal principal (es decir, perpendicularmente a la binormal) lleva el nombre de *plano osculador.* El plano paralelo a la normal principal y a la binormal (es decir, perpendicular a la tangente), como ya dijimos más arriba se denomina *plano normal,* en tanto que el plano paralelo a la tangente y a la binormal (es decir, perpendicular a la normal principal), *plano rectificante* (fig. 114).

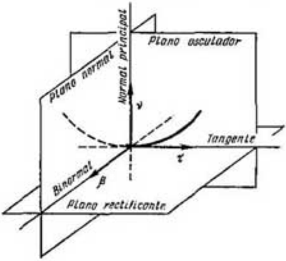


Fig. 114

La ecuación del plano osculador en el punto en que la curvatura no se reduce a cero, tiene la forma

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_0'',\ \mathbf{r}_0')=0. \qquad (72)$$

Aquí, $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(t_0)=(x_0;\ y_0;\ z_0)$ es el radio vector del punto dado de la curva, $\mathbf{r}_0'=\mathbf{r}'(t_0)=(x_0';\ y_0';\ z_0')$, $\mathbf{r}_0''=\mathbf{r}''(t_0)=(x_0'';\ y_0'';\ z_0'')$, mientras que $\mathbf{r}=(x;\ y;\ z)$ es el radio vector corriente del plano osculador. En la forma coordenada, la ecuación (72) se escribe del modo siguiente:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}=0. \qquad (73)$$

En el punto $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ la binormal es perpendicular al plano osculador y, por ello, su ecuación tiene la forma

$$\frac{x-x_0}{y_0'z_0''-z_0'y_0''}=\frac{y-y_0}{z_0'x_0''-x_0'z_0''}=\frac{z-z_0}{x_0'y_0''-y_0'x_0''}. \qquad (74)$$

La anotación vectorial de la ecuación del plano normal tiene el siguiente aspecto:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_0')=0 \tag{75}$$

y la de coordenadas,

$$(x-x_0)\,x_0'+(y-y_0)\,y_0'+(z-z_0)\,z_0'=0. \tag{76}$$

La anotación vectorial de la ecuación del plano osculador tiene la forma

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ [[\mathbf{r}_0',\ \mathbf{r}_0''],\ \mathbf{r}_0'])=0. \tag{77}$$

Pero si como parámetro de la curva se ha tomado la longitud variable del arco, la ecuación del plano osculador tiene una forma más sencilla:

$$\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}(s_0)\right)=0, \tag{78}$$

o en forma coordenada

$$(x-x_0)\,\frac{d^2x}{ds^2}(s_0)+(y-y_0)\,\frac{d^2y}{ds^2}(s_0)+(z-z_0)\,\frac{d^2z}{ds^2}(s_0)=0. \tag{79}$$

El punto que yace en la normal principal a la curva, a una distancia igual al radio de curvatura R en el sentido del vector de la normal principal $\mathbf{v}$ lleva el nombre de *centro de curvatura de la curva*

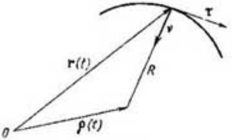


Fig. 115

en su punto dado (fig. 115). Si designamos con $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(t)$ el radio vector del centro de curvatura de la curva $\Gamma=\{\mathbf{r}(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$,

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\mathbf{r}(t)+R(t)\,\mathbf{v}(t). \tag{80}$$

El círculo que yace en el plano osculador con centro en el centro de curvatura de la curva en el punto dado de ella y cuyo radio es igual al radio de curvatura en dicho punto se denomina *círculo de curvatura de la curva* en el punto de ésta que examinamos.

La curva para la que la función vectorial (80) es su representación recibe el nombre de *evoluta de la curva* Γ (abreviando se dice que el

conjunto de centros de la curvatura de la curva forma su evoluta). Si la curva Γ_1 es la evoluta de Γ, la curva Γ se denomina *evolvente de la curva* Γ_1.

La ecuación de la evoluta de la curva Γ puede escribirse en la forma

$$\rho(t)=\mathbf{r}(t)+\frac{1}{k^2}\,\frac{s'\mathbf{r}''-s''\mathbf{r}'}{s'^3}. \tag{81}$$

donde, si $\mathbf{r}(t)=(x(t);\ y(t);\ z(t))$, entonces

$$s'=|\mathbf{r}'|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},\quad s''=\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}. \tag{82}$$

Si la curva Γ yace en el plano de las variables x e y, $\varkappa=0$, mientras que

$$k=\frac{1}{R}=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}; \tag{83}$$

si $(\xi;\ \eta)$ es su centro de curvatura, entonces

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x-y'\,\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},\\ \eta&=y+x'\,\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}.\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Para el caso cuando la curva Γ es el gráfico de la función $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, las fórmulas para su curvatura k y las coordenadas ξ, η de su centro de curvatura toman la forma

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}, \tag{85}$$

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x-\frac{1+y'^2}{y''}\,y',\\ \eta&=y+\frac{1+y'^2}{y''}.\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Ejemplo 10. Hallen el triedro intrínseco de Frenet de la hélice; calculen su curvatura y torsión.

$\triangle$En el ejemplo 9 de este parágrafo fue mostrado que la representación de una hélice, cuando por parámetro se ha tomado la longitud variable del arco, tiene la forma

$$x=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$z=\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad s\geqslant 0.$$

Por ello,

$$\tau=\left(\frac{dx}{ds};\ \frac{dy}{ds};\ \frac{dz}{ds}\right)=$$

$$=\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\frac{d\tau}{ds}=\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ -\frac{a}{a^2+b^2}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};0\right).$$

De aquí

$$k=\left|\frac{d\tau}{ds}\right|=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Además, tomando en consideración la primera fórmula de Frenet (véase (60)), tenemos

$$\nu=\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ -\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ 0\right)$$

y, por consiguiente,

$\beta=[\tau,\ \nu]=$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{i}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{j}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{k}.$$

Derivando esta igualdad, obtenemos

$$\frac{d\beta}{ds}=\frac{b}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{i}+\frac{b}{a^2+b^2}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{j}=-\frac{b}{a^2+b^2}\,\nu.$$

De aquí, según la tercera fórmula de Frenet, $\varkappa = b/(a^2+b^2)$. ▲

Ejemplo 11. Hallen el radio de curvatura y la evoluta de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a\geqslant b>0.$$

△Escribamos la ecuación de la elipse en forma paramétrica:

$$x=a\cos t,\ y=b\operatorname{sen}t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Advirtiendo que $x'=-a\operatorname{sen}t$, $y'=b\cos t$, $x''=-a\cos t$, $y''=-b\operatorname{sen}t$, obtenemos (véanse (59), (83))

$$R=\frac{1}{k}\ \frac{(a^2\operatorname{sen}^2t+b^2\cos^2t)^{3/2}}{ab\operatorname{sen}^2t+ab\cos^2t}=\frac{(a^2\operatorname{sen}^2t+b^2\cos^2t)^{3/2}}{ab}.$$

De aquí, haciendo uso de las fórmulas (84), obtenemos la ecuación de la evoluta

$$\xi = a\cos t - b\cos t\,\frac{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = b\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} t\,\frac{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{b^2-a^2}{b}\operatorname{sen}^3 t.$$

Así, pues, la evoluta de la elipse es una astroide.▲

Ejemplo 12. Demuestren que con la variación monótona del radio de curvatura en cierta parte de una curva plana, su incremento es igual al correspondiente incremento de la longitud del arco de la evoluta (es decir, la longitud del arco recorrida por el centro de curvatura por la evoluta).

△La ecuación de la evoluta de la curva $\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, donde s es la longitud variable del arco de la curva Γ, tiene la forma

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(s) + R(s)\,\boldsymbol{\nu}(s).$$

Por ello

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{dR}{ds}\boldsymbol{\nu} + R\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}.$$

donde

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \quad R\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -Rk\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\tau}$$

ya que $Rk = 1$). De esta forma, $\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = \frac{dR}{ds}\boldsymbol{\nu}$, de donde

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}\right| = \left|\frac{dR}{ds}\right|. \tag{87}$$

Designemos con σ la longitud variable del arco de la evoluta de la curva Γ calculada en el sentido de crecimiento del arco s de la propia curva Γ. Entonces

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}\right| = \frac{d\sigma}{ds}$$

(véase (46)). Si para mayor determinación, en el sector de la curva Γ que examinamos su radio de curvatura crece, es decir, $\frac{dR}{ds} \geqslant 0$, de (87) se desprende que

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dR}{ds},$$

o sea, $\sigma(s) = R(s) + c$, donde c es cierta constante. Precisamente de aquí se obtiene que para los valores indicados del parámetro s el crecimiento de la longitud del arco de la evoluta $\Delta\sigma = \sigma(s + \Delta s) - \sigma(s)$ coincide con el correspondiente incremento del radio de curvatura $\Delta R = R(s + \Delta s) - R(s)$, o sea, $\Delta\sigma = \Delta R$.▲

Ejemplo 13. Si la torsión de la curva es idénticamente igual a cero, la curva es plana.

$\triangle$Si en la curva $\Gamma = \{\mathbf{r}(s); 0 \leqslant s \leqslant S\}$, s es la longitud variable del arco, su torsión en todos los puntos es igual a cero: $\varkappa = 0$, entonces debido a la tercera fórmula de Frenet (véase (62)), tenemos $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = 0$, es decir, la binormal $\boldsymbol{\beta}$ de la curva Γ es un vector constante. Designémoslo con $\boldsymbol{\beta}_0$. Entonces, para todo punto de la curva Γ tendremos $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}_0) = 0$ o bien

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}(s), \boldsymbol{\beta}_0\right) = 0,$$

de donde

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\beta}_0) = 0.$$

Por consiguiente, $(\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\beta}_0) = c$, donde c es cierta constante. Esto significa, que los extremos de todos los radio vectores $\mathbf{r}(s)$ yacen en el plano $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_0) = c$ (aquí $\mathbf{r} = (x; y; z)$ es el vector corriente de los puntos del plano en el que yace la curva Γ).▲

---

a) Curvas planas.

24.76. Hallen la curvatura y el radio de curvatura de las siguientes curvas en un punto arbitrario:

1) La parábola $y = ax^2$.
2) La parábola cúbica $y = x^3$.
3) La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$.
4) La catenaria $y = a \operatorname{ch}(x/a)$.
5) $y = a \ln \cos (x/a)$.

24.77. Hallen la curvatura y el centro de curvatura de las siguientes curvas en un punto arbitrario:

1) La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2) La parábola semicúbica $3ay^2 = 2x^3$.
3) La astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

24.78. Hallen la curvatura de las curvas en un punto arbitrario:

1) La elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $|t| \leqslant \pi$.
2) La hipérbola $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$.
3) La cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.

24.79. Hallen las evolutas de las curvas:

1) $x = t^2$, $y = t^3$.
2) La hipérbola $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$.
3) La cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
4) La evolventa del círculo $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$.

24.80. Hallen el menor radio de curvatura de la parábola $y^2 = 2px$.

24.81. Hallen la mayor curvatura de las curvas:

1) $y = \ln x$. 2) $y = a \ln\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. 3) $y = a \operatorname{ch}(x/a)$.

24.82. Demuestren que el radio de curvatura de la parábola $x^2 = 2py$ es igual a $R = p/\cos^3 \alpha$, donde α es el ángulo de inclinación de la tangente al eje de las abscisas.

24.83. Sean $y = f(x)$ una función dos veces continuamente derivable sobre el segmento $[a; b]$ y $\alpha = \alpha(x)$, el ángulo formado por la tangente a su gráfico con el eje Ox en el punto $(x; f(x))$. Demuestren que si $k(x)$ es la curvatura del gráfico en dicho punto, $k(x) = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$, $a \leqslant x \leqslant b$ (s es la longitud variable del arco).

24.84. Sean Γ una curva dos veces derivable sin puntos singulares, yaciente en el plano de las variables x, y; α, el ángulo de inclinación de su tangente hacia el eje x en cierto punto; $k^* = \frac{d\alpha}{ds}$ (s es la longitud variable del arco); $R^* = 1/k^*$; (ξ, η), las coordenadas del centro de curvatura en ese mismo punto de la curva Γ. Demuestren que

$$\xi = x - R^* \operatorname{sen} \alpha, \quad \eta = y + R^* \cos \alpha,$$

así como que

$$\xi = x - \frac{dy}{d\alpha}, \quad \eta = y + \frac{dx}{d\alpha}.$$

24.85. Demuestren que si $\rho = \rho(\varphi)$ es la representación de una curva dos veces continuamente derivable en coordenadas polares, entonces, para su curvatura, tiene lugar la fórmula

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}. \tag{88}$$

24.86. Hallen los radios de curvatura de las curvas prefijadas en coordenadas polares:

1) La lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.
2) La cardioide $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.
3) $\rho = a \cos^3 \varphi$.
4) La espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$.
5) La espiral hiperbólica $\rho = a/\varphi$.
6) La espiral logarítmica $\rho = ae^{b\varphi}$.

24.87. ¿Qué es la evoluta de una circunferencia?

24.88. Confeccionen la ecuación de la evoluta:

1) De la tractriz $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

2) De la espiral logarítmica $\rho = e^{\lambda\varphi}$.

3) De la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

24.89. Demuestren que la evoluta de una cicloide es también una cicloide que se distingue de la dada sólo por posición.

24.90. Demuestren que la evoluta de la cardioide también es una cardioide.

24.91. Demuestren que la evoluta de una astroide es una astroide, semejante a la dada, con razón de semejanza 2, girada a un ángulo de $\pi/4$ con relación a la dada.

24.92. Hallen para el parámetro a de la espiral logarítmica $\rho = ca^{\varphi}$ la condición que, al cumplirse, hace que su evoluta coincida con la propia espiral.

24.93. Demuestren que las evolutas de la epicicloide

$$\frac{x}{a} = (1+\lambda)\cos\lambda t - \lambda\cos(1+\lambda)t,$$

$$\frac{y}{a} = (1+\lambda)\operatorname{sen}\lambda t - \lambda\operatorname{sen}(1+\lambda)t,$$

$$a > 0,\quad \lambda > 0,\quad -\infty < t < +\infty$$

y la hipocicloide

$$\frac{x}{a} = (1-\lambda)\cos\lambda t + \lambda\cos(\lambda-1)t,$$

$$\frac{y}{a} = (1-\lambda)\operatorname{sen}\lambda t + \lambda\operatorname{sen}(\lambda-1)t,$$

$$a > 0,\quad 0 < \lambda < 1,\quad -\infty < t < +\infty$$

de nuevo son epicicloide e hipocicloide, respectivamente, obtenidas de las prefijadas con ayuda de su giro y transformación de semejanza.

24.94. Demuestren que para los puntos de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$, con $\varphi \to +\infty$, el valor de la diferencia entre la longitud del radio vector y el radio de curvatura tiende a cero.

24.95. Demuestren que en el planteamiento del problema 24.94 el centro de curvatura se desplaza por una curva que tiende a coincidir con la circunferencia $\rho = 1$.

24.96. Sean $\rho = \rho(\varphi)$, $a \leqslant \varphi \leqslant \beta$ la representación de una curva dos veces continuamente derivable en coordenadas polares, $\alpha = \alpha(\varphi)$, el ángulo de inclinación de su tangente en cierto punto M hacia el eje polar, ψ, el ángulo formado por esta tangente con la continuación del radio vector $\overline{OM}$ del punto de tangencia M. Sea la recta ON perpendicular a la recta OM, la recta MN, la norma a la curva prefijada en el punto M, C, el centro de curvatura de la curva en ese mismo punto. Demuestren que

$$\frac{NC}{CM} = \frac{d\psi}{d\varphi}.$$

24.97. Demuestren que en las curvas $\rho^n = a^n \cos n\varphi$, $a > 0$, la normal polar, es decir, el segmento de la normal desde el punto en la curva hasta el punto de su intersección con el eje polar, es $n + 1$ veces mayor que el radio de curvatura.

24.98. Demuestren que en las curvas $\rho^n = a^n \operatorname{sen} n\varphi$, $a > 0$, la longitud de la parte del radio vector contenida dentro del círculo de curvatura es igual a $2\rho/(n + 1)$.

24.99. Sean r la longitud del radio vector de un punto de una curva dos veces continuamente derivable, p, la longitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente en el punto indicado de la recta, R, el radio de curvatura. Demuestren que $\frac{dr}{dp} = \frac{R}{r}$.

24.100. Demuestren que en una elipse existen, hablando en general, tres puntos tales que los círculos de curvatura a la elipse en dichos puntos pasan por el punto dado de la elipse.

24.101. Demuestren que los centros de curvatura en los puntos de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$, yacientes en un rayo, se encuentran en una elipse, cuyos semiejes no dependen de la elección del rayo.

24.102. Sea que cierto punto de una curva dos veces continuamente derivable se ha tomado como el origen de coordenadas, la tangente dirigida en sentido positivo hacia la curva en el mencionado punto, por eje x y el eje y está dirigido desde el punto de tangencia hacia el centro de curvatura. Demuestren que en el entorno del punto de tangencia la curva tiene la representación

$$y = \frac{x^2}{2R} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

24.103. Demuestren que si en el punto $M(t_0)$ de la curva $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ el radio de curvatura tiene máximo, entonces existe tal entorno U del punto t_0 que la parte de la curva correspondiente a los valores del parámetro $t \in U$ yace dentro del círculo de curvatura en el punto $M(t_0)$.

24.104. Demuestren que si en el punto $M(t_0)$ de la curva $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ el radio de curvatura tiene mínimo, existe tal entorno U del punto t_0 que la parte de la curva correspondiente a los valores del parámetro $t \in U$ yace fuera del círculo de curvatura en el punto $M(t_0)$.

24.105. Hallen la parábola que une el origen de coordenadas $(0; 0)$ con el punto $M(1; 0)$ de forma que el arco $\overset{\frown}{OM}$ de la parábola forme, junto con la mitad inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ una curva con tangente y curvatura continuas.

24.106. Hallen la parábola con el eje de simetría paralelo al eje y, que con la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ tenga en el punto $(\pi/2; 1)$ tangente y curvatura comunes.

24.107. Demuestren: si $(\xi;\ \eta)$ son las coordenadas del centro de curvatura de la curva dos veces continuamente derivable $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, entonces

$$\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}.$$

24.108. Haciendo uso de las propiedades de la evoluta, hallen las longitudes de las siguientes curvas:

1) De un arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

2) De la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ entre los puntos $(a;\ 0)$ y $(0;\ a)$.

3) De la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

b) Curvas espaciales.

24.109. Escriban las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante para un punto arbitrario de las siguientes curvas:

1) La hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$.

2) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

3) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$.

4) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$.

5) $y^2 = x$, $x^2 = z$. 6) $y = \varphi(x)$, $z = a\varphi(x) + b$.

24.110. Hallen la ecuación de la normal principal y la binormal a las curvas:

1) $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$.

2) $x = y^2$, $z = x^2$.

3) $x = t^4/4$, $y = t^3/3$, $z = t^2/2$.

24.111. Demuestren que la normal principal de la hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$ es perpendicular al eje z, mientras que su binormal forma con dicho eje un ángulo constante, cuyo coseno es igual a $a/\sqrt{a^2 + b^2}$.

24.112. Demuestren que una de las bisectrices de los ángulos entre la tangente y la binormal a la curva $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ tiene sentido constante.

24.113. Por las normales principales (pero en sentido contrario) de la hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$ se trazan segmentos de la longitud l. Hallen la curva que describen sus extremos.

24.114. Demuestren que la recta trazada desde el punto arbitrario M de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, paralelamente al plano $z = 0$ hasta la intersección con el eje z, yace en el plano osculador de la curva en el punto M.

24.115. Escriban la ecuación del plano osculador de la curva $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ con $t = 0$.

24.116. Escriban la ecuación del plano osculador en el punto $(2;\ 1;\ 2)$ de la curva que es la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el cilindro hiperbólico $x^2 - y^2 = 3$.

24.117. Demuestren que si todos los planos osculadores de una curva dos veces continuamente derivable pasan por un punto fijado, la curva es plana.

24.118. Hallen los vectores τ, ν y β de la curva $x = t \operatorname{sen} t$, $y = t \cos t$, $z = te^t$ en el origen de coordenadas.

24.119. Hallen los vectores τ, ν y β en un punto arbitrario de la curva:

1) $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$, $z = \cos 2t$.

2) $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \cos(t/2)$.

24.120. Demuestren que la curvatura de una curva es idénticamente igual a cero cuando y sólo cuando la curva es el intervalo de una recta.

24.121. Hallen la curvatura de la hélice cónica $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = at$ en el origen de coordenadas.

24.122. Hallen la curvatura de las siguientes curvas:

1) $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = bt$.

2) $x = \ln \cos t$, $y = \ln \operatorname{sen} t$, $z = t\sqrt{2}$.

3) $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \operatorname{sen}(t/2)$.

4) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$.

5) $x = a \operatorname{ch} t \cos t$, $y = a \operatorname{ch} t \operatorname{sen} t$, $z = at$.

6) $x = a\dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t}$, $y = a\dfrac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{ch} t}$, $z = a(t - \operatorname{th} t)$.

7) $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

24.123. Hallen la torsión de las curvas:

1) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$.

2) $x = a \operatorname{ch} t \cos t$, $y = a \operatorname{ch} t \operatorname{sen} t$, $z = at$.

3) $y^2 = x$, $x^2 = z$.

24.124. Hallen la curvatura y la torsión de las curvas:

1) $2ay = x^2$, $6a^2z = x^3$. 2) $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = at$.

3) $x = 2abt$, $y = a^2 \ln t$, $z = b^2t^2$.

4) $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$.

5) La curva de Viviani $x = R \operatorname{sen}^2 t$, $y = R \operatorname{sen} t \cos t$, $z = R \cos t$; ¿hay en la curva de Viviani puntos rectificables y aplanables?

24.125. Hallen para las siguientes curvas los puntos rectificables, aplanables y los arcos en los que la torsión conserva el signo:

1) $x = t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen} 3t$.

2) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t^3 - 9t$.

24.126. Partiendo de la definición de la normal principal ν como un vector unitario en el sentido del vector $\dfrac{d\tau}{ds}$ (τ es el vector unitario tangente, s, la longitud variable del arco de la curva tres veces continuamente derivable sin puntos singulares) y de la definición de la binormal $\beta = [\tau, \nu]$, demuestren que:

1) La derivada de la binormal $\frac{d\beta}{ds}$ es colineal a la normal principal.

2) Si $\frac{d\tau}{ds}=k\mathbf{v}$, $\frac{d\beta}{ds}=-\varkappa\mathbf{v}$, entonces

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}=-k\tau+\varkappa\beta$$

(de otra forma, demuestren la fórmula de Frenet).

24.127. Demuestren que para la curva $\Gamma=\{\mathbf{r}(s);\ 0\leqslant s\leqslant S\}$ tres veces continuamente derivable, donde s es la longitud variable del arco, se verifican las relaciones

$$\left|\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right|^2=k^4+k^2\varkappa^2+\left(\frac{dk}{ds}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds},\ \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)=0,\ \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds},\ \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)=-k^2,\ \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},\ \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)=k\,\frac{dk}{ds}.$$

24.128. Aplicando las suposiciones del anterior problema demuestren que

$$\left(\tau,\ \beta,\ \frac{d\beta}{ds}\right)=\varkappa,$$

$$\left(\frac{d\beta}{ds},\ \frac{d^2\beta}{ds^2},\ \frac{d^3\beta}{ds^3}\right)=\varkappa^5\,\frac{d}{ds}\,\frac{k}{\varkappa},$$

$$\left(\frac{d\tau}{ds},\ \frac{d^2\tau}{ds^2},\ \frac{d^3\tau}{ds^3}\right)=k^5\,\frac{d}{ds}\,\frac{\varkappa}{k}.$$

24.129. Demuestren que si en el punto M_0 la curvatura k de la curva Γ no es igual a cero, k es igual a la curvatura de la proyección de Γ en su plano osculador en el punto M_0.

24.130. Demuestren que si todos los planos normales de una curva dos veces continuamente derivable sin puntos singulares y con curvatura que no se reduce a cero, son paralelos al vector constante, ella es plana.

24.131. Demuestren que en la curva $x=e^t\operatorname{sen}t$, $y=e^t\cos t$, $z=e^t$ cada arista del triedro intrínseco de Frenet forma con el eje z un ángulo constante.

24.132. En las binormales de la hélice $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen}t$, $z=e^t$ se han trazado segmentos de una misma longitud. Hallen la ecuación de la curva formada por los extremos de dichos segmentos.

24.133. Una curva se denomina línea de declive si las tangentes a ella forman un ángulo constante con cierta recta. Demuestren que una curva dos veces continuamente derivable, con curvatura no igual a cero, es la línea de declive cuando y sólo cuando se verifica una de las siguientes condiciones:

1) todas las normales principales son paralelas a cierto plano;

2) todos los planos osculadores son paralelos a cierta recta;

3) en el caso de una curva tres veces continuamente derivable hay tal constante $c > 0$, que $\varkappa(s) = ck(s)$; con ello, $|c| = \operatorname{ctg} \alpha$, donde α es el ángulo que mencionamos cuando definíamos la línea de declive.

24.134. ¿Con qué condición el centro de curvatura de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$ yace en el mismo cilindro que la propia hélice?

24.135. Demuestren que en la curva $x = a \operatorname{ch} t \cos t$, $y = a \operatorname{ch} t \operatorname{sen} t$, $z = at$ los segmentos de la normal desde un punto en la curva hasta el eje z son iguales al valor inverso absoluto de la torsión de la curva: $1/|\varkappa|$.

24.136. Sea $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva dos veces continuamente derivable sin puntos singulares $t_0 \in [a;\ b]$, $t_0 + \Delta t_1 \in [a;\ b]$ y $t_0 + \Delta t_2 \in [a;\ b]$. Tracemos un plano por los puntos $M(t_0)$, $M(t_0 + \Delta t_1)$ y $M(t_0 + \Delta t_2)$. Demuestren que si en el punto $M(t_0)$ la curvatura no es nula, entonces con $\Delta t_1 \to 0$ y $\Delta t_2 \to 0$ dicho plano tiende (definan esta noción) hacia el plano osculador en el punto $M(t_0)$.

24.137. Sea π un plano que pasa por la recta tangente en el punto $M(s_0)$ a la curva dos veces continuamente derivable $\Gamma = \{M(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, s, la longitud variable del arco de la curva Γ, $s_0 \in [0,\ S]$ y $d(\Delta s)$, la distancia desde el punto $M(s_0 + \Delta s)$ hasta el plano π. Demuestren que π es el plano osculador de la curva Γ cuando y sólo cuando

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s^2} = 0.$$

24.138. Con las suposiciones del problema 24.136, tracemos una circunferencia por esos mismos puntos $M(t_0)$, $M(t_0 + \Delta t_1)$ y $M(t_0 + \Delta t_2)$. Demuestren que esta circunferencia, con $\Delta t_1 \to 0$ y $\Delta t_2 \to 0$ tiende a la circunferencia que es la frontera del círculo de curvatura en el punto $M(t_0)$ (esta circunferencia recibe el nombre de osculadora en el punto dado de la curva).

24.139. Por cuatro puntos de una curva se puede trazar una esfera. Si ellos tienden hacia un punto, con las correspondientes condiciones, dicha esfera tiende hacia una esfera límite llamada *osculadora*. Hallen su centro y radio.

24.140. Demuestren que el vector de aceleración **a** de un punto material en movimiento es perpendicular a la binormal de la trayectoria de movimiento y hallen su descomposición por el vector tangente y por el vector de la normal principal. Demuestren que

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2},$$

donde $v = |\mathbf{v}|$, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, R es el radio de curvatura de la trayectoria de movimiento.

24.141. Para la curva $\Gamma = \{M(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ tres veces continuamente derivable, donde s es la longitud variable del arco, demuestren:

1) que es válida la fórmula

$$\mathbf{r}(s+\Delta s)-\mathbf{r}(s)=$$
$$=\left(\Delta s-\frac{1}{6}k^2(s)\,\Delta s^3\right)\boldsymbol{\tau}(s)+\left(\frac{1}{2}k(s)\,\Delta s^2+\frac{1}{6}k'(s)\,\Delta s^3\right)\boldsymbol{\nu}(s)+$$
$$+\frac{1}{6}k(s)\,\varkappa(s)\,\Delta s^3\boldsymbol{\beta}(s)+o(\Delta s^3),\quad \Delta s\to 0.$$

2) si por ξ, η, ζ designamos las coordenadas del punto en el sistema de coordenadas prefijado con los versores $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$, $\boldsymbol{\beta}(s)$, entonces en el entorno del punto de la curva $M(s)$, la proyección de ésta en el plano osculador tiene la forma

$$\eta=\frac{1}{2}k(s)\,\xi^2+o(\xi^2),\quad \xi\to 0,$$

en el plano normal,

$$\eta=\sqrt[3]{\frac{9k(s)}{2\varkappa^2(s)}}\,\zeta^{2/3}+o(\zeta^{2/3}),\quad \zeta\to 0,\quad \varkappa(s)\neq 0,$$

en el plano rectificante

$$\zeta=\frac{1}{6}k(s)\,\varkappa(s)\,\xi^3+o(\xi^3),\quad \xi\to 0.$$

24.142. Demuestren que si en la curva tres veces continuamente derivable $\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, s es la longitud variable del arco, el parámetro s se considera como el tiempo, entonces al variar éste el triedro intrínseco de Frenet se moverá a lo largo de la curva como un sólido a velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \varkappa\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\beta}$. Por ello, la curvatura es numéricamente igual a la velocidad de rotación del triedro de Frenet alrededor de la binormal (con la particularidad de que esta rotación siempre transcurre desde el vector tangente $\boldsymbol{\tau}$ al vector de la normal principal $\boldsymbol{\nu}$), en tanto que la torsión es su velocidad de rotación en torno a la tangente.

24.143. Demuestren que las fórmulas de Frenet pueden ser escritas en la forma $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=[\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\tau}]$, $\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}=[\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\nu}]$, $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=[\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\beta}]$ (el vector $\boldsymbol{\omega}$ fue determinado en el anterior problema).

SOLUCIONES

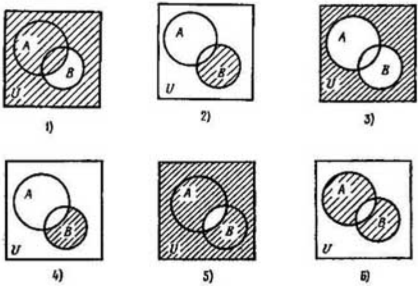
Capítulo I

INTRODUCCION

§ 1. Conjuntos. Combinatoria

1.1. 1) $A \cap B \cap C$; 2) $A \cup B \cup C$; 3) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$. **1.7.** 1) $X \supset Y$. 2) $X = Y$. 3) $X \subset Y$. 4) $X = Y$. 5) $X \subset Y$. **1.9.** 1) $\{2, 3\}$. 2) ϕ. 3) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. 4) $\{2, 3\}$. 5) $\{(2; 2), (3; 2)\}$. 6) $\{(2; 2), (2; 3)\}$. **1.10.** $\{12k-6\}$, $k \in \mathbb{N}$. **1.11.** 1) $n + m - k$. 2) nm. **1.12.** 125 elementos.

1.13.



1.15. $X = B'$. **1.16.** $A = U$, $B = \phi$

1.19. 1) Sí. 2) No.

1.20. 3) P.ej., es posible poner el elemento $x \in A$ en correspondencia con el elemento $(b - a)x + a \in B$. 4) P.ej., es posible poner el elemento $x \in B$ en correspondencia con el elemento $\frac{x}{1 - |x|} \in A$.

1.32. 1) Puede, 2) no puede, 3) puede. **1.33.** 2^n. **1.36.** 1) 1/256. 2) 15. 3) $n(n+1)$. 4) 2^n. **1.37.** 1) 11. 2) 28. 3) $\{7, 8, 9\}$. 4) $\{2, 3, 4\}$. **1.38.** 1) 870. 2) 435. **1.39.** 1) 60. 2) 10. **1.40.** 1) 15. 2) 43 200. **1.41.** $n(n-3)/2$. **1.42.** 210. **1.43.** 5355. **1.44.** 576. **1.45.** 18; 10. **1.46.** 1024. **1.47.** 1) 120. 2) 60. 3) 420. 4) 83 160. **1.48.** $\frac{28!}{(7!)^4}$. **1.49.** 5040. **1.50.** 15625. **1.51.** 16. **1.52.** $(n+1)!m!$. **1.53.** 945. **1.54.** 330.

1.55. Pueden no ser suficientes. **1.56.** Si $n < 7$ hay menos números con la cifra 9; si $n \geqslant 7$, la cantidad de números con cifra 9 es mayor.

1.57. 233. **1.58.** 1) 1/4. 2) 1/3. 3) 0. 4) 5/12. **1.59.** 5/36. **1.60.** 29/52. **1.61.** 164/1081. **1.62.** 1) 5/9. 2) 2/9. **1.63.** 1) $1/C_{49}^{6}$. 2) $C_6^3 \cdot C_{43}^3/C_{49}^6$. **1.64.** 360/2401. **1.65.** 1) 9/17. 2) 8/17.

§ 2. Elementos de lógica. Método de inducción matemática

2.1. Todas las frases salvo la 3) son proposiciones. Las proposiciones 1), 2), 5), 7) son verdaderas, la 4), falsa. En el presente no se sabe si la proposición 6) es verdadera o falsa. La proposición 8) se considera verdadera en la geometría de Euclides y falsa en la de Lobachevski.

2.2. 1) «174 no se divide sin residuo por 3» es falso; 2) «el número 3 es divisor del número 174 o bien llueve» es verdadero; 3) «el número 3 es divisor del número 174 o bien llueve» es falso; 4) «si 174 se divide por 3, llueve» es falso; 5) «si 174 no se divide por 3, llueve» es verdadero; 6) «174 se divide por 3 cuando y sólo cuando no llueve» es verdadero.

2.3. 1)

p	V	V	F	F
q	V	F	V	F
s	V	V	V	F

2) La proposición s es idénticamente verdadera.

2.6. 1) «El blanco ha sido batido por lo menos con un disparo» es una proposición verdadera; 2) «los tres disparos han batido el blanco» es una proposición falsa; 3) «de los tres primeros disparos al menos uno ha sido fallido, el tercero, exitoso» es una proposición verdadera.

2.7. La proposición dada es idénticamente verdadera, es decir, ella es verdadera independientemente de sí lo son las proposiciones p, q, r.

2.8. 1) $p \vee \bar{q}$. 2) $p \vee (\bar{q} \wedge r)$. 3) r. 4) $\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r$.

2.9. Sólo el segundo estudiante estudiaba lógica.

2.10. Sergio, Yuri, Víctor, Román.

2.11. Los cuatro estudiantes dieron el examen.

2.12. Se debe llevar a la expedición: E como biólogo, B como hidrólogo, C como radista, D como médico, F como sinóptico, H como mecánico.

2.13. 1) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9}. 2) {9}. 3) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9}. 4) {9}.

2.14. El segundo y tercero, con ello el segundo es falso y el tercero, verdadero.

2.15. $n = 45$. **2.16.** 2, $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **2.17.** (9; 2); (17; 6). **2.18.** $|a| < 1/2$. **2.19.** $-1/16 \leqslant a \leqslant 1/12$. **2.20.** 1) $-36/5 \leqslant a \leqslant 9$. 2) $-27/5 \leqslant a \leqslant 0$.

2.21. 1) Sí, puede. Semejante trabajo de control sera, p. ej., aquel en el que la cantidad de problemas es igual a la cantidad de estudiantes, con la particularidad de que el primer estudiante resolvió sólo el primer problema, el segundo, sólo el segundo, el tercero, sólo el tercero, etc. 2) No, no puede. Del hecho de que existe un alumno que ha resuelto todos los problemas se desprende que cada uno de los problemas ha sido resuelto al menos por un alumno (p. ej., por aquel que resolvió todos los problemas). *Nota.* Este ejemplo muestra que

en la proposición $\forall x \exists y p(x; y)$, hablando en general, no se pueden permutar los cuantificadores.

2.22. 1) $k \neq 0$. 2) $k = 0$. 3) Tales valores de k no existen. 4) k es cualquier número.

2.23. 1) En cada tren que va de Moscú a Leningrado hay (existe) un vagón en el que todos los puestos están ocupados. 2) En Suecia existe una ciudad en cualquier calle de la cual en cada casa hay una ventana que no da al sur.

2.24. 1) $n = 41$. 2) $y = |x|$, $x = 0$. **2.30.** 1) $n \geqslant 4$. 2) $n \geqslant 7$. 3) $n = 1$, $n \geqslant 10$. 4) $n \geqslant 4$. **2.34.** $a_n = 2^n + 2^{-n}$. **2.37.** $\frac{n(n+1)}{2} + 1$. **2.38.** $n^2 - n + 2$.

§ 3. Números reales

3.1. $0,(6)$; $0,55$; $0,2(142857)$; $-0,(285714)$.

3.2. $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{3}$; $2\frac{427}{990}$; $\frac{3}{10}$.

3.9. 1) 0 y 1; 0,3 y 0,4; 0,30 y 0,31; 0,300 y 0,301; 0,3000 y 0,3001. 2) 0 y 1; 0,3 y 0,4; 0,33 y 0,34; 0,333 y 0,334; 0,3333 y 0,3334. 3) 1 y 2; 1,2 y 1,3; 1,22 y 1,23; 1,222 y 1,223; 1,2222 y 1,2223. 4) -1 y 0; $-0,7$ y $-0,6$; $-0,63$ y $-0,62$; $-0,626$ y $-0,625$; $-0,6251$ y $-0,6250$.

3.10. 1) 1 y 2; 1,4 y 1,5; 1,41 y 1,42. 2) 2 y 3; 2,2 y 2,3; 2,23 y 2,24. 3) 0,3 y 0,4; 0,31 y 0,32; 0,317 y 0,318. 4) $-0,4$ y $-0,3$; $-0,32$ y $-0,31$; $-0,318$ y $-0,317$. 5) 2 y 3; 2,1 y 2,2; 2,14 y 2,15.

3.11. Sí. **3.12.** 1) $3,3 > 3,298$. 2) $3,1416 > 3,14159$. 3) $3,141592 < 22/7$. 4) $\sqrt{3} + 2 > \sqrt{2} + \sqrt{5}$. 5) $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$.

3.13. 1) 2,06 y 2,07. 2) 0,0142 y 0,0143. 3) $-0,0973$ y $-0,0972$. 4) 0,471 y 0,472. 5) 2,44 y 2,45. 6) 0,534 y 0,535.

3.16. 1) $U(2; 1)$. 2) $U(2; \pi - 2)$. 3) $U(2; (4-\pi)/2)$. 4) $U(2; 1)$.

3.49. $\sup X = \sqrt{2}$, $\inf X = -\sqrt{2}$. **3.50.** 1 y $+\infty$; 0 y 1; 0 y 3/2; 1/2 y 1.

3.54. $\sup\{m/n,\ 0 < m < n,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\} = 1$,

$\inf\{m/n,\ 0 < m < n,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\} = 0$.

§ 4. Progresiones. Adición. Binomio de Newton. Desigualdades numéricas

4.7. 1) $\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$. 2) $3 - \frac{2n+3}{2^n}$.

3) $\frac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$ con $x \neq 1$;

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ con $x = 1$.

4) $\frac{x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx}{(x-1)^2}$ con $x \neq 1$; $\frac{n(n+1)}{2}$ con $x = 1$.

4.9. 1) n. 2) $\frac{n^2(n+1)}{2}$. 3) 0. 4) $\frac{n(n^2-1)}{3}$.

4.13. 1) $\frac{n}{3n+1}$. 2) $\frac{n}{4n+1}$. 3) $\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$.

4) $\frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$. 5) $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

4.15. 2) $S_n(3)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4.18. 1) $\frac{\operatorname{sen}^2 nx}{\operatorname{sen} x}$. 2) $\frac{\operatorname{sen} 2nx}{2\operatorname{sen} x}$. 3) $\frac{n}{2}-\frac{\operatorname{sen} nx \cos(n+1)x}{2\operatorname{sen} x}$.

4) $\frac{n}{2}+\frac{\operatorname{sen} nx \cos(n+1)x}{2\operatorname{sen} x}$.

5) $$\frac{3\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{4\operatorname{sen}\frac{x}{2}}-\frac{\operatorname{sen}\frac{3(n+1)}{2}x\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{4\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}.$$

6) $$\frac{\cos\frac{3(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{3}{2}nx}{4\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}+\frac{3\cos\frac{n+1}{2}x\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{4\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

4.19. 1) $x_n=\frac{3^n+(-1)^{n-1}}{4}x_1+\frac{3}{4}(3^{n-1}+(-1)^n)x_0$.

2) $x_n=(2^n-1)x_1-2(2^{n-1}-1)x_0$.

3) $x_n=\frac{(\alpha-1)^n-1}{\alpha-2}x_1-\frac{\alpha-1}{\alpha-2}((\alpha-1)^{n-1}-1)x_0$

con $\alpha\neq 2$; $x_n=nx_1-(n-1)x_0$ con $\alpha=2$.

4.20. 1) $(1+x)^5=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$. 2) $(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$. 3) $(x+y)^7=x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$. 4) $(a-b)^8=a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$.

4.21. $C_{16}^6x^3$. 4.22. 1) -7. 2) -40; -74. 3) $36C_9^2+C_9^4=378$. 4) 245. 5) C_{16}^4.

4.23. 1) $(n+2)2^{n-1}$. 2) $(n-2)2^{n-1}+1$. 3) 2^{2n-1}. 4) 2^{2n-1}. 5) $(-1)^mC_{n-1}^m$. 6) $(-1)^mC_{2m}^m$ con $n=2m$; 0 con $n=2m+1$.

4.25. 1) 60. 2) 625; 7000; 7000; 1120; 16.

4.26. 1) $\frac{27}{64}$. 2) $C_{10}^3\frac{2^7}{3^{10}}$. 4.27. $C_{20}^{12}2^9$.

§ 5. Números complejos

5.3. 1) $7+3i$; $22+7i$. 2) $2-4i$; $-1{,}81-5{,}2i$. 3) $2\sqrt{2}$; 5.

5.4. 1) $-2{,}6-4{,}2i$; $0{,}016-0{,}088i$. 2) $-0{,}4+2i$; $0{,}12+0{,}24i$. 3) $-i$; $\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{5}}{6}i$. 5.5. 1) 0. 2) $-11/17$. 3) 3.

5.6. 1) 0. 2) $-2i$. 3) 0. 4) $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$. 5) $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$. 5.7. (4; 3), (5; 3), (4; 4), (5; 4). 5.8. $(-2; -2)$, $(2; -2)$. 5.9. 1) $-1-i$. 2) $0, -1, \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 5.10. $z_1=1-i$, $z_2=i$. 5.12. $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

5.13. $\left(\sum_{k=1}^{n} m_kz_k\right)/\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right)$. 5.14. $z_4=z_1+z_3-z_2$. 5.15. $t(7+i)$, t es

un número positivo tomado al azar. **5.16.** 1) 4. 2) 1. 3) 7. 4) $2\,\text{sen}\,(\pi/14)$. **5.17.** 1) 0; $3i$; $-3i$. 2) $\sqrt{2}-1$; $1-\sqrt{2}$; i; $-i$. 3) bi, $b\in\mathbb{R}$. 4) $c\pm\sqrt{3}\,ci$, c es un número real no positivo tomado al azar.

5.21. 1) La circunferencia de radio $R=1$ con centro en el punto $z=-1$. 2) El semiplano $\operatorname{Im} z>0$. 3) El círculo (junto con la frontera) de radio $R=2$ con centro en el punto $z=1-2i$. 4) Una circunferencia de $R=3$ con centro en el punto $z=0$. 5) La elipse con focos en los puntos $z_1=-2$, $z_2=2$ y el mayor semieje $a=13$. 6) El sistema de anillos concéntricos, con centro en el punto $z=0$, que contiene los intervalos $(2k\pi;\ 2k\pi+\pi)$, $k\geqslant 0$ es un entero del eje real. 7) Un círculo de radio $R=10$ con centro en el punto $z=10i$, salvo el centro del círculo y la circunferencia frontera. 8) La circunferencia de radio $R=3$ con centro en el punto $z=-3$.

5.22. 1) $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}i$. 2) $-\frac{3}{2}-\frac{17}{4}i$; $-\frac{3}{2}-2i$. 3) $5-5i$; $-5+5i$; $\sqrt{26}-\sqrt{26}\,i$; $-\sqrt{26}+\sqrt{26}\,i$.

5.24. 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 2) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3) $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 4) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 5) $-\frac{7}{18}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 6) $\frac{\pi}{14}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5.25. El semieje real positivo $z=x>0$ 2) El semieje imaginario $z=iy$, $y>0$. 3) El semiplano $\operatorname{Im} z>0$. 4) Todo el plano complejo salvo el punto $z=0$.

5.26. El semieje real negativo $z=x$, $x<0$. 2) El ángulo (sin la frontera), con vértice en el punto $z=-i$, cuyos lados pasan por los puntos $z=1$ y $z=0$, que contiene el punto $z=1/2$. **5.27.** 1) i. 2) $-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$. **5.28.** El punto $z^2=x+iy$ pertenece a la parábola $x=\frac{y^2}{4}-1$. **5.29.** El punto $z=x+iy$ se halla en la curva $y=|x|$.

5.32. 1) $2(\cos(5\pi/6)+i\,\text{sen}\,(5\pi/6))$. 2) $\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi$. 3) $\cos(13\pi/12)+i\,\text{sen}\,(13\pi/12)$. 4) $-2\cos(5\pi/9)(\cos(14\pi/9)+i\,\text{sen}\,(14\pi/9))$.
5) $\frac{1}{\cos 1}\left(\cos\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

5.33. 1) $z=1=\cos 0+i\,\text{sen}\,0$. 2) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}$. 3) $z=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos 0+i\,\text{sen}\,0)$. 4) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}$. 5) $z=-i=\cos(3\pi/2)+i\,\text{sen}\,(3\pi/2)$.

5.34. 1) $\frac{5}{3}(\cos 230^\circ+i\,\text{sen}\,230^\circ)$. 2) $\sqrt{2}\ \text{sen}\ (\pi/5)\ (\cos\ (29\pi/20)+i\,\text{sen}\,(29\pi/20))$.

5.35. $-10+4i$. **5.36.** $3-\frac{9}{2}i$.

5.37. 1) 1. 2) $\cos 50^\circ+i\,\text{sen}\,50^\circ$. 3) $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$. 4) -2. 5) 2.

5.38. 1) $2^{100}(\cos(4\pi/3)+i\,\text{sen}\,(4\pi/3))$. 2) $8(\cos(3\pi/2)+i\,\text{sen}\,(3\pi/2))$. 3) $2(\cos 0+i\,\text{sen}\,0)$, si n es par, $2(\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi)$, si n es impar.

4) $\dfrac{1}{\cos^4 2}(\cos 8+i\,\text{sen}\,8)$. 5) $-32\cos^5(3\pi/5)(\cos\pi/2)+i\,\text{sen}\,(\pi/2))$.

5.39. $n=4k,\ k\in\mathbb{Z}$.

5.40. 1) $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 2) $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$, $-2i$. 3) $\cos(2\pi k/5)+i\,\text{sen}\,(2\pi k/5)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 4) $\sqrt[16]{2}\left(\cos\dfrac{8k+1}{32}\pi+\right.$ $\left.+i\,\text{sen}\,\dfrac{8k+1}{32}\pi\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$.

5.41. 1) $\sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12)+i\,\text{sen}\,(\pi/12))$, $\sqrt[6]{2}(\cos(3\pi/4)+i\,\text{sen}\,(3\pi/4))$, $\sqrt[6]{2}(\cos(17\pi/12)+i\,\text{sen}\,(17\pi/12))$. 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. 3) $\sqrt[5]{2}(\cos(\pi/15)+i\,\text{sen}\,(\pi/15))$, $\sqrt[5]{2}(\cos(7\pi/15)+$ $+i\,\text{sen}\,(7\pi/15))$, $\sqrt[5]{2}(\cos(13\pi/15)+i\,\text{sen}\,(13\pi/15))$, $\sqrt[5]{2}(\cos(19\pi/15)+$ $i\,\text{sen}\,(19\pi/15))$, $\sqrt[5]{2}(\cos(5\pi/3)+i\,\text{sen}\,(5\pi/3))$. 4) $\sqrt{3}+i$, $2i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$; $-2i$, $\sqrt{3}-i$. 5) 0; $\cos(2\pi k/5)+i\,\text{sen}\,(2\pi k/5)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 6) Si $n>1$, $z_k=\cos\dfrac{2\pi k}{n+1}+i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi k}{n+1}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$; si $n=1$, la ecuación satisface cada número real.

5.42. 1) $2n$. 2) n. **5.44.** e^x, $y+2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$. **5.45.** 1) $e^2\cos 1-ie^2\,\text{sen}\,1$. 2) i. 3) $-e^7\,\text{sen}\,3+ie^7\cos 3$. **5.46.** 1) $4e^{7\pi i/6}$. 2) $e^{6\pi i/7}$.

5.47. 1) $e^{2\pi i}=1$. 2) $8e^{-\pi i/4}=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$. 3) $64e^{i\pi}=-64$. 4) $e^{-\pi i/3}=$ $=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 5) $2^7e^{3\pi i/2}=-2^7i$.

5.49. 1) $e^{2\pi ki/3}$ $(k=0,\ 1,\ 2)$. 2) $e^{(2k+1)\pi i/5}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 3) $2e^{2(3k+1)\pi i/9}$ $(k=0,\ 1,\ 2)$. 4) $\sqrt[4]{2}\,e^{(3k+2)\pi i/6}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

5.50. 1) $\dfrac{e^{i(n+1)\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}$. 2) $\dfrac{\text{sen}\,((n+1)\,\varphi/2)}{\text{sen}\,(\varphi/2)}\,\text{sen}\,(n\varphi/2)$. 3) $\dfrac{\text{sen}\,((n+1)\,\varphi/2)}{\text{sen}\,(\varphi/2)}\cos(n\varphi/2)$.

§ 6. Polinomios. Ecuaciones algebraicas. Fracciones racionales

6.1. $A=D=0$, $B=1$, $C=2$. **6.2.** $P(z)=9z^2-26z-21$, $Q(z)=$ $=-9z^3+44z^2-39z-7$. **6.3.** $A=4$, $B=0$, $C=2$, $D=-2$, o bien $A=-4$, $B=8$, $C=-2$, $D=2$. **6.4.** 1) 2. 2) $Q(z)=0$ y, por consiguiente, no tiene grado.

6.5. 1) $T(z)=z+13$, $R(z)=81z-211$. 2) $T(z)=z^4+iz^3-z^2+$ $+(3-i)z+1+10i$, $R(z)=i-11$. 3) $T(z)=z^2+3iz-7$, $R(z)=$ $=-13iz^2-18z+1+7i$. 4) $T(z)=0$, $R(z)=z^2-1$. 5) $T(z)=z^{25}-$ $-z^{20}+z^{15}-z^{10}+z^5-1$, $R(z)=0$.

6.6. 1) Lo es. 2) No lo es. 3) Lo es.

6.7. 1) $a=3$, $b=-4$. 2) $a=-1-i$, $b=i$. 3) $a=0$, $b=-1$; $a=0$, $b=1$; $a=-1-i$, $b=i$; $a=-1+i$, $b=-i$; $a=1-i$, $b=-i$; $a=1+i$, $b=i$.

6.8. 1) $n = km$, $k \in \mathbb{N}$. 2) $n = (2k+1)\,m$, $k \in \mathbb{N}$. 3) $n = 2km$, $k \in \mathbb{N}$. 4) n y m son números naturales tomados al azar. 5) n, par, m, impar.

6.9. 1) $(z-1)^3$. 2) $z^{30}-1$. 3) $z^{15}-1$. **6.10.** $z+2$. **6.11.** $\frac{i}{2}z+\frac{1}{2}+i$.

6.12. z^3-1.

6.13. 1) $1+2i$; $1-2i$. 2) $2+i$; $-2+i$. 3) $13-i$; $7+i$. 4) $5+i$; $3+2i$. 5) $\frac{5-i}{2}$; i.

6.14. 1) $4+i$; $-4+i$; $-4-i$; $4-i$. 2) $\cos(\pi k/3)+i\,\mathrm{sen}\,(\pi k/3)$ ($k=1, 2, 3, 4, 5$). 3) $-\mathrm{tg}\,(\pi k/16)$ ($k=1, 9, 17, 25$). 4) $2i$; $-3i$; $-\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac{i}{2}$; $\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac{i}{2}$.

6.15. 1) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})$; -1; $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})$. 2) $2(\cos 144°+i\,\mathrm{sen}\,144°)$; $2(\cos 216°+i\,\mathrm{sen}\,216°)$; $\sqrt[5]{31}(\cos 108°+i\,\mathrm{sen}\,108°)$; $-\sqrt[5]{31}$; $\sqrt[5]{31}(\cos 252°+i\,\mathrm{sen}\,252°)$.

6.16. Sea $z = k$ la raíz entera de la ecuación

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

con coeficientes enteros. Entonces

$$a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0$$

y, por lo tanto,

$$a_0 = -k\,(a_n k^{n-1} + \ldots + a_1).$$

El número $a_n k^{n-1} + \ldots + a_1$, por lo visto, según las suposiciones hechas, es un entero, por lo tanto, k es el divisor de a_0.

6.17. 1) -2. 2) 2. 3) La ecuación no tiene raíces enteras. 4) -7; -2; 2; 3. 5) 2. **6.19.** 1) $-7/3$. 2) $1/2$; 4.

6.20. 1) -5; $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i$; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i$. 2) 1; 3; $2i$; $-2i$. 3) -2; $1+\sqrt{3}\,i$; $-1+\sqrt{3}\,i$; $-1-\sqrt{3}\,i$; $1-\sqrt{3}\,i$. 4) -3; -2; 2; 3.

6.21. *Indicación.* Hagan uso del problema 5.11.

6.23. 1) $1-i$; $(\sqrt{13}-1)/6$; $-(\sqrt{13}+1)/6$. 2) $-i$; $(-1+\sqrt{3}\,i)/2$. $(-1-\sqrt{3}\,i)/2$.

6.25. $a=-6$, $b=-2$; $z_2=1-\sqrt{2}$; $z_3=1$; $z_4=-1$; $z_5=-2$.

6.26. 1) $-1+i$; $-1-i$. 2) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **6.27.** 1) 2. 2) 3. 3) 3.

6.28. $a=-e^{4\pi ki/5}$, $b=9\cdot e^{8\pi ki/5}$, $k=0, 1, 2, 3, 4$. **6.30.** $P(x)=1+(x-1)^5\sum_{k=0}^{9} C_{k+4}^{4}x^k$. **6.31.** 1) $z^3-7z^2+17z-15$. 2) $(z^2+1)^2(z^2+2z+2)$.

6.32. z^4-14z^2+9. **6.34.** 3. **6.35.** $z^3-2z^2+z+1=0$. **6.36.** $c=8$, $z_1=-2$, $z_2=(1+i\sqrt{15})/2$, $z_3=(1-i\sqrt{15})/2$. **6.37.** $5/4$, $-3/4$. **6.38.** $a_{n-1}^2-2a_{n-2}$. **6.39.** 1) 1. 2) $1/16$. 3) 16.

6.40. 1) $(z+1)\left(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 2) $(z-1)(z-2)(z-3.)$

3) $6(z-2)\left(z+\frac{2}{3}\right)\left(z-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(z-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.
4) $(z+1)^3(z-3)(z-4)$. 5) $(z-i)^2(z+1+i)$.

6.41. 1) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. 2) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$. 3) $(x-1)(x+2)(x^2+x+6)$. 4) $(x^2+x+1)^2$. 5) $(x+2)(x+6)(x-\sqrt{6}+4)(x+\sqrt{6}+4)$. 6) $\left(x-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)(x^2+5x+7)$. 7) $(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)^2$.

6.43. 1) z^2-z+1. 2) $2z^3-z^2-4z+3$. 3) $\frac{z}{2}-\frac{1}{2}$.

6.45. $\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{z_{n+1}-z_k}$. 6.47. 1) $z+3+\frac{3z+1}{z^2+2}$. 2) z^2-7z+7. 3) $z^3+3z^2+6z+10+\frac{14z^2-24z+11}{(z-1)^3}$. 4) $\sum_{k=0}^{9}(-1)^k C_{10}^k 3^k (z^2+4)^{9-k}+\frac{3^{10}}{z^2+4}$.

6.48. 1) a) $\frac{A_1^{(1)}}{z-3i}+\frac{A_1^{(2)}}{(z-3i)^2}+\frac{A_2^{(1)}}{(z+3i)}+\frac{A_2^{(2)}}{(z+3i)^2}$; b) $\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+9}+\frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+9)^2}$. 2) a) $\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{z+3}+\frac{A_3}{z+1-2i}+\frac{A_4}{z+1+2i}$; b) $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+5}$. 3) a) $\frac{A_1^{(1)}}{z+1}+\frac{A_1^{(2)}}{(z+1)^2}+\frac{A_2^{(1)}}{z-e^{i\pi/3}}+\frac{A_2^{(2)}}{(z-e^{i\pi/3})^2}+\frac{A_3^{(1)}}{z-e^{-i\pi/3}}+\frac{A_3^{(2)}}{(z-e^{-i\pi/3})^2}$; b) $\frac{A_1^{(1)}}{x+1}+\frac{A_1^{(2)}}{(x+1)^2}+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2-x+1}+\frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2-x+1)^2}$.

6.49. 1) $\frac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)}{z-\frac{1+i\sqrt{3}}{4}}+\frac{\frac{1}{8}\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)}{z-\frac{1-i\sqrt{3}}{4}}$. 2) $\frac{i}{z-i+2}-\frac{i}{z-i+3}$. 3) $-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}$. 4) $\frac{2}{z-1}-\frac{2}{z+1}-\frac{2i}{z-i}+\frac{2i}{z+i}$. 5) $\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{-1-i}{z-1-i}+\frac{-1+i}{z-1+i}+\frac{1-i}{z+1-i}+\frac{1+i}{z+1+i}\right)$. 6) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{n}e^{2k\pi i/n}}{z-e^{2k\pi i/n}}$.

6.50. 1) $\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}$. 2) $\frac{2}{x-1}-\frac{2x+4}{x^2+x+1}$. 3) $\frac{3/2}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{1/2}{x+3}$. 4) $\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2+x+1}$. 5) $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-2}$. 6) $\frac{127}{x-2}+\frac{66}{(x-2)^2}+\frac{129}{x+2}-\frac{62}{(x+2)^2}$. 7) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}$. 8) $\frac{1}{x}-\frac{7}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}+$

$$+\frac{6x+2}{x^2+x+1}+\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}.\quad 9)\ \frac{1}{x-1}+\sum_{k=1}^{50}\frac{2x\cos(4\pi k/101)-2\cos(2\pi k/101)}{x^2-2x\cos(2\pi k/101)+1}.$$

10) $$\frac{1}{x+2\cos(\pi/9)}+\frac{1}{x+2\cos(7\pi/9)}+\frac{1}{x+2\cos(13\pi/9)}.$$

§ 7. Funciones numéricas. Sucesiones

7.1. 1) $x \neq -1$ *). 2) $x \neq 1$; $x \neq -1$. 3) $x \neq 2$; $x \neq 4$. 4) $x \neq -2$; $x \neq 0$; $x \neq 2$. 5) $x > 0$. 6) $x \neq -3/2$; $x \neq 3/2$. 7) $x \neq -3/2$; $x \neq -1/2$. **7.2.** 1) $\mathbb{R}$. 2) $\{0\}$. 3) $x \leqslant 2$. 4) $[-2; 1]$. 5) $(-1; 1)$. 6) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. 7) $x \neq -3$; $x \neq 3$. 8) $\{0\} \cup [2; +\infty)$. 9) $(0,5; 1) \cup [3; +\infty)$.

7.3. 1) $y=2x-2$. 2) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. 3) $y=\frac{2x+11}{7}$. 4) $y=\frac{3-2x}{4}$.
5) $y=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2$.

7.4. 1) $5+4x-x^2$. 2) x^2-2. 3) x^2+4x-5. 4) $\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+$
$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$.

7.5. 1) $2x^3+3x^2+5$. 2) $\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1+$
$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}y_3+$
$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y_4$.

7.6. $$P(x)=\sum_{j=1}^{n+1}\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{n+1}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}y_j.$$

7.7. 1) $(-\infty; 3]$; $[-1; +\infty)$; $[-1; 3]$.
2) $[-1; 1]$; $\{x \in \mathbb{R}: x \neq 1/2\}$, $\{x \in [-1; 1]: x \neq 1/2\}$. 3) $[3; +\infty)$; $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; $[3; +\infty)$. 4) $(0; 5)$; $\{x \in \mathbb{R}: x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$; $\{x \in (0; 5): x \neq \pi/2; x \neq 3\pi/2\}$. 5) $(-4; 4)$; $\{x \in \mathbb{R}: x \neq \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$; $\{x \in (-4; 4): x \neq \pi/2\}$. 6) $[1; +\infty)$; $[1; +\infty)$; $[1; +\infty)$.
7.8. 1) $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$. 2) $\mathbb{R}$; $\{x \in \mathbb{R}: x \neq 2,\ x \neq -2\}$. 3) $(-1; 1)$; $\{x \in (-1; 1): x \neq 0\}$. 4) $[-2; +\infty)$; $\{x \in [-2; +\infty): x \neq -1\}$. 5) $[-1/2; +\infty)$; $\{x \in [-1/2; +\infty): x \neq 0\}$. 6) $\mathbb{R}$; $\left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\log 2}{\log 2,5}\right\}$. 7) $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$. 8) $\mathbb{R}$; $\left\{x \in \mathbb{R}: x \neq (-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. 9) $\{x \in \mathbb{R}: x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$; $\{x \in \mathbb{R}: x \neq \pi n,\ x \neq \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. **7.9.** 1) 3; $2a^2/(a^2-4)$; $2/(b-2)$; $(b-1)/(b-3)$; $1/(1-2p)$; $(p-2)/p$. 2) 240; 0; $8b^3+8b-1$; $8b^3-24b^2+32b-16$; $8(p^2+1)/p^2$; $1/(8p(1+p^2))$. **7.10.** 1) 1, 1; 1,5; 1; 0. 2) 1/8; 1; 0,5; 1; 1984. **7.11.** $a=2$, $b=5$ con $m \neq n$; $a \in \mathbb{R}$, $b = a+3$ con $m = n$. **7.12.** -2. **7.13.** $8b^3$. **7.14.** 1) $a > 1$. 2) $a < -1$.

---

*) Semejante anotación abreviada significa que el campo de definición es el conjunto $\{X \in \mathbb{R}: X \neq -1\}$.

7.15. 1) $a-\frac{1}{a}$. 2) $\frac{1}{a}-a$. 3) $a-\frac{1}{a}$. 4) $\frac{1}{a}-a$. **7.16.** 1) $[-9;-1]$. 2) $[0;4]$. 3) $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$. 4) $[-4;+\infty)$. 5) $(-\infty;9/8]$. 6) $[-9;23]$. 7) $[2;+\infty)$. 8) $(-\infty;-4]$. 9) $[0;1)$. **7.17.** 1) $[1;+\infty)$. 2) $[0;+\infty)$. 3) $[0;2]$. 4) $[\sqrt{6};+\infty)$. 5) $(-\infty;-2\sqrt{ab}]\cup[2\sqrt{ab};+\infty)$. 6) $\mathbb{R}$. 7) $[-2;2]$. **7.18.** $a=-4{,}5$. **7.19.** $a=b=-1$. **7.22.** 1) $f\circ g(x)=x$, $x\geqslant 0$; $g\circ f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. 2) $f\circ g(x)=g\circ f(x)=|x|$, $x\in[-1;1]$. 3) $f\circ g(x)=x$, $x>0$; $g\circ f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. 4) $f\circ g(x)=(x+5)^5$, $x\in\mathbb{R}$; $g\circ f(x)=x^5+5$, $x\in\mathbb{R}$.
5) $f\circ g(x)=\begin{cases}0, & x\in[0;+\infty),\\ x^2, & x\in(-\infty;0);\end{cases}$ $g\circ f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$. 6) $f\circ g(x)=\ln \operatorname{sen}^2 x$, $x\neq \pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $g\circ f(x)=\operatorname{sen}\ln x^2$, $x\neq 0$. **7.23.** 1) $\operatorname{sen}\log_2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
2) $\frac{1}{\sqrt{1+\log_2 \operatorname{sen} x}}$. 3) $1+\frac{1}{\log_2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$. 4) $\frac{1}{\log_2\sqrt{\operatorname{sen}(1+x)}}$.
7.25. 1) $f(x)=\frac{1}{x+3}$. 2) $f(x)=\frac{1}{x^2}+1$. 3) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$. 4) $f(x)=x^2-2$.
5) $f(x)=1-x^{3/2}$. **7.26.** No existe. **7.27.** 1) $f\circ f\circ f(x)=\frac{x}{a(1+b+b^2)x+b^3}$, $\{x\in\mathbb{R}:\ ax+b\neq 0,\quad a(1+b)x+b^2\neq 0,\quad a(1+b+b^2)x+b^3\neq 0\}$.
2) $g\circ g\circ g(x)=\frac{x}{\sqrt{a^6+(a^4+a^2+1)x^2}}$. 3) Si $b\neq 1$, $f\circ f\circ\ldots\circ f(x)=$
$$=\frac{x}{a\frac{b^n-1}{b-1}x+b^n},\quad \left\{x\in\mathbb{R}:\ a\frac{b^k-1}{b-1}x+b^k\neq 0,\quad k=1,2,\ldots,n\right\},$$
y si $b=1$, $f\circ f\circ\ldots\circ f(x)=\frac{x}{anx+1}$, $\{x\in\mathbb{R},\quad akx+1\neq 0,$ $k=1,2,\ldots,n\}$. 4) Si $a^2\neq 1$, $g\circ g\circ\ldots\circ g(x)=\frac{x}{\sqrt{a^{2n}+\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}x^2}}$,
y si $a^2=1$, $g\circ g\circ\ldots\circ g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. **7.30.** 1) Par; 2) impar; 3) ni par ni impar; 4) par; 5) ni par ni impar; 6) ni par ni impar; 7) ni par ni impar; 8) par; 9) impar. **7.41.** 1) a) $y=-x$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$ *); b) $y=x$, $x\in(-\infty;0]$. 2) a) $y=x^2$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; b) $y=-x^2$, $x\in(-\infty;0]$. 3) a) $y=\sqrt{-x}$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; b) $y=-\sqrt{-x}$, $x\in(-\infty;0]$. 4) a) $y=-x+5$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; b) $y=x-5$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)=0$. 5) a) $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; b) $y=-\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1;0)$, $y(0)=0$. 6) a) $y=x^2+4x+3$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; b) $y=-x^2-4x-3$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)=0$. 7) a) $y=\frac{1}{x(x-1)}$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; b) $y=\frac{1}{x(1-x)}$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)=0$.

7.47. 1) Lo son. 2) Lo son. 3) No lo son. 4) No lo son.

7.48. 1) La función inversa $y=(x+1)/2$. 2) No invertible. 3) La función inversa $y=x^{-1/3}$. 4) No invertible. 5) La función inversa $y=\sqrt[5]{x^3}$. 6) La función inversa $y=1+x^2$, $x\geqslant 0$. 7) No invertible. 8) La función inversa $y=\sqrt{|x|}\operatorname{sign} x$.

---

*) Aquí y más adelante, en ejemplos análogos, esta anotación significa que como $y(0)$ se puede tomar cualquier número real.

7.49. 1) $a=-1$, $b\in\mathbb{R}$ o bien $a=1$, $b=0$. 2) $\alpha=\pm 1$.
7.51. 1) $\forall C>0\ \exists x\in D(f)\ f(x)>C$. 2) $\forall C>0\ \exists x\in D(f)\ f(x)<-C$.
7.56. 1) $\max f=0$ *), $\min f=-9$. 2) $\max f=1/4$, $\min f=-6$. 3) $\max f=3$, $\min f=5/4$. 4) $\max f=1$, $\min f=-5/13$. 5) $\max f=5$, $\min f=4$. 6) $\max f=1/6$, $\min f=0$. **7.59.** 1) $-9/4$. 2) $4\sqrt{2}$. 3) 0. 4) $-1/3$. **7.60.** 1) -2. 2) $-2\sqrt{2}$. 3) 1. 4) 1. **7.61.** 1) $\sup f=+\infty$; $\inf f=\min f=2$. 2) $\sup f=\max f=-2$; $\inf f=-\infty$. 3) $\sup f=1$; $\inf f=\min f=0$. 4) $\sup f=+\infty$; $\inf f=-\infty$. 5) $\sup f=1$; $\inf f=\min f=0$. **7.68.** Crece sobre $[-1;0]$ y $[1+\infty)$, decrece sobre $(-\infty;-1]$ y $[0;1]$.
7.70. 1) $(-\infty;0)\cup(0;0{,}25)\cup(0{,}25;+\infty)$. 2) $(-\infty;0]$. 3) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; $(0;+\infty)$. 4) $(0;1)\cup(1;+\infty)$. 5) $(-\infty;99)\cup(99;100)$. 6) $(1;+\infty)$; $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. 7) $(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup(1;+\infty)$. 8) $(0;1)$.
7.71. 1) $(0;1]$. 2) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. 3) $[3/4;+\infty)$. 4) $[1;+\infty)$. 5) $(-\infty;2]$ 6) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **7.72.** 1) Ni par ni impar. 2) Ni par ni impar. 3). Impar. 4) Ni par ni impar. 5) Par. 6) Impar. 7) Impar. 8) Par. 9) Ni par ni impar.
7.77. 1) $\sup f=\max f=1$, $\inf f=0$. 2) $\sup f=+\infty$, $\inf f=\min f=\sqrt{2}-1$. 3) $\sup f=1$, $\inf f=-\infty$. 4) $\sup f=8$, $\inf f=-\infty$. 5) $\sup f=+\infty$, $\inf f=-\infty$. 6) $\sup f=+\infty$, $\inf f=\min f=0$. 7) $\sup f=\max f=4$, $\inf f=-\infty$.
7.80. 1) Crece estrictamente sobre $(-\infty;0)$ y $(0;+\infty)$. 2) Decrece estrictamente sobre $(-\infty;0]$, crece estrictamente sobre $[0;+\infty)$. 3) Decrece estrictamente sobre $\mathbb{R}$. 4) Crece estrictamente sobre $(-1;+\infty)$. 5) Decrece estrictamente sobre $(0;1)$ y $(1;+\infty)$. 6) Crece estrictamente sobre $(0;2]$, decrece estrictamente sobre $[2;4)$. 7) Decrece estrictamente sobre $(-\infty;-1)$, decrece estrictamente sobre $(0;+\infty)$.
7.83. 1) a) $y=-3\cdot 2^{-x-1}$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$ **); b) $y=3\cdot 2^{-x-1}$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)=0$. 2) a) $y=1-2\log(-x)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; b) $y=-1+2\log(-x)$, $x\in(-\infty;0)$; $y(0)=0$. 3) a) $y=\log_{2-x}(-x)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; b) $y=-\log_{2-x}(-x)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)=0$. 4) a) $y=-\operatorname{th}(x+1)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; b) $y=\operatorname{th}(x+1)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)=0$.
7.84. 1) $y=\log_3(3/x)$, $x\in(0;+\infty)$. 2) $y=10^{x-1}-2$, $x\in\mathbb{R}$. 3) $y=\log_2(x/(1-x))$, $x\in(0;1)$. 4) $y=10^{1/x}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$. 5) $y=\log_2(x+\sqrt{x^2+2})$, $x\in\mathbb{R}$. 6) $y=\operatorname{ch}x$, $x\in(-\infty;0)$.
7.85. 1) $y=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$. 2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. 3) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. 4) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$. **7.87.** 1. **7.89.** 1) $2\pi/3$. 2) $8/3$. 3) $\pi/3$. 4) π. 5) $\pi/2$. 6) 2π. 7) $\pi/2$.

7.92. 1) $x\neq\pi n/2$, $n\in\mathbb{Z}$. 2) $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. 3) $x\in\left(2\pi n;\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. 4) $x\in[2;4]$. 5) $x\in[0;4]$. 6) $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. 7) $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **7.93.** 1) $[-1;1]$. 2) $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$. 3) $[1/2;1]$.

---

*) Allí donde está claro de qué conjunto X se habla, en lugar de $\max\limits_{X} f$ se ha escrito $\max f$.
**) Véase la llamada en la pág. 573.

4) $(-\infty;\ 0] \cup [2; +\infty)$. 5) $[0;\ \pi/2]$. 6) $(\pi/2;\ \pi]$. 7) $[0;\ 1]$. 8) $[-\pi/4;\ \pi/4]$.

7.94. 1) Impar. 2) Par. 3) Par. 4) Par. 5) Impar. 6) Ni par ni impar. 7) Ni par ni impar. 8) Ni par ni impar. **7.95.** 1) Par. 2) Ni par ni impar. 3) Par. 4) Par. 5) Par. 6) Impar. 7) Par. **7.99.** 1) $\sup f = \max f = 21$, $\inf f = \min f = -3$. 2) $\sup f = \max f = \sqrt{3/2}$, $\inf f = \min f = 0$. 3) $\sup f = \max f = 1/2$, $\inf f = -\infty$. 4) $\sup f = +\infty$, $\inf f = \min f = 2$. 5) $\sup f = 1$, $\inf f = -1$. 6) $\sup f = \pi/2$, $\inf f = -\pi/2$. 7) $\sup f = \max f = \pi/2$, $\inf = 0$.

7.100. 1) Decrece estrictamente sobre $[-\pi; -\pi/2)$ y $(-\pi/2; 0]$, crece estrictamente sobre $[0;\ \pi/2)$ y $(\pi/2;\ \pi]$. 2) Crece estrictamente sobre $[2/(3\pi);\ 2/\pi]$, decrece estrictamente sobre $[2/\pi;\ +\infty)$. 3) Decrece estrictamente sobre $(-\infty;\ 0)$ y $(0;\ +\infty)$. 4) Crece estrictamente sobre $[-1;\ 0]$, decrece estrictamente sobre $[0;\ 1]$. 5) Crece estrictamente sobre $\mathbb{R}$. 6) Crece estrictamente sobre $(-\infty;\ 0]$ decrece estrictamente sobre $[0;\ +\infty)$. 7) Decrece estrictamente sobre $\mathbb{R}$. **7.104.** 1) a) $y = 1 - \operatorname{sen} x$, $x < 0$, $y(0) \in \mathbb{R}$ **); b) $y = -1 + \operatorname{sen} x$, $x < 0$, $y(0) = 0$. 2) a) $y = -\operatorname{ctg} x$, $x < 0$, $y(0) \in \mathbb{R}$; b) $y = \operatorname{ctg} x$, $x < 0$, $y(0) = 0$.

3) a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$, $x < 0$, $y(0) \in \mathbb{R}$;

b) $y = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$, $x < 0$, $y(0) = 0$. 4) a) $y = \pi - \arccos 2x$, $x < 0$, $y(0) \in \mathbb{R}$; b) $y = \arccos 2x - \pi$, $x < 0$, $y(0) = 0$. 5) a) $y = -\operatorname{arctg}(x+1)$, $x < 0$, $y(0) \in \mathbb{R}$; b) $y = \operatorname{arctg}(x+1)$, $x < 0$, $y(0) = 0$. **7.105.** 1) $y = -\pi - \operatorname{arcsen} x$. 2) $y = -\arccos x$. 3) $y = \pi + \operatorname{arctg} x$. 4) $y = \operatorname{arcctg} x - \pi$. 5) $y = (\pi - \operatorname{arcsen}(x/2))/3$. 6) $y = 2 \operatorname{sen}(x/2)$, $x \in [-\pi;\ \pi]$. 7) $y = -\cos x$, $x \in [0; \pi/2]$. 8) $y = \cos x$, $x \in [0; \pi/2]$. 9) $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, $x \neq 0$. **7.107.** 1) $y = 1/x$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$. 2) $y = 2x^3$, $x \neq \pm 2$. 3) $y = \sqrt{6 - x^2}$, $x \neq -\sqrt{2}$. 4) $x = -y^{4/5}$, $y \neq 0$. 5) $x = y^3$. **7.111.** 1) A. 2) A y B. 3) B. 4) Ni A ni B. **7.112.** 1) $y = x^2 + 1$. 2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

3) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. 4) $3x = |\ln(y-1)|$. 5) $8(x+y) = (x-y)^2 + 16$.

7.114. $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi + \dfrac{3\pi}{4}\right)}$. 2) $r = 2\cos\varphi$. 3) $\varphi = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$ $(n = 0, 1, 2, 3)$

y $r = 0$. 4) $r = \dfrac{1}{4\operatorname{sen}^2(\varphi/2)}$.

7.117. 1) $[0;\ 6)$. 2) $[-3;\ 0{,}5]$. 3) $x \neq \pm 1$. 4) $(-\infty;\ -2] \cup [2;\ +\infty)$. 5) $[-3;\ 3]$. 6) $(-4;\ 2)$.

7.118. 1) $\mathbb{R}$. 2) $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

3) $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ 3)$.

4) $(-\infty;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$. 5) $(-5;\ 8/5) \cup (8/5;\ 9/5)$. 6) $(-\infty;\ -\sqrt{5} - 1) \cup (-\sqrt{5} - 1;\ -3) \cup [2;\ +\infty)$. 7) $(-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$. 8) $(0;\ 1) \cup (1;\ \log_2(8/3))$.

9) $(-1;\ 5)$. 10) $(2;\ 3)$. **7.119.** 1) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n < x \leqslant \dfrac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3) $-4 < x < 4$, $x \neq \pm\pi$, $x \neq 0$.

7.120. 1) $[0;\ 4]$. 2) $\varnothing$. 3) $x \neq \pm 3$. 4) $[-(1+\sqrt{5})/2;\ (1-\sqrt{5})/2] \cup$

**) Véase la llamada en la pág. 573.

$\cup[(\sqrt{5}-1)/2;\ (\sqrt{5}+1)/2]$. 5) $[1/\sqrt{2};\ 1]$. 6) $\frac{\pi}{3}+\pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. 7) $-1 \leqslant x \leqslant 1,\ x \neq \pm 1/\sqrt{2}$. 8) $(\operatorname{ctg} 0{,}5;\ +\infty)$. 9) $\left[0;\ (3-\sqrt{5})/2\right) \cup \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ 4\right]$. 10) $[1;\ 2)$. 11) $(-6;\ -5\pi/3] \cup [-\pi/3;\ 1/6)$. 12) $(0;\ 1/2) \cup \cup (1/2;\ 1)$. **7.121.** 1) $[-1/3;\ 1/3]$. 2) $(-1;\ 1]$. 3) $[1;\ +\infty)$. 4) $[0;\ 3]$. 5) $\{0\}$. 6) $[2^{-9};\ +\infty)$. 7) $(-\infty;\ 2]$. 8) $\{1/2\}$. 9) $[0;\ 1]$. **7.122.** 1) $[-\sqrt{26};\ \sqrt{26}]$. 2) $[-1;\ 1]$. 3) $[0;\ +\infty)$. 4) $\mathbb{R}$. 5) $\{0\}$. 6) $[-1;\ 5/4]$. 7) $(-\infty;\ \log_2(5/4)]$. 8) $[1/\sqrt{2};\ 1]$. 9) $[\pi/4;\ 3\pi/4]$.

7.123. 2) $[2;\ 3)$ **7.124.** 1) $[-4;\ -3] \cup (-1;\ +\infty)$. 2) $\{-6\}$. 3) $(-\infty;\ -6] \cup \cup (-1;\ +\infty)$. 4) $[-4;\ -3]$. **7.126.** a) $a > 1/\sqrt[3]{4}$; b) $b = -\sqrt[3]{2}$. **7.127.** 1) $a > 1$. 2) $a > 0,\ a < -1$. 3) $0 \leqslant a \leqslant 1/2$. **7.128.** $S = x^2,\ x \in \in [0;\ 1/2]$, $S = (4x-1)/4,\ x \in [1/2;\ 3/2]$, $S = 1{,}5-(2-x)^2,\ x \in [3/2;\ 2]$.

7.129. $V = \frac{\pi r^2}{3}\frac{h^2}{h-2r},\ h > 2r$. **7.130.** $S = 4\sqrt{2/3}\,x\,(b-2x),\ 0 \leqslant x \leqslant \leqslant b/3$; $S = \sqrt{2/3}\,(b-x)^2,\ b/3 < x \leqslant b$; $\text{máx } S = b^2/\sqrt{6}$. **7.131.** $2R \operatorname{sen}(\alpha/2) \times \times (1-\operatorname{sen}(\alpha/2))$; $R/2$. **7.132.** $\rho x + m\,(1+E\,(x/l))$. **7.133.** $S = vt,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$, $S = v\sqrt{7t^2-15t+9},\ t > 1$; $\text{mín } S = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}v$. **7.134.** 1) $[-3;\ 3]$. 2) $(3\sqrt{5}-5)/4$.

7.136. 1) n^m. 2) $n!$. **7.138.** Funciones invertibles: 1), 4), 6), 9). **7.140.** 1) $y = x^{4/3},\ x \geqslant 0$. 2) $y = -\sqrt{(x+1)/x},\ x \leqslant -1,\ x > 0$. 3) $y = 1 - -\sqrt{1-x},\ x < 0$; $y = -1+\sqrt{1+x},\ x \geqslant 0$. 4) $y = (5x+3)/(x-1),\ x \neq 1,\ x \neq -3/5$. 5) $y = x+\sqrt{x^2-1},\ x \geqslant 1$. 6) $y = x-\sqrt{x^2-1},\ x \geqslant 1$. 7) $y = = (x^2+1)/2x,\ x \leqslant -1$. 8) $y = (x^2+1)/2x,\ -1 \leqslant x < 0$.

7.141. 1) $y = 1-\sqrt{\log_2 2x},\ x \geqslant 1/2$. 2) $y = (1-\ln(1-x))/(1+\ln(1-x))$, $x < 1,\ x \neq 1-e^{-1}$. 3) $y = \log_{1{,}5}\frac{1+x}{1-x},\ -1 < x < 1$. 4) $y = 0{,}5 \log \frac{x}{2-x}$, $0 < x < 2$. 5) $y = 0{,}5\,(a^x - a^{-x}),\ x \in \mathbb{R}$.

7.142. 1) $y = 3\pi - \operatorname{arcsen} x,\ x \in [-1;\ 1]$. 2) $y = 4\pi - 2\arccos(x/2),\ x \in \in [-2;\ 2]$. 3) $y = \operatorname{arcctg} x,\ x \in (0;\ +\infty)$, $y = \operatorname{arcctg} x - \pi,\ x \in (-\infty;\ 0)$. 4) $y = 2\pi + 2\operatorname{arcsen}\sqrt{x} = 2\pi + \arccos(1-2x),\ x \in [0;\ 1]$. 5) $y = -\arccos(1/x)$, $x \in (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$. 6) $y = \operatorname{sen} x,\ x \in [0;\ \pi/2]$. 7) $y = -\operatorname{sen} x,\ x \in \in [0;\ \pi/2]$. 8) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),\ x \in (-\pi/2;\ -\pi/4) \cup (-\pi/4;\ \pi/2)$. **7.143.** 1) $(0;\ 0)$, $(2/3;\ 2/3)$, $(-2/3;\ -2/3)$.

7.144. $y = (x^3-3x)/2,\ |x| \geqslant 2$. **7.146.** $y = \sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

7.147. $\left[\frac{2-\pi}{2+\pi};\ +\infty\right)$, $y = \frac{1+\operatorname{arcsen} 0{,}5\,(x-1)}{1-\operatorname{arcsen} 0{,}5\,(x-1)}$, $x \in [-1;\ 1+2\operatorname{sen} 1)$. **7.148.** 2) $a+d=0,\ |a|+|c| \neq 0$ o bien $b=c=0,\ a=d \neq 0$.

7.150. $b=-1,\ a>0$ o bien $b=1,\ a=0$. **7.151.** $-0{,}5 < a < 0{,}5$. **7.152.** $c=\pi,\ b=-1,\ a \in \mathbb{R}$ o bien $c=\pi,\ b=1,\ a=0$. **7.153.** $|\lambda| \geqslant \pi$; si $\lambda \leqslant -\pi$, entonces $y = \operatorname{sen} 0{,}5\,(\lambda+\sqrt{\lambda^2-2\lambda\pi+4x})$, $x \in \left[\frac{\pi^2}{4}+\lambda\pi;\ \frac{\pi^2}{4}\right]$; si $\lambda \geqslant \pi$, entonces $y = \operatorname{sen} 0{,}5\,(\lambda-\sqrt{\lambda^2-2\lambda\pi+4x})$, $x \in \left[\frac{\pi^2}{4};\ \frac{\pi^2}{4}+\lambda\pi\right]$. **7.155.** 1) $0 \leqslant x \leqslant 1$. 2) $-1 \leqslant x \leqslant 0$. 3) $0 < x$. 4) $x < 0$. 5) $x < 1$. (6 $x > 1$.

7.156. 1) Par. 2) Impar. 3) Ni par ni impar. 4) Impar. 5) Par. 6) Ni par ni impar. 7) Ni par ni impar. 8) Par. **7.157.** 1) Impar. 2) Impar. 3) Par. 4) Ni par ni impar. 5) Par. 6) Impar. 7) Impar. 8) Impar. 9) Par. **7.158.** 1) Par. 2) Impar. 3) Ni par ni impar. 4) Par. 5) Ni par ni impar. 6) Impar. 7) Impar. 8) Par. **7.159.** 1) Par. 2) Ni par ni impar. 3) Par. 4) Impar. 5) Ni par ni impar. 6) Impar. 7) Ni par ni impar. 8) Par.

7.160. 1) $(3x^2+1)+(x^3+3x)$. 2) $-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^3}$. 3) $\cos x \operatorname{sen} 1+\operatorname{sen} x \cos 1$. 4) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}$. **7.162.** 1) $0{,}5(|x-1|+|x+1|)+0{,}5(|x-1|-|x+1|)$. 2) $0{,}5(a^x+a^{-x})+0{,}5(a^x-a^{-x})$. 3) $\ln 2 \operatorname{ch}\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$. 4) $\cos x^3 \times \operatorname{sen} x^2+\operatorname{sen} x^3 \cos x^2$. 5) No es representable. 6) $\frac{\pi}{2}+(-\arcsin x)$. 7) $-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x$. 8) $0{,}5(\operatorname{arctg}(1-x)+\operatorname{arctg}(1+x))+0{,}5(\operatorname{arctg}(1-x)-\operatorname{arctg}(1+x))=\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{x^4+4}+x^2}-\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{x^4+4}-x^2+2}$.

7.163. 1) a) No; b) sí. 2) a) Sí; b) no. **7.164.** 1) $f \circ g$, $g \circ h$, $h \circ g$. 2) $h \circ h$. **7.165.** 2) No.

7.174. 1) Constante sobre $(-\infty; 0]$, crece estrictamente sobre $[0; +\infty)$. 2) Decrece estrictamente sobre $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$. 3) Crece estrictamente sobre $(-\infty; 1]$, decrece estrictamente sobre $[1; +\infty)$. 4) Crece estrictamente sobre $(-\infty; -1]$ y $[1; +\infty)$, decrece estrictamente sobre $[-1; 1]$. 5) Decrece estrictamente sobre $(-\infty; 0]$, crece estrictamente sobre $[0; +\infty]$. 6) Crece estrictamente sobre $(-\infty; -1)$ y $(-1; 0]$, decrece estrictamente sobre $[0; 1)$ y $(1; +\infty)$.

7.175. 1) Decrece sobre $(-\infty; 1]$, crece sobre $[1; +\infty)$. 2) Crece sobre $[0; 1]$, decrece sobre $[1; 2]$. 3) Crece sobre $(-\infty; -3)$ y $(-3; -\sqrt{5}]$, decrece sobre $[\sqrt{5}; 3)$ y $(3; +\infty)$. 4) Crece sobre $(-\infty; 0]$, decrece sobre $[0; +\infty)$. 5) Decrece sobre R. 6) Crece sobre $(-\infty; -2\sqrt{2})$ y $(-2\sqrt{2}; 0]$, decrece sobre $[0; 2\sqrt{2})$ y $(2\sqrt{2}; +\infty)$. 7) Crece sobre $[2; +\infty)$. 8) Crece sobre $[1; +\infty)$. 9) Crece sobre $(-\infty; -1]$, decrece sobre $[1; +\infty)$.

7.176. 1) Decrece sobre $[0; \pi/4]$ y $[\pi/2; 3\pi/4]$, crece sobre $[\pi/4; \pi/2]$ y $[3\pi/4; \pi]$. 2) Decrece sobre $[0; \pi/2]$ y $[3\pi/2; 2\pi]$, crece sobre $[\pi/2; 3\pi/2]$. 3) Decrece sobre $(0; \pi/4)$ y $[3\pi/4; \pi]$, crece sobre $[\pi/4; \pi/2]$ y $(\pi/2; 3\pi/4]$. 4) Decrece sobre $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$. 5) Crece sobre $(0; 4]$, decrece sobre $[4; 8)$. 6) Crece sobre R. 7) Crece sobre $(-\infty; -1]$, decrece sobre $[-1; +\infty)$. 8) Crece sobre $(-\infty; -1]$ y $[0; 1]$, decrece sobre $[-1; 0]$ y $[1; +\infty)$. **7.187.** Lo es.

7.193. 1) $2\sqrt{3}$. 2) 4. 3) 4. 4) 1. **7.194.** 1) -1. 2) $9/4$. **7.195.** 1) -6. 2) $1/8$. 3) $1/\sqrt{2}$. 4) -2. **7.196.** 1) $\max f=1/4$, $\min f=0$. 2) $\max f=5$, $\min f=11/4$. 3) $\max f=8$, $\min f=0$. 4) $\max f=1$, $\min f=1/4$. 5) $\max f=9/16$, $\min f=-1$. 6) $\max f=1$, $\min f=\cos 2$. 7) $\max f=\sin 1$, $\min f=-1$. 8) $\max f=1/2$, $\min f=0$. 9) $\max f=1/2$, $\min f=-1/6$.

7.197. Si $\frac{av_1+bv_2}{bv_1+av_2}\leqslant\cos\alpha$, entonces $\min S=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$, si $\frac{av_1+bv_2}{bv_1+av_2}>\cos\alpha$, entonces $\min S=\frac{|bv_1-av_2|\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}}$.

7.198. $0{,}5S$. **7.199.** 1) $R^2 \operatorname{ctg}\alpha$. 2) $R^2/(2\operatorname{sen}^2\alpha)$. **7.200.** $1/\sqrt{2}$. **7.201.** 1) $\max f=-1/\log 3$; $\min f=-\log 40/\log 3$. 2) $\max f=1$; $\min f=\log 5/\log 9$. 3) $\max f=5/4$; $\min f=1$. 4) $\max f=5$; $\min f=4$. 5) $\max f=-18$;

mín $f = -20{,}5$. 6) máx $f = -1$; mín $f = -32/7$. **7.203.** $-3{,}25$. **7.204.** 1) máx $f = 1$; mín $f = -\sqrt{2}$. 2) máx $f = 2\sqrt{2}$; mín $f = 2$. **7.205.** $r = R/\sqrt{2}$, $H = R\sqrt{2}$. **7.206.** $r = R\sqrt{2}$, $H = 4R$. **7.207.** $a/\sqrt{5}$. **7.208.** $7a^2/32$. **7.209.** 1/5. **7.210.** 1) 1/8. 2) $1/2\sqrt{3}$. **7.211.** 1) -1. 2) -4. 3) $-(ad - bc)^2/4 = -((b - a) \times \times (c - a))^2/4$. 4) $\frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_i^2$. 5) 3. **7.212.** 2. **7.214.** $g(x) = f(2x_0 - x)$.
7.215. $g(x) = 2y_0 - f(x)$.

7.216. $g(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$.

7.217. 1) Decrece sobre $(-\infty; 2]$, crece sobre $[2; +\infty)$. 2) Crece sobre $(-\infty; 3/4]$, decrece sobre $[3/4; +\infty)$. 3) Decrece sobre $(-\infty; -3/2]$ y $[0; 3/2]$, crece sobre $[-3/2; 0]$ y $[3/2; +\infty)$. 4) Decrece sobre $(-\infty; -1]$ y $[0; 1]$, crece sobre $[-1; 0]$ y $[1; +\infty)$.

7.226. 1) $c \neq 0$, $bc - ad = c^2$. 2) $c \neq 0$, $bc - ad = c^2(x_2 - x_1)$. **7.227.** 1) $(1/2; 1/2)$. 2) $(-d/c; a/c)$. 3) $(2; -16)$. 4) $(-b/3a; (2b^3 - 9abc + 27a^2d)/27a^2)$.

7.236. 1) $|\alpha|$. 2) 1/2. 3) $\pi/\sqrt{2}$. 4) π. 5) π. 6) π. 7) $\pi/2$. 8) 2π. 9) 2π. 10) π. 11) 2π.

7.239. 1) $16\pi/3$. 2) $16\pi/3$. 3) $2\pi n_0 \frac{q_1}{p_1} = 2\pi m_0 \frac{q_2}{p_2}$, donde $p_1q_2/p_2q_1 = n_0/m_0$ es una fracción irreducible. 4) $2\pi n_0 \frac{q_1}{p_1} = 2\pi m_0 \frac{q_2}{p_2}$, donde $p_1q_2/p_2q_1 = n_0/m_0$ es una fracción irreducible. 5) $2\pi l_0 \frac{q_1}{p_1} = \pi k_0 \frac{q_2}{p_2}$, donde $p_1q_2/2p_2q_1 = l_0/k_0$ es una fracción irreducible.

7.240. $a = b$, $T = 1/|a|$.

7.243. No. **7.244.** $2|a - b|$. **7.245.** $4|a - c|$. **7.246.** 1) $2T$. 2) $2T$. 3) Si $ab \neq -1$, el período es igual a $2T$, si $ab = -1$, el período es un número cualquiera que no sea igual a cero. 4) $3T$. **7.247.** $2T$.

7.266. 1) $t = \pm 1$. 2) $t = 1$. 3) $t = \pi(4n + 1)/4$, $n \in \mathbb{Z}$. 4) $t = \pi(2n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$. **7.267.** 1) A. 2) B. **7.268.** 1) $x = 2y - \frac{y^2}{9}$. 2) $y = (x - 1)^{2/3}$. 3) $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$. 4) $y = 2(1 + x - x^2)/(1 + x^2)$. 5) $x = 3y - 4y^3$.

7.273. Convexa hacia las y negativas sobre $\mathbb{R}$. 2) Convexa hacia las y positivas sobre $(-\infty; 0]$, convexa hacia las y negativas sobre $[0; +\infty)$. 3) Convexa hacia las y positivas sobre $(-\infty; 0)$, convexa hacia las y negativas sobre $(0; +\infty)$. 4) Convexa hacia las y negativas sobre $(-\infty; -1)$, convexa hacia las y positivas sobre $(-1; +\infty)$. 5) Convexa hacia las y negativas sobre $\mathbb{R}$. 6) Convexa hacia las y positivas $(-\infty; 0]$, convexa hacia las y negativas sobre $[0; +\infty)$. 7) Convexa hacia las y positivas sobre $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$. 8) Convexa hacia las y negativas sobre $(0; 1]$, convexa hacia las y positivas sobre $[1; +\infty)$. **7.276.** 1) Convexa hacia las y positivas sobre $(-\pi/2; 0]$, convexa hacia las y negativas sobre $[0; \pi/2)$. 2) Convexa hacia las y positivas sobre $[0; \pi/4]$, $[3\pi/4; 5\pi/4]$, $[7\pi/4; 2\pi]$, convexa hacia las y negativas sobre $[\pi/4; 3\pi/4]$, $[5\pi/4; 7\pi/4]$. 3) Convexa hacia las y positivas sobre $[-1; 0]$, convexa sobre las y negativas sobre $[0; 1]$. 4) Convexa hacia las y positivas sobre $(-\infty; 0]$, convexa hacia las y negativas sobre $[0; +\infty)$.

7.284. 1) a. 2) b. 3) a, b. 4) a. **7.285.** $n \leqslant 4$. **7.286.** 1) 6. 2) 200. 3) 12. 4) 5. 5) $8k^2 - 4k + 1$. **7.287.** 1) $x_6 = 3$. 2) $x_3 = 1/6$. 3) $x_3 = 5/64$. 4) $x_3 = 9/8$. **7.288.** 1) $x_4 = -9$. 2) $x_2 = 4{,}5$. 3) $x_5 = \log_3^2 5 - 3\log_3 5$. 4) $x_3 = 1{,}4^3/3$.

7.289. 3) a) 6; b) 9; c) 5. **7.290.** 1) a) Sí; b) No. 2) a) Sí; b) No. 3) a) No; b) sí. **7.294.** 1) $x_n = 2 + 6n$. 2) $x_n = (-3)^n/6$. 3) $x_n = (n + 1)/n$. 4) $x_n = 2 + (-1)^n$. 5) $x_n = 3 + 2^n$. 6) $x_n = n!$. 7) $x_n = ((-1)^n - n)/n$. 8) $x_n = (1 - 10^{-n})/3$. 9) $x_n = n/2^n$.

7.295. $x_n = \frac{x_1}{2}(n-2)(n-3) - x_2(n-1)(n-3) + \frac{x_3}{2}(n-1)(n-2)$.

7.297. $x_n = a^n/n!$; si $0 < a < 2$, entonces máx $\{x_n\} = x_1$; si $a \geqslant 2$, entonces máx $\{x_n\} = x_{E(a)}$.

7.298. 1) $x_n = n\left(a + \frac{1}{2}(n-1)\right)$. 7.299. 1) $x_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} k!$. 2) $x_n = n!\left(a + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\right)$. 3) $x_n = n/(n+1)$. 4) $x_n = a\alpha^{n-1} + 2\beta\,\frac{2^{n-1} - \alpha^{n-1}}{2-\alpha}$. 5) $x_n = \frac{3\cdot 2^{n-1} - 2}{3\cdot 2^{n-1} - 1}$. 6) $x_n = 2 - 2^{2-n}$. 7) $x_n = ((a+b)\,2^{n-1} + (b-2a)\times(-1)^n)/3$.

7.300. $x_n = (a + b + (a-b)\cdot 3^{1-n})/2$; $y_n = (a + b - (a-b)\cdot 3^{1-n})/2$.

7.302. 1) Si $p + q \neq 1$, entonces $x_n = \frac{(\lambda_2(a+\alpha) - b - \alpha)\,\lambda_1^{n-1} - (\lambda_1(a+\alpha) - (b-\alpha))\,\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \alpha$ donde $\alpha = r/(p+q-1)$; si $p + q = 1$, entonces $x_n = a - \frac{r(n-1)}{p-2} + \left(b - a + \frac{r}{p-2}\right)\frac{(p-1)^{n-1} - 1}{p-2}$. 2) Si $p \neq 2$, entonces $x_n = (2\lambda_0(a+\alpha) - b - \alpha + n(b + \alpha - \lambda_0(a+\alpha)))\,\lambda_0^{n-2} - \alpha$, donde $\alpha = -4r/(p-2)^2$, si $p = 2$, entonces $x_n = a + (n-1)(b-a) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r$. 7.303. 1) $x_n = (6n - 1 - 8(-0{,}5)^n)/9$. 2) $x_n = (2^{n+1} - 2(-1)^n)/3 - 1$.

7.304. $x_n = \frac{(a-\lambda)(-\lambda^2)^{n-1} + \lambda(\lambda a + 1)}{\lambda a + 1 + \lambda(\lambda - a)(-\lambda^2)^{n-1}}$, donde $\lambda = (\sqrt{5} - 1)/2$.

7.305. $a \neq -2^k/(2^k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$; $x_n = a/((a+1)\,2^{n-1} - a)$. 7.306. 1) $x_n = 3a/(a - (a-3)\,4^{n-1})$. 2) $a = 3\cdot 4^k/(4^k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$. 7.307. 1) Si $b \neq 1$, $a \neq -(b-1)\,b^k/(b^k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $x_n = a(b-1)/((a+b-1)\,b^{n-1} - a)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; si $b = 1$, $a \neq -1/k$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $x_n = a/(1 + (n-1)a)$, $n \in \mathbb{N}$. 2) Si $b \neq c$, $ad \neq (c-b)\,c^k/(b^k - c^k)$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $x_n = a(b-c)\,b^{n-1}/(adb^{n-1} + (b - c - ad)\,c^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; si $b = c$, $ad \neq -b/k$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $x_n = ab/(b + (n-1)\,ad)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

7.319. 1) sup $\{x_n\} = 1$, inf $\{x_n\} = 1/2$. 2) sup $\{x_n\} = 1/2$, inf $\{x_n\} = 1/3$. 3) sup $\{x_n\} = 1$, inf $\{x_n\} = 1/2$. 4) sup $\{x_n\} = 2$, inf $\{x_n\} = 1/2$. 7.324. 1) $p \geqslant 2q$. 2) $p \geqslant 1{,}5q$. 3) $p \geqslant kq/(k-1)$. 7.326. 2) $(\ln 3)/3$. 7.337. 2) Cierto. 7.342. $E(q/(1-q)) + 1$. 7.343. 1) $ad > bc$. 2) $ad < bc$. 7.345. inf $\{x_n\} = 0{,}5$, sup $\{x_n\} = 1$. 7.356. 6.

Capítulo II
LIMITE Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

§ 8. Límite de una sucesión

8.1.

N	1	3	34	3334	$2\cdot 10^{9}$

8.2. 1) $E(1/\varepsilon)+1$. 2) $E(|a|/\varepsilon)+1$. 3) $E(1/\varepsilon)+1$. 4) $E(3/\varepsilon)+1$. 5) $E(2/\varepsilon)+1$. 6) $E(1/\varepsilon)+1$.

8.3. 1) a) $n \geqslant 33$. b) $n \geqslant 54$. c) $n < 21k+12$.

8.4. 1)

N	1	4	67	6667	$3\cdot 10^9$

.

8.7. 1)

N	1	2	101	10^4+1

.

8.9. 1)

N	1	2	50	5000

.

8.18. 1) 5. 2) 0,6. 3) 1/3. 4) —1. 5) 1. 6) 0. 7) 1. 8) —1/6. 9) —1. 10) 0. 11) 27. 12) —15/2. 13) 1/6. 14) —0,5.

8.19. 1) —1. 2) 1/2. 3) 3. 4) —1/2. **8.20.** 1) $d/2$. 2) $1/2d$. **8.22.** 1) 1/9. 2) 5/11. 3) 26/111. **8.24.** 1) 0. 2) 0. 3) 0. 4) 0. 5) 1. **8.25.** 1) 3. 2) 1/2. 3) 1/2. 4) 1. 5) 1. 6) 0. 7) 1/2. 8) —1. 9) 1. 10) 2/3. 11) 1/3. **8.27.** 1) 1. 2) 1. 3) 1. 4) —1/2. 5) 1. 6) 1. 7) 1. 8) 3. 9) 1/2. 10) 3. 11) 4. 12) 11. 13) 1. **8.28.** 1) 1. 2) 1. 3) 1. 4) 1. 5) 1. 6) 1. 7) 1. 8) 1/2. 9) 1. 10) 1. 11) 1. **8.30.** 1) 1/3. 2) 0. 3) 3. 4) 4/5. 5) 1. **8.32.** 1) 0. 2) 5. 3) 0. 4) 0. 5) 1/2. **8.34.** 1) 0. 2) 0. 3) 0. 4) 0. 5) 0. 6) 0. 7) 1.

8.45. 1) $\forall\varepsilon>0\,\exists N\,\forall n\geqslant N\ |x_n|>\varepsilon$. 2) $\forall\varepsilon>0\,\exists N\,\forall n\geqslant N\ x_n>\varepsilon$. 3) $\forall\varepsilon>0\,\exists N\,\forall n\geqslant N\ x_n<-\varepsilon$. **8.46.** 1) Cierto. 2) Incierto.

8.47. 1) $\exists\varepsilon>0\,\forall N\,\exists n\geqslant N\ |x_n|\leqslant\varepsilon$. 2) $\exists\varepsilon>0\,\forall N\,\exists n\geqslant N\ x_n\leqslant\varepsilon$. 3) $\exists\varepsilon>0\,\forall N\,\exists n\geqslant N\ x_n\geqslant-\varepsilon$. **8.53.** 1) 0. 2) $+\infty$. 3) $-\infty$. 4) 1, —1. 5) 0, $+\infty$. 6) $0,\ \pm\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$, ± 1. 7) 0, $\pm\infty$.

8.56. 1) $\pm 1/2$, ± 1; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=-1$. 2) ± 2; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=-2$. 3) 0, $+\infty$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=+\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=0$. 4) $[0;\,1]$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=0$.

8.57. 1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=1$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=0$; $\sup x_n=1{,}5$; $\inf x_n=-1$; 2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\sup x_n=3$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\inf x_n=-3$. 3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\sup x_n=+\infty$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\inf x_n=-\infty$. 4) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=1$; $\sup x_n=3/2$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\inf x_n=-\infty$. 5) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\sup x_n=+\infty$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=1$; $\inf x_n=0$.

8.65. 1) 0. 2) 0. 3) 0. **8.67.** 1) 4. 2) $\sqrt[k-1]{5}$. 3) $\sqrt[k-1]{a}$. 4) a) — —c) 1/3. 5) $(1+\sqrt{5})/2$. **8.69.** 1) e. 2) e. 3) e^{-1}. 4) e^2. 5) $\sqrt{e}$. 6) e^{-1}. **8.87.** 2) No puede ser. **8.89.** 1) Lo es. 2) No obligatoriamente.

8.91. 1) a), d) — ciertos, b), c), e) — inciertos. 2) $j=6, 8$. 3) K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_7. 4) K_1, K_2, K_4, K_7. 5) 1. 6) $K_2=K_5$. **8.95.** 1)—5) y 8)—10) 0. 6)—7) 1. **8.97.** 1) 0. 2) 1. **8.98.** $a/2$. **8.99.** 1) $+\infty$. 2) 2/3. 3) —1. 4) —1. 5) 19 800. 6) 1. 7) 1/5. 8) 2. 9) $pq\,(q-p)/2$.

8.100. 1) 0. 2) 1, si $|a| > 1$; 1/2, si $a = 1$; 0, si $|a| < 1$. 3) 0, si $|a| \neq 1$; 1/2, si $a = 1$; no existe con $a = -1$. 4) 1, si $|a| > 1$; 0, si $|a| = 1$; -1, si $|a| < 1$. **8.101.** $2\pi R^2$, $4R^2$. **8.102.** 1) 1/2. 2) $1/\sqrt{2}$. 3) 1/4. **8.103.** 1) $1/a_1 d$. 2) $1/\sqrt{d}$. **8.104.** $10a/81$. **8.105.** $\text{máx}\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. **8.106.** 1) 0. 2) 0. 3) 2. 4) 1/3. 5) $-1/4$. 6) 1/3. **8.107.** $a = 1$; $b/2$.

8.108. 1) $(a_1 + a_2)/2$. 2) $(a_1 + a_2 + a_3)/3$. 3) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)/p$. **8.110.** 1) -2. 2) 0. 3) 1/6. 4) 0. 5) $+\infty$. 6) $-\infty$. 7) 0. **8.111.** 1) 2. 2) 0. 3) -1. 4) 1/3. 5) 1/3. 6) 1/2. 7) 4/3. 8) $a^2 + a + 1/3$. **8.112.** 1/6. **8.113.** 1) 1/3. 2) 1/2. **8.114.** $k(k + 1)/2$. **8.115.** 0. **8.116.** 1) Incierto. 2) Cierto. **8.118.** 1) No se deduce. 2) No se deduce. **8.123.** 1) No es obligatorio. 3) Puede ser. **8.124.** 1) 3. 2) 1. 3) $\text{máx}\{a; b\}$. 4) 3/4. 5) 6. 6) -1. 7) m/k. **8.125.** 1) 1. 2) 1. 3) 1. **8.128.** $\text{máx}\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. **8.129.** 1) 1. 2) 1. 3) 1. 4) 1. 5) 1. 6) 1. 7) 2. 8) 1. 9) -8. 10) 1. 11) 4. **8.134.** 1) 0. 2) 0. **8.135.** $q/(1-q)^2$. **8.136.** 0. **8.141.** $\exists \varepsilon \forall N \exists n \geqslant N \mid x_n \mid \leqslant \varepsilon$. **8.143.** 1) $a < 5$. 2) $a > 5$. 3) $a = 5$. **8.144.** 1) $p \leqslant q$. 2) $p > q$. **8.147.** 1) $\alpha > 1$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/2$ con $\alpha = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ con $\alpha < 1$. **8.151.** 1) Incierto. 2) Incierto. 3) Incierto. **8.163.** No se deduce.

8.164. 1) $0, \pm 1$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, $\sup x_n = 1$, $\inf x_n = -1$. 2) ± 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, $\sup x_n = 3/2$, $\inf x_n = -1$. 3) $-\infty$; 0; 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\sup x_n = 1$, $\inf n_x = -\infty$. 4) $0, \pm\sqrt{3}/2$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}/2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\sqrt{3}/2$, $\sup x_n = (2 + \sqrt{3})/2$, $\inf x_n = -\sqrt{3}/2$. 5) 0, 2; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\sup x_n = 2$, $\inf x_n = 0$. 6) 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\sup x_n = \sqrt{6}$, $\inf x_n = 1$. 7) $0, +\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\sup x_n = +\infty$, $\inf x_n = 0$. 8) 0, 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $\sup x_n = 1$, $\inf x_n = 0$.

8.165. 1) $[0; 1]$. 2) $[0; +\infty)$ y $+\infty$.

8.166. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

8.168. Lo es. **8.178.** 2) No puede ser. **8.179.** $M \in [AC]$ y $N \in [AC]$, donde $AM = \frac{1}{3}AC$, $AN = \frac{2}{3}AC$. **8.206.** 1) 0. 2) 0. 3) 0. 4) 0. 5) 0, si $\alpha > 1$; $+\infty$; si $\alpha \leqslant 1$. 6) $+\infty$, si $a > 1$; $-\infty$, si $0 < a < 1$.

8.210. No es obligatorio. **8.212.** 1) 1. 2) 1. 3) e^2. 4) $1/e$. 5) $1/e^2$. **8.214.** 1) $+\infty$, si $a > 1$; $-\infty$, si $a < 1$. 2) 1. **8.220.** 1) e^2. 2) e^{-1}. **8.228.** 1) $d/(1-q)$.

8.229. 1) $d/(1-q)$, si $|q| < 1$ o bien $q = -1$; ∞, si $|q| > 1$. 2) $a - \frac{d}{1-q}$, si $|q| < 1$; ∞, si $|q| \geqslant 1$. **8.230.** $(\pi - \alpha)/3$. **8.231.** $\pi/3$. **8.232.** a) y b) $a/3$. **8.233.** $(1 + \sqrt{1+4a})/2$. **8.234.** 1) Converge. 2) Diverge. **8.235.** $q \in [0; 1/4]$. **8.236.** $\sqrt{a}$. **8.237.** 5. **8.239.** 1) $(\sqrt{5}-1)/2$. 2) $(\sqrt{5} - 1)/2$. **8.240.** 1) — 4) Converge. **8.241.** $(b + \sqrt{b^2 + 4a})/2$. **8.242.** $1 - \sqrt{1-a}$ con $-3 \leqslant a \leqslant 1$; 4 con $a = -8$. **8.243.** 1) b) Converge con $x_1 = 0$, $x_1 \in [1; 2]$; diverge con $x_1 < 0$, $x_1 > 2$. **8.244.** 2) $\sqrt{ab}$.

8.245. 1) Converge con $a = b$; diverge con $a \neq b$. 2) Converge con $a = b$; diverge con $a \neq b$. 3) Converge con $a = b = 0$; diverge con $a \neq 0$ ó bien $b \neq 0$. 4) Converge con $a = b = 0$; diverge con $a \neq 0$ ó bien $b \neq 0$.

8.246. 1) 0. 2) 0. **8.247.** 1) 3. 2) 2. 3) 4. **8.248.** 1) —3) 0. **8.250.** 1) -1. 2) $+\infty$. 3) -1. 4) $+\infty$. **8.251.** 1. **8.252.** 1) —3) 1/2. **8.254.** 1) Converge hacia $-1/2$. 2) Converge hacia -2. **8.255.** Converge hacia p si $0 \leqslant p - a \leqslant 1$. **8.256.** 0 con $a = 0$ ó bien $|b| < |c|$; $(b - c)/d$ con $|b| > |c|$. **8.257.** $(1 + \sqrt{1 + 4b})/2$ con $a \neq (1 - \sqrt{1 + 4b})/2$ y $a \neq 0$; a con $a = (1 - \sqrt{1 + 4b})/2$. **8.258.** $+\infty$ con $a \geqslant 1$; $\sqrt{b/(1 - a)}$ con $0 < a < 1$. **8.259.** 0. **8.260.** $x_2 = a(5 - \sqrt{41})/4$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. **8.263.** 0. **8.269.** 1) $1/e$. 2) 0. 3) $4/e$. 4) 0. 5) $+\infty$. **8.272.** 1) $1/(p + 1)$. 2) 1/2. **8.291.** 1) 1. 2) 0 con $\alpha > -1$; ∞ con $\alpha < -1$; no existe con $\alpha = -1$. **8.293.** $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = M$, donde $AM = \frac{2}{3} AC$. **8.296.** 1) ∞ con $\alpha \leqslant 1$; 0 con $\alpha > 1$. 2) 0. 3) $\sqrt{ab}$.

§ 9. Límite de una función

9.1. 1) $\delta \leqslant \sqrt{4{,}001} - 2 \approx 0{,}00025$. 2) $\delta \leqslant 4/51$. 3) $\delta \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} 0{,}99 \approx 0{,}14$. 4) δ no existe. **9.2.** 1) $\delta \leqslant 0{,}99$. 2) $\delta \leqslant 0{,}90$. 3) $\delta \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt[10]{10}} \approx 0.21$. 4) $\delta \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt[100]{10}} \approx 0{,}023$. **9.3.** $\delta \leqslant \varepsilon/3$. **9.4.** $\delta \leqslant \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$. **9.5.** Si $\varepsilon > 1$, entonces δ — cualquier número; si $\varepsilon \leqslant 1$, entonces $\delta \geqslant \sqrt{(1 - \varepsilon)/\varepsilon}$. **9.6.** Si $\varepsilon \geqslant \pi$, entonces δ — cualquier número; si $\varepsilon < \pi$, entonces $\delta \leqslant -\operatorname{ctg} \varepsilon$; $\lim\limits_{n \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$. **9.9.** No se deduce.

9.17. 1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\, (-\delta < x < 0 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$. 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\, (|x| > \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon)$. 3) $\forall \varepsilon \exists \delta > 0\ \forall x\, (1 < x < 1 + \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon)$. 4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \forall x\, (x < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon)$.

9.18. 1) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\, (-\delta < x < 0 \wedge |f(x)| \geqslant \varepsilon)$. 2) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\, (|x| > \delta \wedge |f(x) - 4| \geqslant \varepsilon)$. 3) $\exists \varepsilon \forall \delta > 0\ \exists x\, (1 < x < 1 + \delta \wedge f(x) \geqslant \varepsilon)$. 4) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta \exists x\, (x < \delta \wedge f(x) \leqslant \varepsilon)$.

9.19. 1) $\exists a \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\, (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$. 2) $\forall a \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\, (0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - a| \geqslant \varepsilon)$.

9.20. 1) 7/3. 2) 3. 3) 1. 4) ∞. **9.21.** 1) 2. 2) 17/5. 3) 2. 4) 1/3. 5) —050. 6) 64/105. 7) 1. 8) $-1/2$. 9) 1. **9.22.** 1) 3. 2) 49/16. 3) 8. 4) 0. 5) 3. 6) 59/4. **9.23.** 0, si $n < k$; a_0/b_0, si $n = k$; ∞, si $n > k$. **9.24.** 1) n/k. 2) $(n^2 - 2k + n)/2$. 3) C_n^k. 4) $(n - k)/2$. **9.25.** 1) 1/4. 2) 3. 3) 5/3. 4) 3/4. 5) 3. 6) $\sqrt{7}/4$. 7) 2. 8) 4/7. **9.26.** 1) 7. 2) 5. 3) $\sqrt{5}$. 4) 3. 5) -2. 6) 7/12. **9.27.** 1) 0. 2) 2. 3) 13/4. 4) 2. 5) 1/2. 6) $\sqrt{2}/8$. **9.28.** 1) k/n. 2) $2\sqrt[n]{a}/na$. 3) $(ak - bn)/nk$. 4) $nk/(ka + nb)$. 5) $2n$. 6) $(n + 1)/2$. **9.29.** 1) 3. 2) 4. 3) 1/5. 4) α/β. 5) -1. 6) 1/2. 7) $-9/128$. 8) $3\sqrt{3}$. 9) $\operatorname{tg}^4 1 - 1 = -(\cos 2)/\cos^4 1$. **9.30.** 1) $-7/2$. 2) $1/2\pi$. 3) π. 4) 4. 5) 4. 6) 1. 7) 2. 8) 14. **9.31.** 1) $4\sqrt{2}$. 2) 13/6. 3) 1/3. 4) 3/2. 5) 1/24. 6) 0. **9.32.** 1) 2. 2) 10/37. 3) 2. 4) $-2/21$. **9.33.** 1) 0. 2) 0. 3) No existe. 4) $1/e$. **9.34.** 1) $1/(10 \ln 10)$. 2) -7. 3) $5/\ln 2$. 4) $-2/3$. 5) 8. 6) 25/16. 7) 1. 8) $-\pi^2/2$.

9.35. 1) $(\ln 10)/\ln 2$. 2) $\ln 3$. 3) $\ln 4$. 4) 5. 5) 2. 6) 2. 7) 3/2. **9.36.** 1) e^8. 2) $1/\sqrt{e}$. 3) e^3. 4) e. 5) $\sqrt{e}$. 6) $1/\sqrt{e}$. 7) e^{-10}. 8) $e^{1/e}$. 9) e/π. 10) $\sqrt{e}$. **9.37.** 1) 1. 2) -4. 3) 25/2. 4) 2. 5) $\ln 2$. 6) $e^{3/2}$. **9.38.** 1) $a^{a^a} \ln a$. 2) $\ln (a/b)$. 3) $\sqrt{ab}$. 4) $a^{a/(a+b)} b^{b/(a+b)}$. **9.39.** 1) a) 1; b) 0. 2) a) No existe; b) π. 3) a) 0; b) 0. 4) a) 0; b) $+\infty$. **9.40.** 1) a) 3/2; b) 1/4. 2) a) 1; b) -1. 3) a) $\pi/2$; b) $-\pi/2$. 4) a) 0; b) 1/3. **9.41.** 1) a) 1; b) $+\infty$. 2) a) 109; b) 110. 3) a) 0; b) 1. 4) a) 3; b) 2. **9.42.** 1) a) $-\pi/2$; b) $\pi/2$. 2) a) π; b) 0. 3) a) 0; b) $+\infty$. 4) a) $-\pi/2$; b) No existe. 5) a) $+\infty$; b) 0. 6) a) $1/e$; b) e. 7) a) -4; b) 4. 8) a) 0; b) $\ln 4$. **9.43.** 1) -2. 2) $-1/2$. 3) 7/4. 4) $-\pi/6$. 5) 1/2. 6) 0. 7) 3. 8) 2. 9) $\sqrt{2}$. 10) $1/\sqrt{2\pi}$. **9.44.** 1); 2) a); 3); 4) a); 5). **9.45.** 1); 2) b); 3); 4) b); 5) b); 6) b). **9.46.** 1) $\alpha = 1$, $\beta = -3$. 2) a) $\alpha = 2$, $\beta = 1/4$, b) $\alpha = -2$, $\beta = -1/4$. 3) $\alpha = -1$, $\beta = 1/3$. 4) a) $\alpha = 1$, $\beta = 0$; b) $\alpha = \beta = 0$. 5) a) $\alpha = 1$, $\beta = 5$; b) $\alpha = \beta = 0$. 6) a) $\alpha = 3$, $\beta = 0$; b) $\alpha = \beta = 0$. 7) a) $\alpha = \pi/2$, $\beta = -1$; b) $\alpha = -\pi/2$, $\beta = -1$. **9.47.** 1) $\alpha > 0$, β — cualquier; $\alpha \leqslant 0$, $\beta < 0$, $\alpha > \beta$. 2) $\alpha > \beta$. 3) $\alpha > 0$, β — cualquiera; $\alpha \leqslant 0$, $\beta < 0$, $\alpha > \beta$. 4) $\alpha + \beta > 0$. **9.48.** 1) $n = 4$. 2) $n = 2$. 3) $n = 4$. 4) $n = 3$. 5) $n = 2$, 6) $n = 2$. **9.49.** 1) $n = 3$. 2) $n = 2$. 3) $n = 2$. 4) $n = 1$. 5) $n = 6$. 6) $n = 3$. **9.50.** 1) a); 2) b); 3) a); 4) b). **9.52.** 1) b); 2) a); 2) b); 3); 4) a); 5). **9.53.** 1), 2), 3), 5), 6). **9.57.** 1) a) $\alpha = 1$, $\beta = 1/8$; b) $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = 1/2$. 2) $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$. 3) $\alpha = 9/4$, $\beta = 4$. 4) $\alpha = 7$, $\beta = 2$. 5) $\alpha = 1/8$, $\beta = -4$. 6) $\alpha = 1$, $\beta = -1$. **9.58.** 1) $-1/4$. 2) $-1/2$. 3) -2. 4) 2. 5) 7/3. 6) 12. **9.60.** 0. **9.61.** No se deduce. Con $t \to 0$ analicen la función $f(g(x))$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{con } x = p/q, \text{ donde } p \text{ y } q \text{ son números primos entre sí}, \\ 0 & \text{con } x \text{ irracional}, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{con } x \neq 0, \\ 0 & \text{con } x = 0. \end{cases}$$

9.64. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **9.65.** 1) e; $1/e$. 2) $+\infty$; 0. 3) π; 0. 4) $+\infty$; $-1/2$. **9.66.** 1) π; $-\pi/2$. 2) 3; -3. 3) 1; -1. 4) e; 2.

§ 10. Continuidad de una función

10.1. 1)

Δy	1,8	1	0,2	0,02
Δy	$-1,8$	-1	$-0,2$	$-0,02$

2)

Δy	2,61	1,25	0,21	0,0201
Δy	$-0,99$	$-0,75$	$-0,19$	$-0,0199$

3)

Δy *)	0,3784	0,2247	0,0488	0,0050
Δy	$-0,6838$	$-0,2929$	$-0,0513$	$-0,0050$

4)

Δy *)	$-0,4737$	$-0,(3)$	$-0,(09)$	$-0,(0099)$
Δy	9	1	$0,(1)$	$0,(01)$

10.2. 1)

δ	1	0,25	0,005	0,0005

.

2)

δ	0,732	0,224	0,0049	$49\cdot 10^{-5}$

.

3)

δ	1	0,75	0,0199	$1,999\cdot 10^{-3}$

.

4)

δ	2/3	1/3	1/101	1/1001

.

10.3. 1)

$\delta_{\text{máx}}$	0,25	0,25	0,25	0,25

.

2)

$\delta_{\text{máx}}$	1/2	1/4	1/6	1/8	1/21

.

3)

$\delta_{\text{máx}}$	1/210	1/36	1/3	1	32/5

.

4)

$\delta_{\text{máx}}$	1/4	1/2	3/4	11/36	3/4	7/4

.

10.4. 1) $\delta(x_0) = x_0^2/(2+x_0)$. 2) $\delta(x_0) = \sqrt{x_0} + \frac{1}{4}$ con $0 < x_0 < 1/4$, $\delta(x_0) = \sqrt{x_0} - 1/4$ con $x_0 \geqslant 1/4$. **10.11.** 1) $f(-1) = -2$. 2) $f(1) = 3/2$.

*) Se indican los valores aproximados de Δy con error no más de $5\cdot 10^{-4}$.

3) $f(0) = 1/2$. 4) $f(0) = 1$. 5) $f(0) = 1$. 6) $f(0) = 1/2$. **10.15.** $f(x_0) = 0$. **10.18.** 1) $x = 0$, $\Delta f(0) = 2$; $x = 2$; $\Delta f(2) = -10$. 2) $x = -2$, $\Delta f(-2) = 2$. 3) $x = -2$, $x = 2$ — punto de discontinuidad de II género; 4) $x = 0$ — punto de discontinuidad de II género; $x = 1$, $\Delta f(1) = -2$. 5) $x_n = n$, $\Delta f(n) = -1$, $n \in Z$. 6) $x_n = n$, $n \in Z$,— puntos de discontinuidad de II género. 7) $x = 0$, $\Delta f(0) = 0$; $x = 1$ — punto de discontinuidad de II género. 8) $x = -1$, $\Delta f(-1) = 0$; $x = 1$, $\Delta f(1) = -2$; $x = 0$ — punto de discontinuidad de II género. 9) $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,— puntos de discontinuidad de II géénero. 10) $x = 0$, $\Delta f(0) = 0$, $x_n = \pi n$, $n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$,— puntos de discontinuidad de II género. **10.19.** 1) $a = 0$. 2) $a = 1/3$. 3) No existe. 4) $a = -1$. **10.20.** 1) $a = 2$, $b = -1$. 2) $a = 1$, $b = -1$. 3) No existen. 4) $a = 1$, $b = \pi/2$. **10.25.** 1) $f \circ g$ continua; $g \circ f$ discontinua en el punto $x = 0$. 2) $f \circ g$ discontinua en el punto $x = 0$, $x = \pm 1$; $g \circ f$ continua. 3) $f \circ g$ discontinua en el punto $x = -1$; $g \circ f$ discontinua en el punto $x = 1$. 4) $f \circ g$ y $g \circ f$ continuas. **10.51.** 1) $y = \cos^2 x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$. 2) $x = \sqrt{1 + y^2}$, $y \in \mathbb{R}$. 3) $y = -\ln(1 - e^{-x})$, $x > 0$ ó bien $x = -\ln(1 - e^{-y})$, $y > 0$. **10.52.** $x_1(y) = -x_2(y) = \sqrt{y^2 + 1}$, $y \in R$, $y_1(x) = -y_2(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $|x| \geqslant 1$, $y_3(x) = -y_4(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{sign}\,x$, $|x| \geqslant 1$. **10.53.** 1) —5) no habrá. **10.56.** 1) $\{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}$, $x = 0$ es el punto de discontinuidad de I género. 2) $\{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0,\ x \neq 2\}$, $x = 0$, $x = 2$ son los puntos de discontinuidad de I género. 3) $\{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}$, $x = 0$ es el punto de discontinuidad de II género. 4) $\{x \in \mathbb{R};\ x \neq -1,\ x \neq 1\}$, $x = -1$ es el punto de discontinuidad de I género; $x = 1$ es el punto de discontinuidad de II género. 5) $\{x \in [-1; 4]:\ x \neq 1\}$, $x = 1$ es el punto de discontinuidad de I género. 6) $\{x \in [-\pi/2; \pi]:\ x \neq \pi/4\}$, $x = \pi/4$ es el punto de discontinuidad de I género. **10.57.** 1) $x = -3$, $x = 2$ son los puntos de discontinuidad de II género. 2) $x = -1$, $x = 0$, $x = 4$ son los puntos de discontinuidad de II género. 3) No hay puntos de discontinuidad. 4) $x = 1$ es el punto de discontinuidad evitable; $f(-1) = 1/3$. 5) $x = -1$ es el punto de discontinuidad de II género, $x = 0$, $x = 1$ son puntos de discontinuidad evitable; $f(0) = -1$, $f(1) = 0$. 6) $x = -2$ es el punto de discontinuidad de II género; $x = 1/2$ es el punto de discontinuidad evitable; $f(1/2) = 2/5$. 7) $x = 1$ es el punto de discontinuidad evitable; $f(1) = -1/4$. **10.58.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, es el punto de discontinuidad de II género. 2) $x = 0$ es el punto de discontinuidad evitable; $f(0) = 0$. 3) $x = 0$ es el punto de discontinuidad evitable; $f(0) = 1/2$. 4) $x = 0$ es el punto de discontinuidad de II género; $x = 1$ es el punto de discontinuidad evitable; $f(1) = -\pi/2$. 5) $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ son los puntos de discontinuidad de II género; $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ son los puntos de discontinuidad evitable; $f(\pi n) = (-1)^n 3/2$. **10.59.** 1) $x = 0$ es el punto de discontinuidad de II género; 2) $x = 1$ es el punto de discontinuidad de II género. 3) No hay puntos de discontinuidad. 4) $x = 1$ es el punto de discontinuidad de II género. 5) $x = 0$ es el punto de discontinuidad de II género. 6) $x = 0$, $x = 2$ son los puntos de discontinuidad de II género; $x = 1$ es el punto de discontinuidad evitable; $f(1) = 0$. 7) $x = -1$, $x = 1$ son puntos de discontinuidad de II género. 8) $x = 0$ es el punto de discontinuidad evitable; $f(0) = 0$. 9) $x = 0$ es el punto de discontinuidad de II género. **10.60.** 1) $x = -1$, $x = 3$ son los puntos de discontinuidad de I género; $\Delta f(-1) = -2$, $\Delta f(3) = 2$. 2) $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ son los puntos de discontinuidad de I género; $\Delta f(x_n) = 2(-1)^{n+1}$. 3) $x_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$ son los puntos de discontinuidad de I género; $\Delta f(x_n) = 2(-1)^n$. 4) $x = 0$ es el punto discontinuidad de II género; $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{Z}$ son los puntos de discontinuidad de I género; $\Delta f(x_n) = 2(-1)^{n-1}$. 5) No hay puntos de discontinuidad. 6) $x = 0$ es el punto de discontinuidad de I género; $\Delta f(0) = \pi$. 7) $x = 0$ es el punto de discontinuidad de I género; $\Delta f(0) = 0$.

8) $x = 0$ es el punto de discontinuidad de I género; $\Delta f(0) = 4/\pi$. 9) $x = 0$ es el punto de discontinuidad de I género; $\Delta f(0) = 2$. 10) $x = 1$ es el punto de discontinuidad de I género; $\Delta f(1) = -1$. 11) $x = 0$ es el punto de discontinuidad de I género; $\Delta f(0) = 2$. 12) $x = 0$ es el punto de discontinuidad de I género; $\Delta f(0) = 0$. **10.62.** 1) $a = n$. 2) $a = 1/2$. 3) $a = -2$. 4) $a = 1$. 5) $a = \ln c$. 6) $a = 1/2$. 7) $a = 1$. 8) $a = 0$. 9) $a = 0$. 10) $a = e$. **10.63.** 1) No se puede. 2) No se puede. 3) $y(0) = 0$. 4) $y(1) = 1/4$. 5) No se puede. **10.64.** 1) El campo de definición $\mathbb{R}$; es continuo sobre $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ y $(1; +\infty)$; $x = -1$, $x = 1$ son los puntos de discontinuidad de I género. 2) El campo de definición $x \neq 1$; es continuo sobre $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ y $(1; +\infty)$; $x = -1$, $x = 1$ son los puntos de discontinuidad de I género. 3) El campo de definición $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, es periódico con período 2π, continuo sobre $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$ y $(\pi + 2\pi n; 2\pi(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, son los puntos de discontinuidad de I género. 4) El campo de definición R; es continuo sobre $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$ y $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ son los puntos de discontinuidad de I género. 5) El campo de definición $\mathbb{R}$; es continuo sobre $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$; $x = 0$ es el punto de discontinuidad de I género. 6) El campo de definición $\mathbb{R}$; es continuo sobre $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$; $x = 0$ es el punto de discontinuidad de II género. 7) El campo de definición $\mathbb{R}$; es continuo sobre $\mathbb{R}$. 8) El campo de definición $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, es continuo sobre $(\pi n; \pi/2 + \pi n)$; $x = 0$ es el punto de discontinuidad evitable, $x = \pi n/2$, $n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, son los puntos de discontinuidad de I género. 9) El campo de definición $\mathbb{R}$; es continuo sobre $\mathbb{R}$. 10) El campo de definición $\mathbb{R}$; es continuo sobre $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$; $x = 0$ es el punto de discontinuidad de I género. **10.65.** $x = -1$, $x = 1$. **10.67.** Es continua en cada punto irracional, cada punto racional es el punto de discontinuidad evitable. **10.68.** $f \circ g$ es continua sobre $\mathbb{R}$; $g \circ f$ es continua en el punto $x = 1$; discontinua en el resto de los puntos. **10.99.** 0,2. **10.109.** 3) 8. 4) 2^n. **10.111.** 1) $f(x) = x$. 2) $f(x) = x/4$. 3) Si $\beta \neq -\alpha$, entonces

$$f(x) = \frac{a}{\alpha + \beta} x + \frac{b}{2},$$

si $\beta = -\alpha$, la solución sólo existe con $a = 0$ y

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{b}{2},$$

donde $\varphi(x)$ es una función arbitraria continua e impar. 4) $f(x) = x + C$, $C \in \mathbb{R}$. 5) $f(x) = x$. 6) $f(x) = x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

10.112. $f(x) = \frac{a}{A\alpha + B\beta} x + \frac{b}{A + B} + \varphi(x)$, donde: si $|\alpha/\beta| = 1$ ó bien $|\alpha/\beta| < 1$ y $|B/A| \geqslant 1$, entonces

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

si $|\alpha/\beta| < 1$ y $|B/A| < 1$, entonces

$$\varphi(x) = x^q \psi_+(\ln x), \quad x > 0,$$
$$\varphi(x) = |x|^q \psi_-(\ln |x|), \quad x < 0,$$
$$\varphi(0) = 0,$$

donde $q = \log_{|\alpha/\beta|} |B/A|$ y, si $\alpha/\beta > 0$, $\psi_{\pm}(t)$ son funciones arbitrarias continuas sobre R que satisfacen la condición

$$\psi_{\pm}(t) = -\psi_{\pm}(t + \ln(\beta/\alpha)) \operatorname{sign} AB, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(la periodicidad con $AB < 0$, la antiperiodicidad con $AB > 0$), mientras que si $\alpha/\beta < 0$, $\psi_{+}(t)$ es una función arbitraria continua sobre $\mathbb{R}$, periódica con período $2\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$,

$$\psi_{-}(t) = -\psi_{+}\left(t + \ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\right) \operatorname{sign}(AB).$$

con $|\alpha/\beta| > 1$ en la solución aducida deben cambiarse de lugar α y β, A y B.

10.113. 1) $a > 1/4$. 2) $a > 1/4$. **10.114.** Si $a \neq 0$, entonces $(b-1)^2 < 4ac$; si $a = 0$, entonces $b = 1$. **10.115.** 1) $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. **10.116.** $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$, y $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. **10.117.** 1) $f(x) = a \ln x$. 2) $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, y $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. **10.118.** 1) $f(x) = \cos ax$, $a \in \mathbb{R}$, y $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. 2) $f(x) = \operatorname{ch} ax$, $a \in \mathbb{R}$. **10.119.** $f(x) = \text{const}$, $x \in \mathbb{R}$. **10.137.** $x = f(f(x))$. **10.139.** $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = -1$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1$. **10.143.** 3) π. **10.144.** 1) 0. 2) $\pi/6$. 3) $\pi/3$. 4) 0. 5) 1. 6) 1. **10.146.** 0, si $a_1 < a_2$; $e^{(b_1-b_2)a_1}$, si $a_1 = a_2$; $+\infty$, si $a_1 > a_2$. **10.147.** 1) e^x. 2) $e^{\lambda x}$. 3) $\sqrt{ab}$. 4) $e^{k(k+1)a/2}$. 5) $\sqrt{e}$. 9) $(\operatorname{sen} x)/x$ con $x \neq 0$; 1 con $x = 0$. 7) 1. 8) 0. 9) 0. 10) $e^{-x^2/2}$. **10.148.** $\sqrt{2}$.

§ 11. Asíntotas y gráficos de las funciones

11.1. 1) $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$. 2) $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, $y = 0$. 3) $x = -2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $x = 2$, $y = 0$. 4) $y = 0$. 5) $y = 1$. 6) $x = -2$, $y = 1$. 7) $y = 0$. 8) $y = 0$. **11.2.** 1) $x = 0$, $y = x$. 2) $y = x + 1$. 3) $x = 0$, $y = x + 8$. 4) $x = -4$, $y = x - 4$. 5) $y = -x - 1$, $y = x - 1$. 6) $x = 0$, $y = 2x + 1$. 7) $x = -1$, $y = x - 2$, 8) $x = -2$, $y = x - 4$. 9) $x = b$, $x = 2b$, $y = x - 3(a - b)$. 10) $y = x$. **11.3.** 1) $y = -x$, $y = x$, 2) $y = -x - 3/2$; $y = x + 3/2$. 3) $y = x$. 4) $y = x + 1/3$. 5) $x = 2$, $y = -x - 1$, $y = x + 1$. 6) $x = -4$, $y = x - 2$. 7) $y = x$. 8) $y = -2x$, $y = 0$. 9) $y = -x$, $y = 3x$. **11.4.** 1) $x = 0$, $y = 1$. 2) $y = 0$. 3) $y = 1$. 4) $x = 0$, $y = 0$. 5) $y = 0$. 6) $x = 0$, $y = 1 - x$. 7) $y = 1 - x$, $y = 3 - x$. 8) $x = 0$, $y = 3 + x$. 9) $x = 0$, $y = x$. 10) $y = 1$. 11) $x = 0$, $y = -x - 1$, $y = x + 1$. **11.5.** 1) $y = e$. 2) $y = \frac{x}{e} - \frac{1}{2e}$. 3) $y = -1$, $y = 1$. 4) $x = 0$, $y = -1$, $y = 1$. 5) $y = 1$. 6) $y = -x$, $y = x$. 7) $x = 0$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$. 8) $y = -x$, $y = x$. **11.6.** 1) $x = -2$, $x = 2$. 2) $x = 1/2$, $x = 1$. 3) $x = \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. 4) $x = 0$, $y = x$. 5) $y = 0$, $y = x$. 6) $x = -1/e$, $y = x \log e + (\log e)/e$. **11.7.** 1) $x = (3n + 2)\pi/3$, $n \in \mathbb{Z}$. 2) $x = \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. 3) $x = 0$, $y = 0$. 4) $y = x$. 5) $y = 1$. 6) $y = 3$. 7) $y = \pi$, $y = 0$. 8) $y = 0$. 9) $y = 0$. 10) $y = (x + \pi)/2$. 11) $y = (4x + \pi)/2$, $y = (4x - \pi)/2$. 12) $y = \pi x + 1$, $y = 1$. 13) $y = -(\pi x + 2)/2$, $y = (\pi x - 2)/2$. 14) $x = 0$, $y = 2/\pi$. **11.8.** 1) $y = -1$, $y = x - 1$. 2) $y = x/2$. 3) $y = (1 - x)/2$. 4) $x = -1$, $x = 1$. 5) $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$. 6) $y = (2x + \pi)/4$, $y = (2x - \pi)/4$.

11.10. No puede. **11.11.** 1) El campo de definición $0 \leqslant x < 1$; $y \sim x^{3/2}$ con $x \to +0$, $y \sim 1/\sqrt{1 - x}$ con $x \to 1 - 0$; $x = 1$ es la asíntota. 2) El campo de definición $|x| \leqslant 2$; el origen de coordenadas es el centro de simetría del gráfico, $y \sim 2x$ con $x \to 0$, $y \sim 4\sqrt{2 - x}$ con $x \to 2 - 0$; el máximo $y = y(\sqrt{2}) = 2$. 3) El campo de definición $|x| \leqslant 1$; el eje de ordenadas es

el de simetría del gráfico, $y \sim x$ con $x \to +0$, $y \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}$ con $x \to 1-0$; el máximo $y = y(1/\sqrt{2}) = 1/2$. 4) El campo de definición $|x| \leqslant 3$; el eje de ordenadas es el de simetría del gráfico, $y \sim \sqrt{3x}$ con $x \to +0$, $y \sim \sqrt[4]{54}\sqrt[4]{3-x}$ con $x \to 3-0$; el máximo $y = y(3/\sqrt{2}) = 3/\sqrt{2}$. 5) El eje de ordenadas es el de simetría del gráfico, $y \sim x^{2/3}$ con $x \to 0$; $y = 1$ es la asíntota con $x \to \pm\infty$. 6) El eje de ordenadas es el de simetría del gráfico, $y \sim x/\sqrt[4]{3}$ con $x \to +0$; $y = 1$ es la asíntota con $x \to \pm\infty$. 7) El campo de definición $|x| > 1$; el origen de coordenadas es el centro de simetría del gráfico, $y \sim 1/(\sqrt{2}\sqrt{x-1})$ con $x \to 1+0$; $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$ son las asíntotas del gráfico. 8) El campo de definición $x < 0$, $x \geqslant 1$, $y \sim 1/\sqrt{-x}$ con $x \to -0$, $y \sim \sqrt{x-1}$ con $x \to 1+0$; $x = 0$ e $y = 1$ con las asíntotas. 9) El campo de definición $x \geqslant 0$; $y \sim -4\sqrt{x}$ con $x \to +0$, $y \sim x^{3/2}$ con $x \to +\infty$, $y \sim 2(x-4)$ con $x \to 4$; el mínimo $y = -16/(3\sqrt{3})$ con $x = 4/3$ (durante el análisis puede sustituirse $x = \frac{16}{3}\cos^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$). **11.15.** 1) $g(x)$. 2) $f(x)$. 3) $g(x)$. 4) $f(x)$ y $g(x)$. **11.16.** $y = (a_{n+1}x + a_n b_n - a_{n+1}b_{n-1})\, b_n$. **11.17.** $y = 0$ con $k < l$, $y = 1$ con $k = l$, $y = x + (a_1 - b_1)/n$ con $k = 1 + n$. **11.18.** 1) Superiormente con $x \to +\infty$, inferiormente con $x \to -\infty$. 2) Superiormente con $x \to +\infty$ y con $x \to -\infty$. 3) Superiormente con $x \to +\infty$, inferiormente con $x \to -\infty$. 4) Superiormente con $x \to +\infty$ y con $x \to -\infty$. 5) Superiormente con $x \to +\infty$, inferiormente con $x \to -\infty$. 6) Inferiormente con $x \to +\infty$, superiormente con $x \to -\infty$. **11.19.** 1) Las asíntotas $x = \pm 1/2$, $y = 1$; el campo de definición $x \neq \pm 1/2$; el eje de simetría es el de ordenadas; la función crece sobre $[0; 1/2]$ y $(1/2; +\infty)$; $y \sim 4x^2 + 2$ con $x \to 0$, $y \sim 1/(2(1-2x))$ con $x \to 1/2$. 2) Las asíntotas $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$; el campo de definición $x \neq 0$, $x \neq 2$; $(1; 0)$ es el centro de simetría, la función decrece sobre $[1; 2)$, $(2; +\infty)$; $y \sim 1 - x$ con $x \to 1$, $y \sim 1/(2(x-2))$ con $x \to 2$, $y \sim 1/2x$ con $x \to 0$. 3) Las asíntotas $x = 1$, $y = -1$; el campo de definición $x \neq 1$; la función crece sobre $(-\infty; 1)$ y $(1; +\infty)$; $y \sim x^3$ con $x \to 0$, $y \sim 1/(3(1-x))$ con $x \to 1$. 4) Las asíntotas $x = 1$, $y = (x-5)/4$; el campo de definición $x \neq 1$; $(1; -1)$ es el centro de simetría; la función decrece sobre $(1; 3]$, crece sobre $[3; +\infty)$; $y \sim 1/(x-1)$ con $x \to 1$, $y \sim (x-3)^2/8$ con $x \to 3$, $y \sim -2 - (x+1)^2/8$ con $x \to -1$. 5) La asíntota $y = x$; $(0; 0)$ es el centro de simetría, la función crece sobre R, $y \sim x^3$ con $x \to 0$. 6) Las asíntotas $x = 2$, $y = 1$; el campo de definición $x \neq 2$; la función decrece sobre $(-\infty; -2)$ y $(-2; +\infty)$; $y \sim -\sqrt[3]{x/2}$ con $x \to 0$, $y \sim \sqrt[3]{2/(x-2)}$ con $x \to 2$. 7) La asíntota $y = -x$; el eje de simetría es la recta $y = x$; la función decrece sobre R; $y \sim 1 - x^3/3$ con $x \to 0$, $y \sim \sqrt[3]{3(1-x)}$ con $x \to 1$. 8) Las asíntotas $x = 1$, $x = -1$; $y = x$ con $x \to +\infty$ e $y = -x$ con $x \to -\infty$; el campo de definición $x \neq \pm 1$; el eje de simetría es el de ordenadas; la función crece sobre $[0; 1)$ y $[\sqrt{2}; +\infty)$, decrece sobre $(1; \sqrt{2}]$; $y \sim x^2$ con $x \to 0$, $y \sim 1/\sqrt{2|x-1|}$ con $x \to 1$, $y \sim 2 + 2(x - \sqrt{2})^2$ con $x \to \sqrt{2}$. 9) Las asíntotas $y = 1 - 2x$ con $x \to +\infty$ e $y = 1 + 2x$ con $x \to -\infty$; el eje de simetría es el de ordenadas; la función decrece sobre $[0; +\infty)$; $y \sim -2x^2$ con $x \to 0$. 10) Las asíntotas $y = x$ con $x \to +\infty$ e $y = -x - 4$ con $x \to -\infty$; el eje de simetría es la recta $x = -2$; la función crece sobre $[-2; +\infty)$; $y \sim -1 + (x+2)^2/2$ con $x \to -2$. 11) La asíntota $y = x - 1/3$; la función crece sobre $(-\infty; 0]$ y $[2/3; +\infty)$, decrece sobre $[0; 2/3]$; $y \sim -x^{2/3}$ con $x \to 0$, $y \sim \sqrt[3]{x-1}$ con $x \to 1$, $y \sim -\frac{\sqrt[3]{4}}{3} - 3\sqrt[3]{4}(x - 2/3)^2/4$ con $x \to 2/3$. **11.20.** 1) Las asíntotas $x = -3$, $y = 1$; el campo de definición $x \neq -3$; la función decrece sobre $(-\infty; -3)$ y $(-3; +\infty)$. 2) Las asíntotas $x = -2$ y $x = 2$; el campo de definición

$|x| < 2$; el eje de simetría es el de ordenadas; la función decrece sobre $[0; 2)$, $y \sim \ln 4 - x^3/4$ con $x \to 0$. 3) Las asíntotas $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$; la función decrece sobre $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$. 4) Las asíntotas $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$, $y = 0$; el campo de definición $|x - 3| > \sqrt{2}$, $x \neq 3 \pm \sqrt{3}$; el eje de simetría es la recta $x = 3$; la función decrece sobre $(3 + \sqrt{2}; 3 + \sqrt{3})$ y sobre $(3 + \sqrt{3}; +\infty)$. 5) Las asíntotas $y = 0$ con $x \to -\infty$, $y = x + \ln 2$ con $x \to +\infty$; la función crece sobre $\mathbb{R}$. 6) Las asíntotas $x = \pi(1 + 2n)/2$, $n \in \mathbb{Z}$; la función es periódica con período 2π; la función está definida sobre $(-\pi/2; \pi/2)$; el eje de simetría es el de ordenadas, la función decrece sobre $[0; \pi/2)$. 7) Las asíntotas $x = 0$, $y = \ln(\pi/2)$; el campo de definición $x > 0$; la función crece sobre $(0; +\infty)$. 8) Las asíntotas $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; la función es periódica con período 2π; el campo de definición $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; los ejes de simetría son las rectas $x = \pi(1 + 2n)/2$, $n \in \mathbb{Z}$; la función decrece sobre $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ y $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

11.21. 1) La asíntota $y = x$; el campo de definición $x \neq 0$. 2) La asíntota $y = x$; el campo de definición $x \neq 0$; el centro de simetría es el origen de coordenadas. 3) La asíntota $y = 2x + 4$; el campo de definición $x \neq 0$. 4) Las asíntotas $y = (2x - \pi)/2$ con $x \to -\infty$, $y = (2x + \pi)/2$ con $x \to +\infty$; la función crece sobre $\mathbb{R}$; $y \sim 2x$ con $x \to 0$. 5) Las asíntotas $y = \pi x + \pi + 1$ con $x \to -\infty$, $y = 1$ con $x \to +\infty$. 6) La asíntota $y = (\pi x - 2)/2$ con $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$; el campo de definición $|x| \geqslant 1$. 7) Las asíntotas $y = (6x - \pi)/2$ con $x \to -\infty$, $y = (6x + \pi)/2$ con $x \to +\infty$; el centro de simetría es el origen de coordenadas, la función crece sobre $\mathbb{R}$. 8) La asíntota $y = -x$; el campo de definición $x \neq 0$, el centro de simetría es el origen de coordenadas, la función decrece sobre $(0; +\infty)$, $y \sim (\pi - 4x)/2$ con $x \to +0$. 9) La asíntota $y = x$ con $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$; el campo de definición $x \neq 0$, el centro de simetría es el origen de coordenadas; la función crece sobre $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$; $y \sim 0{,}5\,\pi x^3 \operatorname{sign} x$ con $x \to 0$. **11.22.** 1) La asíntota $y = 0$; el campo de definición $x < 0$, $x \geqslant 1$. 2) Las asíntotas $y = 0$, $x = 1$; el campo de definición $x \neq 0$, $x \neq 1$; $y \sim 1/(x - 1)$ con $x \to 0$. 3) La asíntota $y = x$. 4) La asíntota $y = 0$; el eje de simetría es el de ordenadas. **11.23.** 1) $y = -x - a$. 2) $x = 2$, $y = 3(2x + 3)/40$, $y = -(2x + 1)/8$. 3) $y = -a$, $y = x + a/3$. 4) $y = x - 2$. 5) $y = -x + a$. 6) No hay asíntotas. 7) $y = x + 6\pi$ con $x \to -\infty$, $y = x$ con $x \to +\infty$. 8) No hay asíntotas. 9) $x = 0$ con $y \to -\infty$, $y = 0$ con $x \to +\infty$. 10) $y = x + 1$ con $x \to +\infty$. 11) $y = (x + 2e)/2$, con $x \to +\infty$. 12) $y = 2x$ con $x \to +\infty$. **11.24.** 1) $x = -1$, $y = 0$. 2) $y = -(x + 1)/2$, $y = (x - 1)/2$. 3) $y = -bx/a$, $y = bx/a$ con $x \to +\infty$. 4) $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, 5) $x = -1$, $x = 1$, $y = x/2$, $y = -x/2$. 6) $x = 0$, $x = 1/2$. 7) $x = 1$. 8) $x = -1/2$, $y = 0$, $y = (2x - 3)/4$.

11.25. 1) $\varphi = \pi k/4$ $(k = 0, 1, 2, 4, 5, 6)$. 2) $\varphi = \pi k/4$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. 3) $r = 2a/\cos\varphi$. 4) $r = -1\Big/\left(\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$, $r = 1\Big/\left(\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$. 5) $r = 3\Big/\left(\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right)$. 6) $r = -1/(4\sqrt{5}\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0))$, donde $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(1/2)$. **11.26.** 1) $r = \pi/\operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$. 2) $\varphi = 0$. 3) $r = 1/\operatorname{sen}(\varphi - 1)$. 4) $r = 1/\operatorname{sen}\varphi$. 5) $r = 2/\cos\varphi$, $r = -2/\cos\varphi$. 6) $r = \dfrac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\operatorname{sen}(\varphi - \arccos(1/e))}$, $r = -\dfrac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\operatorname{sen}(\varphi + \arccos 1/e)}$. 7) Véase 6). 8) $r = 2/\cos\varphi$, $r = -2/\cos\varphi$. 9) $r = 1/\operatorname{sen}\varphi$, $r = -1/\operatorname{sen}\varphi$,

$r=1/\cos\varphi$, $r=-1/\cos\varphi$. 10) $r=\dfrac{a}{3\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}-\varphi\right)}$, $r=\dfrac{a}{3\,\text{sen}\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)}$, $r=-\dfrac{a}{3\cos\varphi}$. 11) $\varphi=(\pi+2\pi k)/6$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$. 12) $r=\dfrac{a\,\text{th}\,1}{\text{sen}\,(\varphi-1)}$. 13) $r=2R/\cos\varphi$. 14) $r=2a/\cos\varphi$. 15) $r=-a/\cos\varphi$. 16 $\varphi=(\pi+2\pi n)/4$ $(n=0, 1, 2, 3)$. 17) $r=\sqrt{2}/\text{sen}\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $r=-\sqrt{2}\Big/\text{sen}\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)$. 18) $\varphi=(\pi+2\pi n)/4$ $(n=0, 1, 2, 3)$. **11.27.** 1) $y=0$, $x=0$. 2) $y=0$, $x=0$. 3) $y=-1$, $y=1$, $x=1$, $x=2$. 4) $y=0$, $x=0$, $y=-x$. 5) $y=x+2$. 6) $x=a$. 7) $y=x/\sqrt{3}$, $y=-x/\sqrt{3}$, $x=0$. 8) $y=x$, $y=-x$. 9) $y=x$, $y=-x$. 10) $y=0$, $x=0$, $y=x$. 11) $y=-1$, $x=2$, $y=-x-1$. 12) $x=1$, $x=-1$, $y=x$, $y=-x$. 13) $y=x$. 14) $y=x-1$, $y=-x-1$. 15) $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{8}$, $y=-\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{8}$. 16) $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\dfrac{2a}{3\sqrt{3}}$, $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{2a}{3\sqrt{3}}$, $x=-\dfrac{a}{3}$. 17) $y=1$, $x=1$, $y=x$. **11.29.** 1) $y=4x/3$, $y=-4x/3$. 2) $y=-1$, $y=-2x-1$. 3) $y=2x-1$, $y=\dfrac{1}{2}x+1$. 4) $x=3$, $x=-3$, $y=2$, $y=-2$. 5) $y=-x$. 6) $y=x$, $y=-x$. 7) $x=4$. 8) $y=2\sqrt{2}x$, $y=-2\sqrt{2x}$. 9) $y=2$, $y=-2$. 10) $x=0$, $y=0$, $y=x$, $y=-x$. 11) $y=-x+1$, $y=-x-1$. 12) $y=1$.

§ 12. Continuidad uniforme de una función

12.3. Las siguientes funciones son uniformemente continuas: 1) 2), 3), 6), 7), 8), 9). **12.4.** Las siguientes funciones son uniformemente continuas: 1), 3), 4), 6), 7). **12.10.** 1) $\omega(\delta)=2\delta$. 2) $\omega(\delta)=\delta$. 3) si $0<\delta\leqslant 1$ o bien $2\leqslant\delta\leqslant 4$, entonces $\omega(\delta)=\delta$; si $1<\delta<2$, entonces $\omega(\delta)=1$; si $\delta>4$, entonces $\omega(\delta)=4$. 4) Si $0<\delta\leqslant 2a$, entonces $\omega(\delta)=\delta/a$; si $2a<\delta$, entonces $\omega(\delta)=2$. 5) $\omega(\delta)=\delta(\delta^2-3\delta+3)$. 6) $\omega(\delta)=-E(-\delta)$. **12.11.** 1) $\omega(\delta)=2\delta$. 2) Si $\delta\geqslant a$, entonces $\omega(\delta)=a^2$; sin $0<\delta<a$, entonces $\omega(\delta)=\delta(2a-\delta)$. 3) $\omega(\delta)=\delta/a(a+\delta)$. 4) Si $\delta\geqslant\pi$, entonces $\omega(\delta)=2$; si $\delta<\pi$, entonces $\omega(\delta)=2\,\text{sen}\,(\delta/2)$. 5) $\omega(\delta)=\ln(1+\delta)$. **12.30.** 1) P.ej., $y=-(9{,}1x+3{,}1)/6$, si $-1\leqslant x\leqslant -0{,}4$; $y=0{,}09$, si $|x|<0{,}4$; $y=(9{,}1x-3{,}1)/6$, si $0{,}4\leqslant x\leqslant 1$. 2) P.ej., $y=2{,}45-1{,}5x$, si $2/3\leqslant x\leqslant 1$; $y=1{,}45-0{,}5x$, si $1\leqslant x\leqslant 2$. **12.31.** P.ej., $y=(8-3x)/8$, si $0\leqslant x\leqslant 2$; $y=(100-x)/392$, si $2\leqslant x\leqslant 100$. **12.34.** 1) $f(x)=-1+|x+3|-|x+1|+|x-1|$. 2) $f(x)=\dfrac{3}{2}+|x+2|-\dfrac{3}{2}|x|+|x-1|-\dfrac{1}{2}|x-3|$. 3) $f(x)=-\dfrac{11}{2}+\dfrac{7}{4}|x-1|-\dfrac{15}{4}|x-3|+4|x-4|$.

Capítulo III
DERIVADA Y DIFERENCIAL

§ 13. Derivada. Fórmulas y reglas para calcular las derivadas. Diferencial de una función

13.1. 1) 0,2. 2) 0. 3) 1. 4) -1. **13.2.** 1) $3x^2+2x$, $x\in\mathbb{R}$. 2) $-1/x^2$ $x\neq 0$. 3) $1/(2\sqrt{x})$, $x>0$. 4) $\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, $x\in\mathbb{R}$. 5) $-2x/(1+x^2)^2$, $x\in\mathbb{R}$. 6) $2^{x+1}\ln 2$, $x\in\mathbb{R}$. 7) $1/x$, $x>0$. 8) $2\cos 2x$, $x\in\mathbb{R}$. 9) $-1/\text{sen}^2\,x$, $x\neq\pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$. 10) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$. 11) $-3/\sqrt{1-9x^2}$, $|x| < 1/3$. 12 $7/(x^2+$ $+2x+2)$, $x \in \mathbb{R}$. 13.3. $3x^2+2x+1$, $x \in \mathbb{R}$. 13.4. $3ax^2+2bx+c$, $x \in \mathbb{R}$. 13.5. $91(x^{12}-x^{-8})$, $x \neq 0$. 13.6. $-\ln 3/x^2$, $x \neq 0$. 13.7. $-2ax^{-3}-3bx^{-4}-$ $-4cx^{-5}$, $x \neq 0$. 13.8. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $x > 0$. 13.9. $\sqrt[3]{x^2}-2x^{-3}-$ $-2x^{-2}$, $x \neq 0$.

13.10. $(11x^3\sqrt[3]{x^2}+22x^6\sqrt[3]{x})/3$, $x \in \mathbb{R}$.

13.11. $\sqrt{5}(x^{\sqrt{5}}+x^{-\sqrt{5}})/x$, $x > 0$. 13.12. $(ad-bc)/(cx+d)^2$, $x \neq -d/c$.

13.13. $\frac{6x^2+2x-41}{(x^2+x+7)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. 13.14. $\frac{6-\sqrt[3]{x^2}}{6\sqrt{x}(2+\sqrt[3]{x^2})^2}$, $x > 0$.

13.15. $5(\cos x - x \operatorname{sen} x)$, $x \in \mathbb{R}$. 13.16. $\operatorname{tg} x + \frac{x+1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. 13.17. $2x \operatorname{ctg} x - \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.18. $\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$ si $x \neq 0$; $y'(0) = 0$.

13.19. $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}\operatorname{sen}} - \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen}^2 x}$, $x > 0$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

13.20. $2(\cos x - \operatorname{sen} x)^{-2}$, $x \neq \frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 13.21. 1. 13.22. $\operatorname{arsen} x +$ $+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$. 13.23. $\frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

13.24. $-\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}^2 x}$ $|x| < 1$, $x \neq 0$. 13.25. $(3/x)+(3/x)^2+$ $+(3/x)^3$, $x > 0$.

13.26. $\frac{\ln 2}{2}(\sqrt{2})^x - \frac{\ln 5}{2}(\sqrt{5})^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

13.27. $(x^2-5x+1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$. 13.28. $\left(\ln 2 \cdot \ln|x| + \frac{1}{x}\right)2^x$, $x \neq 0$.

13.29. $\left(\log_2 x + \frac{1}{x\ln 2}\right)e^x$, $x > 0$.

13.30. $\frac{1}{x}\left(\frac{\ln x \log_3 x}{\ln 2} + \log_2 x \log_3 x + \frac{\ln x \log_2 x}{\ln 3}\right)$, $x > 0$.

13.31. $-\frac{1}{x\ln x \log_2 x}$, $x > 0$, $x \neq 1$. 13.32. $\frac{\ln x - 1}{\ln x \cdot \log_2 x}$, $x > 0$, $x \neq 1$.

13.33. $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arcsen} x\right)e^{-x}$, $|x| < 1$.

13.34. $(a^2+b^2)e^{ax}\operatorname{sen} bx$, $x \in \mathbb{R}$. 13.35. $\operatorname{ch} 2x$, $x \in \mathbb{R}$. 13.36. 0.

13.37. $\frac{1-3\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$. 13.38. $\frac{1}{x\operatorname{cth} x}+\frac{\ln x}{\operatorname{ch}^2 x}$, $x > 0$. 13.39. 2.

13.40. $(a-b)(a-c)$. 13.41. $1/(a-b)$. 13.42. $ab(a+b+2)$. 13.43. $y'(0) =$

$= -1985!$, $y'(1985) = 1985!$. **13.44.** 0. **13.45.** 1. **13.46.** $a+d$. **13.47.** $\pi/2$. **13.48.** 1. **13.49.** e. **13.50.** 0. **13.51.** $(3e^2+e^{-2})/2$. **13.52.** $30(3x-7)^9$. **13.53.** $x^2/(1-x)^{100}$. **13.54.** $\alpha b(a+bx)^{\alpha-1}$.

13.55. $-0{,}64(2\cos(8x+5)-3\operatorname{sen}0{,}8x)(2\operatorname{sen}(8x+5)+0{,}3\cos 0{,}8x)$. **13.56.** $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(x+3)$. **13.57.** $\alpha(a\cos x+b\operatorname{sen}x)^{\alpha-1}(-a\operatorname{sen}x+b\cos x)$.

13.58. $Ae^{-k^2x}(\omega\cos(\omega x+\alpha)-k^2\operatorname{sen}(\omega x+\alpha))$

13.59. $\dfrac{6(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}$.

13.60. $\dfrac{1+4\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

13.61. $\dfrac{14}{65\sqrt[5]{(2x)^4}\sqrt[13]{(9+7\sqrt[5]{2x})^{12}}}$.

13.62. $\dfrac{2x^2}{x^6-1}\sqrt[3]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$.

13.63. $\dfrac{ad-bc}{n(ax+b)(cx+d)}\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

13.64. $-2x/\sqrt{(1+x^4)^3}$. **13.65.** 0, $x\neq 0$. **13.66.** $-1/(4\sqrt[4]{x^3})$, $x\neq a$. **13.67.** $\dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$. **13.68.** $-2\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen}^2x}+\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}\right)$. **13.69.** $-4\cos 8x$, $x\neq\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}k$, $x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.70.** $-xe^{-x^2/2}$.

13.71. $2\ln 2\cdot\cos 2x\cdot 2^{\operatorname{sen}2x}$.

13.72. $5/(x^4+13x^2+36)$. **13.73.** $-\cos 2x$.

13.74. $\dfrac{x^4-1}{x^3\cos^2(x^2+x^{-2})\sqrt{(1+\operatorname{tg}(x^2+x^{-2})}}$.

13.75. $\dfrac{2x\operatorname{arctg}x^2}{\sqrt{(1+x^4)^3}}$. **13.76.** $\dfrac{1}{x\ln(x/2)}$, $x>2$.

13.77. $\dfrac{12}{\ln 2}\dfrac{\log_2^2(2x+3)^2}{2x+3}$. **13.78.** $\operatorname{ctg}x$.

13.79. $\dfrac{\cos\ln|x|}{x}$. **13.80.** $\dfrac{\operatorname{sen}(1/\log_2 x)}{(x\log_2^2 x)\ln 2}$.

13.81. $\dfrac{2\ln 3}{1+(2x+\pi)^2}3^{\operatorname{arctg}(2x+3)}$.

13.82. $-\dfrac{2^x\ln 2}{2^{2x}+1}$. **13.83.** $\dfrac{(\ln x-1)\ln 10}{\ln x\cdot\log_3 x}10^{x\log_3 x}$. **13.84.** $1/(2x^2-5x+7)$. **13.85.** $(x^2+1)/(x^4+1)$. **13.86.** $\operatorname{sh}x/(2\sqrt{\operatorname{ch}x})$. **13.87.** $1/\operatorname{ch}2x$. **13.88.** $1/(1-\operatorname{sh}^4x)$. **13.89.** $-\operatorname{sen}2x\cdot\cos(\cos 2x)$.

13.90. $4\dfrac{\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{tg}x^2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}2x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}2x^2}\right)$. **13.91.** $\operatorname{sen}x\cdot\ln\operatorname{tg}x$. **13.92.** $\cos\ln x$. **13.93.** $-n\cos^{n-1}x\operatorname{sen}(n+1)x$. **13.94.** $2x/((1+x^2)^2(1+x^4))$. **13.95** $2x/\sqrt{x^4+1}$. **13.96.** $2\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})$. **13.97.** 1, $|x|<1$. **13.98.** $4x$,

$|x| < 1$. **13.99.** $12x^2 - 3$, $|x| < 1$. **13.100.** $\cos x/\sqrt{2+\cos 2x}$. **13.101.** $-2n\,|x|^n/(x\,(x^{2n}+1))$. **13.102.** $1/(x^2+5x+6)^2$. **13.103.** $2/(2-3x^2)$. **13.104.** $20/(x^4+x^2-6)$. **13.105.** $2\,(\ln 2)\,x\cos x^2\,2^{\operatorname{sen} x^2}$. **13.106.** $-(\ln 3)\times$ $\times \operatorname{sen} 2x\cdot 3^{\cos^2 x}$. **13.107.** $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{(1-x)/(1+x)}}$.

13.108. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}$. **13.109.** $\dfrac{1}{(\ln 2)\,x\ln x\ln \log_5 x}$, $x>5$.

13.110. $2/(x\,(\ln x^2)\ln\ln x^2)$, $x>e$. **13.111.** $\sqrt{x^2+1}/x$. **13.112.** $\sqrt{x^6/(1+x^7)}$, $x>0$. **13.113.** $2\operatorname{tg}^3 x$. **13.114.** $-\sqrt{2}\operatorname{sen} x/\sqrt{\cos 2x}$.

13.115. $\dfrac{(2x+1)\,e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}}{2\,(x^2+x+1)\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$. **13.116.** $-1/\cos x$.

13.117. $-xe^{2x}/\sqrt{(e^{2x}-1)^3}$. **13.118.** $-4x/\operatorname{sh}^3 x^2$. **13.119.** $\cos x/\cos \operatorname{sen} x$.

13.120. $-4x^3(\cos x^4+\operatorname{sen} x^4)/\sqrt{\operatorname{sen} 2x^4}$. **13.121.** $4\operatorname{ctg} x/(\operatorname{sen}^4 x+1)^2$. **13.122.** $2\sqrt{6}\operatorname{sen} x/(x-2\cos^2 x)$. **13.123.** $1/(a+b\cos x)$. **13.124.** $(2+$ $+\operatorname{ch} x)/(1+2\operatorname{ch} x)$. **13.125.** $\dfrac{1}{2}\;\dfrac{e^{x/2}-1}{e^x+1}$.

13.126. $\dfrac{\cos x-\cos\alpha}{|\cos x-\cos\alpha|}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha\cdot\cos x}$.

13.127. $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{(1-x^2)(1-x^2\cos^2\alpha)}$, $|x|<1$.

13.128. $\dfrac{x}{x^2-2x\cos\alpha+1}$. **13.129.** $4x\sqrt{a^2+x^4}$. **13.130.** $\dfrac{2}{1-\operatorname{sh}^4 x}$.

13.131. $\dfrac{2\,(a^2+b^2)\,x}{(x^2+a)\,(x^4+b^2)}$. **13.132.** $2\sqrt{a^2-x^2}$. **13.133.** $-\dfrac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x}$.

13.134. $-\dfrac{\operatorname{arcctg} e^x}{e^x}$. **13.135.** $-\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{1-x^2}$. **13.136.** $\dfrac{\sqrt{8x^4+8}}{x^4-1}$.

13.137. $\dfrac{5x^2}{2x^4+6x^3+9x^2+6x+2}$. **13.138.** $3\cdot\dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

13.139. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-2\operatorname{sen} x}}$. **13.140.** $e^x\cdot\operatorname{arcsen}\sqrt{e^x/(1+e^x)}$.

13.141. $x^x(1+\ln x)$. **13.142.** 0, $x>0$, $x\neq 1$. **13.143.** $-\dfrac{1}{x\ln x\log_7 x}$.

13.144. $1/x$, $x>0$, $x\neq 1$. **13.145.** $2e\,(x-e)$, $x>0$, $x\neq 1$.

13.146. $x^{1+x^2}(1+2\ln x)$. **13.147.** $e^x\cdot x^{e^x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$.

13.148. $(\ln 2)\,2^{x^x}\cdot x^x(1+\ln x)$.

13.149. $x^{x^x}\cdot x^{x-1}(x\ln^2 x+x\ln x+1)$.

13.150. $|\operatorname{sen} x|^{\cos x}(\cos x\cdot\operatorname{ctg} x-\operatorname{sen} x\ln|\operatorname{sen} x|)$.

13.151. $(\operatorname{arcsen}\operatorname{sen}^2 x)^{\operatorname{arctg} x}\left(\dfrac{\ln\operatorname{arcsen}\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}+\right.$ $\left.+\dfrac{\operatorname{sen} 2x\cdot\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcsen}\operatorname{sen}^2 x\sqrt{1-\operatorname{sen}^4 x}}\right)$.

13.152. $(\operatorname{ch} x)^{e^x} \cdot e^x (\ln \operatorname{ch} x + \operatorname{th} x)$.

13.153. $y'(0) = 2$, $y'(1) = -2$. **13.154.** $\sqrt[5]{72}$. **13.155.** $-\pi^3 \ln 2$. **13.156.** $-2\sqrt{3}$. **13.157.** $2/\ln 2$. **13.158.** $2/e$. **13.159.** 0. **13.160.** $y'(0)=2$, $y'(2)=-2/5$. **13.161.** $y'(-1)=1$, $y'(1)=-1$, $y'(0)$ no existe. **13.162.** 6. **13.163.** 0. **13.164.** 0. **13.165.** $2\ln 2$. **13.166.** $-(\pi/2)^{-\pi/2}(1+\ln(\pi/2))$. **13.167.** 1) 1; 3. 2) 7/11. 3) $\pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. 4) 1; 2; $(5 \pm \sqrt{13})/6$. 5) 0; 6) 7/12. **13.168.** 1) $f'(x)/(2\sqrt{f(x)})$. 2) $f'(x)/f(x)$. 3) $3x^2 f'(x^3)$. 4) $\dfrac{f'(\operatorname{arcsen} f(x)) \cdot f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$.

13.169 1) $\dfrac{2}{n} \cdot \dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt[n]{(f^2(x)+g^2(x))^{n-1}}}$. 2) $\dfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}$.
3) $\operatorname{sen} 2x\,(f'(\operatorname{sen}^2 x) - g'(\cos^2(x)))$. 4) $\left(g'(x)\ln f(x) + \dfrac{g(x)f'(x)}{g(x)}\right)(f(x))^{g(x)}$.

13.171. 1) $6x-3$. 2) $3x^2-30x-18$. 3) $6x^2$. **13.173.** 1) $\alpha > 0$. 2) $\alpha > 1$. 3) $\alpha > 2$. **13.174.** 1) $\alpha > 0$, β se toma al azar. 2) $\alpha > 1$, β se toma al azar. 3) $\alpha > 1$, $\beta < \alpha - 1$. **13.176.** 1) a) $\alpha + \beta = 1$; b) $\alpha = 2$, $\beta = -1$. 2) a) $\alpha + \beta = 1$; b) $\alpha = 3/2$, $\beta = -1/2$. 3) a) $4\alpha + \beta = 1/12$; b) $\alpha = -(\pi + 2\sqrt{3})/96\pi$, $\beta = (3\pi + 2\sqrt{3})/24\pi$. 4) a) α, β son números tomados al azar; b) $\alpha = 5/2$, $\beta = 9/5$.

13.177. 1) $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$, 2) $\alpha = \beta$. **13.178.** 1) $\alpha = 1$, $\beta = \pi/4$. 2) $\alpha = 1$, $\beta = (\pi - 4)/4$.

13.179. 1) Derivable por doquier, salvo el punto $x = -2$. 2) Derivable por doquier salvo los puntos $x = \pi k$, k es un entero. 3) Derivable por doquier. 4) Derivable por doquier. 5) Derivable por doquier, salvo los puntos $x = \pi k$, k es un entero. 6) Derivable por doquier. 7) Derivable por doquier, salvo los puntos $x = 2/(2k+1)$, k es un entero. 8) No es derivable en ningún lugar.

13.180. 1) Derivable en el punto $x = 0$; con ello $y'(0) = 0$. 2) $y'(1) = 2$, $y'(-1) = -2$. **13.181.** La afirmación es incierta. P.ej., véase el problema **13.179.** 7) y 8). **13.182.** 1) La afirmación es cierta. 2) Es incierta (contraejemplo; $f = |x|$, $g = -|x|$, $x = 0$). 3) Es incierta (contraejemplo; $f \equiv 0$, $g = |x|$, $x = 0$). 4) Es incierta (contraejemplo: $f = |x|$, $g = |x|$, $x = 0$). **13.187.** 1) La afirmación es incierta (contraejemplo. $y = x^3$, $x \in (-1;\ 1)$). 2) Es incierta (contraejemplo: $y = x + \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$). 3) Es incierta (contraejemplo: $y = x$, $x \in \mathbb{R}$). 4) La afirmación es cierta **13.188.** 1) La afirmación es cierta. 2) Es incierta (contraejemplo: $y = x + 1$). 3) Es cierta. 4) Es cierta. **13.189.** La afirmación es cierta. La afirmación inversa es incierta (contraejemplo: la función del problema **13.179**, 8), x_0 es arbitraria). **13.190.** 1) La afirmación es incierta (contraejemplo: $y = \sqrt{x}$, $x \in (0;\ 1)$). 2) Es incierta (contraejemplo: $y = \dfrac{1}{x} + \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, $x \in (0;\ 1)$). 3) Es incierta $\left(\text{contraejemplo: } y = \dfrac{\cos x^2}{x},\ x \in (1;\ +\infty)\right)$. 4) Es incierta (contraejemplo: $y = \operatorname{sen}\ln x$, $x \in (2;\ +\infty)$).

13.191. 1) $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=-1$. 2) $f'_-(2)=f'_-(3)=-1$, $f'_+(2)=f'_+(3)=1$. 3) $f'_+(1)=\ln 4$, $f'_-(1)=-\ln 4$. 4) $f'(2k)=+\infty$, $f'(2k-1)=-\infty$. 5) $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=-1$, $f'_-(\sqrt{\pi})=-\infty$, $f'_+(\sqrt{\pi})$ no existe. 6) $f'_-(2\pi k)=f'_+\left(\dfrac{4k-1}{2}\pi\right)=f'_-((2k+1)\pi)=f'_+\left(\dfrac{4k+1}{2}\pi\right)=0$, $f'_+(2\pi k)=f'_-\left(\dfrac{4k-1}{2}\pi\right)=2$, $f'_+((2k+1)\pi)=f'_-\left(\dfrac{4k+1}{2}\pi\right)=-2$. 7) $f'_-\left(\dfrac{2}{2k+1}\right)=-(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $f'_+\left(\dfrac{2}{2k+1}\right)=$

$= (2k+1)\frac{\pi}{2}$. 8) $f'_-(-1) = +\infty$, $f'_+(-1)$ y $f'_-(1)$ no existen. 9) $f'_-\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) = f'_+\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = 1$, $f'_+\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) = f'_-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = -1$.

13.192. 1) $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$. 2) $f'_-(0)=2$. $f'_+(0)=0$. 3) $f'(0)=0$.

13.193. 1) $f'_+(0)=0$, $f'_-(0)=+\infty$. 2) $f'_+(0)=+\infty$, $f'_-(0)=+\infty$, 3) $f'_-(0)=-\infty$, $f'_+(0)=0$. 4) $f'_-(0)=0$, $f'_+(0)=-\infty$, 5) $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=-1$. 6) $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=+\infty$.

13.194. $f'_-(x_0) = -\varphi(x_0)$, $f'_+(x_0)=\varphi(x_0)$. **13.195.** $y = -\operatorname{sign} x$. **13.196.** $y = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

13.197. 1) $x'(0)=1$, $x'(6/5)=1/2$. 2) $x'(-1/2)=1/2$. 3) $x'(1)=5$. 4) $x'(0)=-\sqrt{2}/8$. 5) $x'\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{2}/2$.

13.198. 1) $x'(y)=x/(x+1)$, $y \in \mathbb{R}$. 2) $x'(y)=1/(1+y-x)$, $y \in \mathbb{R}$. 3) $x'(y) = x^3/(2y^2)$, $y \in (0;\ 1)$. 4) $x'(y)=1/\sqrt{y^2-1}$, $y \in (1;\ +\infty)$.

13.199. $(\operatorname{arcth} x)' = 1/(1-x^2)$, $x \in (-1;\ 1)$.

13.200. $y = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.201. 1) $y'_x = -1$, $0 < x < 1$. 2) $y'_x = -3t^2e^t$. 3) $y'_x = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. 4) $y'_x = \frac{b}{a}\operatorname{cth} t$. 5) $y'_x = 1-\frac{3}{t}+\frac{9}{t^2}$. 6) $y'_x = \frac{3t-7}{3t-5}$. 7) $y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $x \neq 2\pi ka$, $y'_x(2\pi ka)$ no existe, $k \in \mathbb{Z}$. 8) $y'_x = \frac{2\cos t}{1+\cos t}$.

13.202. 1) $x'_y = \frac{3t+1}{3-3t}$. 2) $x'_y = 1-\frac{1}{t^2}$. 3) $x'_y = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 t\,(3+4\cos^2 t)}$.

13.203. $y'(0)=0$. **13.204.** $y'_x = 2x$. **13.205.** 1) $-2/(3\pi)$. 2) 1. 3) 0.

13.206. $y'_+(0) = 1$, $y'_-(a) = -\infty$. **13.207.** 1) $\frac{1}{5y^4+3y^2+1}$. 2) $\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$. 3) $\frac{p}{y}$. 4) $\frac{b^2x}{a^2y}$, $|x|>a$. 5) $\frac{(3a-x)y}{(2a-x)x}$, $0<x<2a$. 6) $1-\frac{2}{\sqrt{x}}$, $0<x<4$. 7) $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, $|x|<a$, $x \neq 0$. 8) $\frac{5}{9}\,\frac{3-x}{y+1}$, $|x-3|<3$. 9) $\frac{4y-2x-4}{8y-4x-3}$, $x<3$.

13.208. 1) $1/\sqrt{3}$. 2) $-24/41$. 3) $-1/e$. 4) $-e^2$. **13.209.** 1) $A=1$, $\alpha(\Delta x) = 3\Delta x + \Delta x^2$. 2) $A=0$, $\alpha(\Delta x)=\Delta x^3$. **13.210.** $3(x-1)\Delta x^2 + \Delta x^3$. **13.211.** $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.212. El segundo si $x \neq 0$; si $x = 0$, el tercero.

13.213. 1) $\left(\frac{1}{x}-e^{-x}\right)dx$. 2) $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}\,dx$. 3) $9\sqrt{x}\ln x\,dx$. 4) $-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$. 5) $\frac{\cos x}{\sqrt{4\operatorname{sen}^2 x-1}}\,dx$. 6) $\operatorname{sh}^4(x/35)\operatorname{ch}^3(x/35)\,dx$. 7) $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 8) $\frac{2}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$. 9) $x^{x^2}(1+2\ln x)\,x\,dx$.

13.214. 1) $-\frac{1}{2}\,dx$. 2) $\frac{2e^2}{e^2+1}\,dx$; 0. 3) $-\frac{89\sqrt{2}}{192}\,dx$. 4) $(2+\ln 4)\,dx$; 0.

13.215. 1) $\frac{12}{11}\,dx$. 2) $\frac{1}{4}\,dx$. 3) $\frac{y_0^3-4x_0^3}{5y_0^4-2x_0y_0}\,dx$. 4) $\frac{y_0}{x_0-y_0}\,dx$. 5) $-\frac{11}{20}\,dx$.

6) $\frac{1}{3}\,dx$. 7) $-2\pi\frac{\ln 3}{3+\ln 3}\,dx$. 8) 0. 9) $\frac{1}{2}\,dx$. 10) $\frac{1}{8}\,dx$. **13.216.** dx.

13.217. 1) $u^2\,dv+2uv\,du$. 2) $2\frac{u}{v}\,du-\frac{u^2}{v^2}\,dv$. 3) $\frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}(u\,dv-v\,du)$. 4) $e^{uv}(u\,dv+v\,du)$. 5) $\frac{u\,du+v\,dv}{\sqrt{u^2+v^2}}$. 6) $\frac{2}{\operatorname{sen}(2v/u)}\cdot\frac{u\,dv-v\,du}{u^2}$. 7) $u^v\left(\frac{v}{u}\,du+\ln u\,dv\right)$.

13.218. 1) a) 4,0208, b) 5,00177. 2) a) 3,083, b) 1,9938. 3) a) 0,485, b) — 0,017 4) 0,9942. 5) 0,512. 6) 0,810. 7) 0,079. 8) 0,925. **13.219.** 1) 25,3. 2) 5,85. 3) 3,001. 4) 1,9953. **13.220.** 565 cm³. **13.221.** 2%. **13.222.** Disminuye el 1%. **13.223.** Aumentea 2,23 cm.

§ 14. Sentido geométrico y físico de la derivada

14.1. En los puntos $x=2\pi k/3$ el ángulo $\varphi=\operatorname{arctg} 3$, en los puntos $x=\pi(2k+1)/3$ el ángulo $\varphi=\pi-\operatorname{arctg} 3$. 2) $\pi/4$. 3) En el punto $x=1$ el ángulo $\varphi=\pi/4$, en el punto $x=-1$ el ángulo $\varphi=3\pi/4$. 4) $3\pi/4$. 5) $\operatorname{arctg}\alpha$. 6) En los puntos $x=1$ y $x=2$ el ángulo $\varphi=0$, en los puntos $x=3$ el ángulo $\varphi=\operatorname{arctg} 8$. 7) En el punto $x=1$ el ángulo $\varphi=\pi-\operatorname{arctg}(3/2)$, en el punto $x=-2$ el ángulo $\varphi=\pi-\operatorname{arctg}(3/4)$. 8) $\operatorname{arctg}(1/2)$. 9) 0. 10) En el punto $x=-3$ el ángulo $\varphi=\operatorname{arctg} 3$, en el punto $x=3$ el ángulo $\varphi=\pi-\operatorname{arctg} 3$.
14.2. 1) $(-1;\ 14)$; $(2;\ -13)$. 2) $(0;\ -1)$; $(1;\ -6)$; $(-2;\ -33)$. 3) $(-1;\ -58)$; $(1;\ 54)$; $(7;\ -2106)$. 4) $(\pi k;\ 1-5(-1)^k)$, $k\in\mathbb{Z}$. 5) $(1;\ 2e)$, $(-3;\ -6e^{-3})$. 6) $(2;\ 0)$, $(5;\ -27/4)$. 7) $(3;\ 0)$, $(9/2;\ 27/16)$. 8) $(1/2;\ -1/2)$. 9) $(-2;\ 1+\sqrt{3})$.
14.3. 1) $y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$. 2) $y=2x$. 3) $y=-3x$. 4) $y=-3x+\frac{3\pi}{2}$. 5) $x=1$. 6) $4x-9y+8=0$. 7) $29x-12y-54=0$. 8) $x-3y=0$. 9) $(1-t_0)e^{-t_0}x-(1+t_0)e^{t_0}y+2t_0^2=0$. 10) $y=(\operatorname{ctg}(t_0/2))x+2a-at_0\operatorname{ctg}(t_0/2)$. **14.4.** $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. **14.5.** $(100/x_0;\ 0)$. **14.6.** $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$.

14.7. 1) $x+2y-\pi-2=0$. 2) $8x+4y-8-\pi=0$. 3) $x=6$. 4) $y-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=2\sqrt[3]{2}(x+3)$. 5) $\sqrt{2px_0}\,x+py-\sqrt{2px_0}(p+x_0)=0$. 6) $y-\frac{1}{4}e^{\pi/3}=-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}\left(x-\frac{3}{4}e^{\pi/3}\right)$.
14.8. $4x-7y+15=0$.
14.9. $a^2y_0x+b^2x_0y-x_0y_0(a^2+b^2)=0$.

14.10. 1) $5x+6y-13=0$; $6x-5y+21=0$. 2) $9x+2y+12=0$; $2x-9y+31=0$. 3) $14x-13y+12=0$; $13x+14y-41=0$. 4) $x+y-2=0$, $y=x$. 5) $y-y_0=\frac{x_0^2(6-x_0)}{y_0(4-x_0)^2}(x-x_0)$; $y-y_0=-\frac{y_0(4-x_0)^2}{x_0^2(6-x_0)}(x-x_0)$. 6) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$; $ax-by=a^2-b^2$. 7) $3x-y-4=0$; $x+3y-28=0$. 8) $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0$; $(\pi-4)x-(\pi+4)y+\pi\sqrt{2}=0$. 9) $x+y-1=0$; $x-y=0$. 10) $7x-10y+6=0$; $10x+7y-34=0$. 11) $3x-y-1=0$; $x+3y-7=0$.
14.11. 1) $(0;\ 0)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(2/3)$. 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ (-1)^k\right)$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$. 3) $(0;\ 0)$,

$\varphi=0$; $(1;\ 1)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(1/7)$. 4) $(1;\ 1)$, $\varphi=\operatorname{arctg} 3$. 5) $(1;\ 1)$, $\varphi=\pi/4$. 6) $(\sqrt{e};\ 1/2)$, $\varphi=0$. 7) $(1;\ 1)$ y $(4;\ 4)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(6/7)$. 8) $(3;\ 34)$, $\varphi=0$; $(-2;\ 4)$ $\varphi=\operatorname{arctg}(25/153)$. 9) $\left(2k+\frac{1}{2};\ \varphi\left(2k+\frac{1}{2}\right)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, el ángulo es igual a cero.

14.12. 1) $(0;\ 0)$, $\varphi=\pi/2$; $(1;\ 1)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(3/4)$. 2) $(1;\ 5/9)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(1/3)$. 3) $(2;\ e)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(2/e)$. 4) $(1;\ \pm 2)$, $\varphi=\operatorname{arctg} 3$. 5) $(1/8;\ -1/16)$, $\varphi=\pi/2$. 6) $(1;\ 2)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(6/5)$. 7) $(8/5;\ 0)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(75/31)$. 8) $(e;\ e)$, $\varphi=\pi/2$.

14.16. 1) $\pi/2$. 2) 0. 3) $\pi/2$. 4) $\pi/3$. 5) $\operatorname{arctg}(3/4)$. 6) $2\pi/3$. 7) 0. 8) $3\pi/4$. 9) $\pi-2\operatorname{arctg}(1/18)$. 10) 0.

14.17. 1) $2\sqrt{3}$. 2) $2\sqrt{2}$. 3) 2. 4) 2. **14.18.** $1/\ln a$. **14.19.** $|x|/n$, $na^2|x|^{2n-1}$. **14.20.** 1) $2|x|$, p. 2) $(x^2-a^2)/|x|$, $|x|$. **14.23.** 1) $2x/3$, $3x^2/2$, $x\neq 0$. 2) $2x$, $1/(2x^2)$.

14.24. $2a\operatorname{sen}(t/2)\operatorname{tg}(t/2)$, $2a\operatorname{sen}(t/2)$, $2a\operatorname{sen}^2(t/2)\operatorname{tg}(t/2)$, $a\operatorname{sen} t$.

14.25. a, $a\operatorname{sen} t/|\cos t|$. **14.28.** 1) $\operatorname{arctg}\varphi$. 2) $\operatorname{arctg}\varphi$. 3) $\operatorname{arctg}(1/b)$. 4) $|\pi-\varphi|/2$, $0\leqslant\varphi<\pi$, $\pi<\varphi<2\pi$. 5) $\frac{\pi}{2}-2\varphi$. **14.29.** $\pi/2$. **14.31.** $\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}e^{b\varphi}$.

14.32. $x-y-\frac{1+2\sqrt{3}}{4}a=0$, $r=\frac{(1+2\sqrt{3})a}{4(\cos\varphi-\operatorname{sen}\varphi)}$. **14.33.** $\approx 54{,}3$ km/h. **14.34.** $-\pi/8$. **14.35.** 90,75 J. **14.36.** (1/3) m/s. **14.37.** 0,05 m²/s. **14.38.** 4π rad/s. **14.39.** 15 m/s. **14.40.** ≈ 3 m/min.

14.41. $v=(v_0\cos\alpha,\ v_0\operatorname{sen}\alpha-gt)$, $|v|=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\operatorname{sen}\alpha+g^2t^2}$.

14.42. $\pi/3$ m/s.

14.43. $\frac{2\pi a\varepsilon}{P}\operatorname{sen}\frac{2\pi(t-t_0)}{P}\left(2\varepsilon\cos\frac{2\pi(t-t_0)}{P}+1\right)$.

14.44. $1{,}013\ \frac{\text{J}}{{}^\circ\text{K}}$. **14.45.** $-\frac{\ln 2}{T}$.

§ 15. Derivadas y diferenciales de órdenes superiores

15.1. 1) 2. 2) $9702/x^{100}$. 3) $3x(1-x^2)^{-5/2}$. 4) $-2\cos 2x$. 5) $4\operatorname{ch} 2x$. 6) $-x(x^2+1)^{-3/2}$. 7) $-x(1+x^2)^{-2}$. 8) $(x-1)(2x-x^2)^{-3/2}$. 9) $-4x\times\times\operatorname{sign} x/(1+x^2)^2$, $x\neq 0$. 10) $4x^2(1+x^4)^{-5/4}$. **15.2.** 1) $e^2/32$. 2) 625/1024. 3) 0. 4) 0. **15.3.** 54 m/s². **15.6.** Con $t=2$ s; 13 m/s² y 14 m/s², con $t=3$ s; 19 m/s² y 18 m/s². **15.7.** $43H$. **15.8.** 20 m/s². **15.9.** 1) $(x^2-3x+1)e^{-x}dx^2$. 2) $\frac{8\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}dx^2$. 3) $-\frac{2\operatorname{sen}\ln x}{x}dx^2$. 4) $(x(1+\ln x)^2+1)x^{x-1}dx^2$.

15.10. 1) $\frac{15}{2}dx^2$. 2) $\frac{56}{125}dx^2$. 3) $-\frac{5}{8}dx^2$. 4) dx^2.

15.11. 1) —4) lo satisface con A y B arbitrarios; 5) no lo satisface; 6)—8) lo satisface.

15.12. 1) $\frac{u^2v''-uvu''-2uu'v'+2v(u')^2}{u^3}$. 2) $(uv''+2u'v'+vu''+(uv'+vu')^2)e^{uv}$. 3) $\frac{(u^2+v^2)(uv''-vu'')+2uv(u')^2+2(v^2-u^2)u'v'-2uv(v')^2}{(u^2+v^2)^2}$. 4) $\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(v^2-u^2)(u')^2-4uvu'v'+(u^2-v^2)(v')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$.

15.13. 1) $(v+2)d^2u+2\,du\,dv+u\,d^2v$. 2) $\ln v\,d^2u+\frac{2}{v}du\,dv+\frac{u}{v}d^2v-$

$-\frac{u}{v^2}\,dv^2$. 3) $\frac{(u^2+v^2)(ud^2u+vd^2v)+(v\,du-u\,dv)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$. 4) $u^v\left(\frac{v}{u}d^2u+\right.$ $\left.+\ln u\,d^2v+\frac{v(v-1)}{u^2}\,du^2+\frac{2(v\ln u+1)}{u}\,du\,dv+\ln^2 u\,dv^2\right)$.

15.14. 1) $-2/9t^4$. 2) $\frac{6}{t}\left(\frac{1+t^3}{2-t^3}\right)^3$. 3) $-8\cos^2 t/\cos^3 2t$. 4) $-b/(a^2\operatorname{sen}^3 t)$. 5) $1/(\cos^3 t\,(3\cos^2 t-1))$. 6) $-1/(t\operatorname{sh}^3 t)$. 7) $2(1+t)^3/(te^t)$. 8) $\cos^3 t/\operatorname{sen} t$. 9) $(3\operatorname{sen}\log_2 t)/(\cos^5\log_2 t)$. 10) $2^{3\operatorname{sen}^2 t-1}$. 15.15. 1) 2. 2) 1/2. 3) -12. 4) $-1/2$. 15.16. 1) $-12(t+1)^{-1}(3t+1)^{-3}$. 2) $-\operatorname{sen}^3 t\cos t$. 3) $-2\ln 5\,\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^4 t}$. 4) $2\sqrt{\cos 2t}\,\frac{\operatorname{sen}^3 t-\cos 2t}{\operatorname{sen}^3 2t\cos t}$.

15.18. 1) $-\frac{3\cos t}{a^2\operatorname{sen}^5 t}$. 2) $\frac{3\operatorname{ch} t}{a^2\operatorname{sh}^5 t}$. 3) $\frac{\cos^2 t-4\operatorname{sen}^2 t}{9a^2\cos^7 t\operatorname{sen}^3 t}$. 4) $-\frac{\cos(t/2)}{4a^2\operatorname{sen}^7(t/2)}$. 5) $\frac{4e^{2t}(2\operatorname{sen} t-\cos t)}{(\operatorname{sen} t+\cos t)^5}$. 6) $\frac{\operatorname{sen} t\,(1+3\operatorname{sen}^2 t)}{\cos^7 t}$.

15.19. 1) $y'=-b/a$, $y^{(n)}=0$, $n>1$. 2) $y^{(n)}=2^{n-1}n!$. 3) $y^{(n)}=$ $=\frac{(-1)^{n-1}2^n(2n-3)!!}{(2t-1)^{3n-1}}$. 4) $y'=2x+1$, $y''=2$, $y^{(n)}=0$, $n>2$. 15.20. $x''=$ $=-f''/(f')^3$, $x'''=(3(f'')^2-f'f''')/(f')^5$. 15.21. 1) $-a^2/y^3$. 2) $-a^2/y^3$ 3) $-b^4/(a^2y^3)$. 4) $-p^2/y^3$. 5) $4(x+y)/(x+y+1)^3$. 6) $-(3+2\ln x)/(x^2(1+$ $+2\ln x)^3)$. 7) $2(x^2+y^2)/(x-y)^3$. 8) $\frac{2x^2y\,(3y^4+2(3-x^4)\,y^2+3+2x^4)}{(y^2+1)^5}$.

15.22. 1) $-\frac{1}{3}dx^2$. 2) $-\frac{1}{4}dx^2$. 3) 0. 4) $\frac{3}{8}dx^2$.

15.24. 1) $y^{(n)}=3^ne^{3x}$, $n>3$; $y'''=6+27e^{3x}$; $y''=6x+9e^{3x}$; $y'=3x^2+1+$ $+3e^{3x}$. 2) $a_0\cdot n!$. 3) $2\cdot n!/(1-x)^{n+1}$. 4) $(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)(cx+d)^{-n-1}$ 5) $(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n/(ax+b)^n$. 6) $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$. 7) $\frac{1}{2}(a-$ $-b)^n\cos\left((a-b)x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left((a+b)x+\frac{\pi n}{2}\right)$. 8) $y^{(2k-1)}=\frac{1}{2}(a+$ $+b)^{2k-1}\operatorname{sh}(a+b)x+\frac{1}{2}(a-b)^{2k-1}\operatorname{sh}(a-b)x$; $y^{(2k)}=\frac{1}{2}(a+b)^{2k}\operatorname{ch}(a+b)x+$ $+\frac{1}{2}(a-b)^{2k}\operatorname{ch}(a-b)x$. 9) $2^{n-1}\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+4^{n-1}\operatorname{sen}\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$. 10) $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$. 11) $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+2^{3n-3}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$. 12) $(2n-1)!!\,(1-2x)^{-(2n+1)/2}$. 13) $\frac{(-1)^n n!}{4}\,(3(x-6)^{-n-1}+(x+2)^{-n-1})$. 14) $n!\,((1-x)^{-n-1}+(-1)^n(1+x)^{-n-1})$. 15) $(-1)^n n!\,(2^n(2x-1)^{-n-1}+(x+2)^{-n-1})$.

15.25. 1) $(\ln^{n-1}2)\,2^{x-1}((\ln 2)(x-1)+n)$. 2) $(\ln 72)^{n-1}\,72^x((\ln 72)(2x-1)+$ $+2n)$. 3) $(-3)^{n-2}(36x^2-12(9+2n)x+81+32n+4n^2)\,e^{2-3x}$. 4) $\frac{(n-2)!\,3^{n-1}}{\ln 2}\times$ $\times(3x-n)(1-3x)^{-n}$, $n>1$. 5) $(-1)^n 2(n-2)!\,(x-n)(x-1)^{-n}$, $n>1$ 6) $(n-2)!\,((3n-x)(3-x)^{-n}+(-1)^n(3n+x)(3+x)^{-n})$, $n>1$. 7) $(-1)^n\times$ $\times(n-2)!\,((x-n)(x-1)^{-n}+(x-2n)(x-2)^{-n})$, $n>1$. 8) $x\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)+$

$+n \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$. 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(n \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{2}{3}x\cos\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)$, $n>1$. 10) $2^{n-3}\left((4x^2+4x-n^2+n)\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+2n(2x+1)\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)$, $n>2$.

15.26. 1) $\frac{5^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}(2n-5x)(1-5x)^{-(2n+1)/2}$, $n>1$. 2) $(2n-5)!!\,(3x^2-2nx+n^2-n)(1-2x)^{-(2n+1)/2}$, $n>2$. 3) $e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\cos(bx+c+n\varphi)$, $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{sen}\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$. 4) $2^{n-1}e^{2x}\left(1-2^{n/2}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{4}\right)\right)$. 5) $(a^2+b^2)^{n/2}\left(\operatorname{ch} ax\cos\left(n\varphi-\frac{\pi n}{2}\right)\operatorname{sen}\left(bx+\frac{\pi n}{2}\right)+\operatorname{sh} ax\operatorname{sen}\left(n\varphi-\frac{\pi n}{2}\right)\cos\left(bx+\frac{\pi n}{2}\right)\right)$, $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{sen}\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$. 6) $(-1)^n x^{-n-1}e^{1/x}$. 7) $(n-1)!/x$. 8) $(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x^2)^{-n/2}\operatorname{sen}(n \operatorname{arcctg} x)$.

15.27. 1) a) 12960; b) 0. 2) $-17!!/2^{10}$. 3) 8!. 4) $-13!\,(2/3)^{14}$. 5) $-2^{-14}\,3^5\cdot5\cdot19$. 6) $336/(625\sqrt[3]{5})$. 7) $-2\,(97!)$. 8) $10109\,(3^{99})\operatorname{sen}3$. 9) $-\frac{\pi}{2}(1+3^{100})$. 10) $\left(16-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}$. 11) a) $2^9\cdot3^3\cdot7\cdot37$, b) 0.

15.28. 1) $1500\,dx^3$. 2) $194\cdot10!\,3^9\,dx^{10}$. 3) $\frac{27!!\sqrt{2}}{2^{25}}dx^{16}$. 4) $-2^7\cdot1025\sqrt{3}\,dx^{10}$. 5) $2^9\cdot29\,dx^8$. 6) a) $(17!!)^2\,dx^{19}$. b) 0.

15.29. 1) $y'(0)=0$, $y''(0)$ no existe. 2) $y'(0)=2$, $y''(0)=0$, $y'''(0)$ no existe. 3) $y'(0)=0$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=1$, $y^{(IV)}(0)=0$, $y^{(V)}(0)$ no existe. 4) $y'(0)=1$, $y''(0)=0$, $y'''(0)$ no existe. 5) $y'(0)=0$, $y''(0)$ no existe. 6) $y^{(n)}(0)$ para $n\leqslant50$, $y^{(51)}(0)$ no existe. 7) $y^{(n)}(0)=0$, $n\in\mathbb{N}$.
5.33. $(-1)^n m^n n!$.

Capítulo IV

APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS PARA INVESTIGAR LAS FUNCIONES

§ 16. Teoremas del valor medio para las funciones derivables

16.2. $x_{1,2}=(2\pm\sqrt{7})/3$. 16.3. $\xi=\sqrt{3}/3$. 16.23. Apliquen el teorema de Cauchy del valor medio a las funciones $f(x)/x$ y $1/x$. 16.29. Apliquen el teorema de Cauchy del valor medio a las funciones $f(x)$ y $1/x$.

§ 17. Regla de L'Hospital

17.1. 10/7. 17.2. 1/9. 17.3. 6/7. 17.4. 2. 17.5. 1. 17.6. α/β. 17.7. $-a^2/2$. 17.8. $\alpha a^{\alpha-a-1}/\ln a$. 17.9. $1-\ln a$. 17.10. $-1/2$. 17.11. $-2/\pi$. 17.12. -1. 17.13. $-1/4$. 17.14. -6. 17.15. 1. 17.16. 15/4. 17.17. 0. 17.18. -2. 17.19.

16/105. **17.20.** $(-1)^{m-n}(2m+1)/(2n+1)$. **17.21.** -3. **17.22.** 1/2. **17.23.** 1. **17.24.** 4. **17.25.** $1/a$. **17.26.** 2. **17.27.** 9/14. **17.28.** 1/3. **17.29.** $-4/3$. **17.30.** 0. **17.31.** 45. **17.32.** 49/198. **17.33.** $-1/6$. **17.34.** $\alpha(\alpha+1)/2$. **17.35.** $(\alpha-\beta)/2$. **17.36.** 1/2. **17.37.** 1. **17.38.** 3/2. **17.39.** 1. **17.40.** 0. **17.41.** 0. **17.42.** 2. **17.43.** $-1/3$.

17.44. 0 con $\gamma > 0$ (α, β cualesquiera), con $\gamma = 0$ ($\alpha < 0$, β cualquiera; $\alpha = 0$, $\beta < 0$); $+\infty$ con $\gamma < 0$ (α, β cualesquiera), con $\gamma = 0$ ($\alpha > 0$, β cualquiera; $\alpha = 0$, $\beta > 0$); 1 con $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

17.45. 0. **17.46.** 0 con $\alpha > 1$ y con $\alpha = 1$, $\beta > -1$; 1 con $\alpha = 1$, $\beta = -1$; $+\infty$ con $\alpha < 1$ y con $\alpha = 1$, $\beta < -1$. **17.47.** 0. **17.48.** $-2/\pi$. **17.49.** 0. **17.50.** 2. **17.51.** 2. **17.52.** 0. **17.53.** 0. **17.54.** 0 con $0 < a < 1$ (α — cualquiera), $+\infty$ con $a > 1$ (α — cualquiera). **17.55.** 0. **17.56.** 0. **17.57.** $-1/3$. **17.58.** 1/2. **17.59.** 1/3. **17.60.** $+\infty$. **17.61.** $(\alpha-\beta)/2$. **17.62.** e. **17.63.** $e^{-2/\pi}$. **17.64.** $e^{-2/\pi}$. **17.65.** $e^{-1/3}$. **17.66.** 1. **17.67.** $e^{-1/3}$. **17.68.** 1. **17.69.** e. **17.70.** 1. **17.71.** 1. **17.72.** 1. **17.73.** 3. **17.74.** 1. **17.75.** 1. **17.76.** 1) 0. 2) 1. **17.77.** La regla de L'Hospital no es aplicable, el límite no existe. **17.78.** $f''(a)$. **17.79.** $f'''(a)$. **17.80.** $f^{(k)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. **17.81.** 1) 0. 2) 0, 3) 4. 4) a.

§ 18. Fórmula de Taylor

18.1. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{5^k}{e \cdot k!} x^k + o(x^n)$. 2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2^k \operatorname{sen}\left(3 + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!} x^k + o(x^n)$.

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\cos\left(2 + k\frac{\pi}{2}\right)}{2^k k!} x^k + o(x^n)$. 4) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k x^k + o(x^n)$.

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{3^k}{4^{k+1}} x^k + o(x^n)$. 6) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k (2k-1)!!}{k!} x^k + o(x^n)$.

7) $\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{e}{2}\right)^k x^k + o(x^n)$. 8) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{9(\ln 3)^k}{k!} x^k + o(x^n)$.

9) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k+1) x^k + o(x^n)$.

18.2. 1) $-1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k k!} x^k + o(x^n)$. 2) $-x + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k k}{(k-1)!} x^k + o(x^n)$.

3) $3 + \sum\limits_{k=1}^{n} (3 + k(k-1)2^{k-2}) \frac{(-1)^k}{k!} x^k + o(x^n)$. 4) $1 + \frac{3}{2} x - \frac{9}{8} x^2 - \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{3(2k-1)(2k-5)!!}{2^k k!} x^k + o(x^n)$. 5) $-3\ln 6 + \left(2\ln 6 - \frac{5}{2}\right) x + \sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{9k-5}{2k(k-1)} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} x^k + o(x^n)$. 6) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} 2^k + 1}{k} x^k + o(x^n)$.

7) $\ln\frac{2}{3}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k-9^k}{k6^k}x^k+o(x^n)$. 8) $\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(1+2^{-k})x^k+$ $+o(x^n)$. 9) $\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}-2^{-k}}{k}x^k+o(x^n)$.

18.3. 1) $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)}{k(k-2)}x^k+o(x^n)$. 2) $-2x+\frac{5}{2}x^2+$ $+\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{(-1)^k(2k-1)}{k(k-1)}x^k+o(x^n)$. 3) $2x+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{k(k-1)}((-1)^{k-1}+1)x^k+$ $+o(x^n)$. 4) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}2^{\frac{5}{3}-k}C_{2/3}^{k-1}x^k+o(x^n)$. 5) $\sum\limits_{k=1}^{n}3^{\frac{1}{3}-k}(-1)^{k-1}C_{-2/3}^{k-1}x^k+$ $+o(x^n)$. 6) $\ln\frac{2}{3}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}4^{-k}+2^{-k}+3^{-k}}{k}x^k+o(x^n)$.

7) $\ln 6+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(1+2^{-k}+3^{-k})x^k+o(x^n)$.

8) $-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2\operatorname{ch}((k+1)\ln 2)}{k+1}x^k+o(x^n)$.

18.4. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3}((-1)^{k+1}-2^{-(k+1)})x^k+o(x^n)$.

2) $-3+\sum\limits_{k=1}^{n}5(-1)^{k-1}x^k+o(x^n)$.

3) $-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}x-\frac{13}{12}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k+o(x^n)$. 4) $-\sum\limits_{k=3}^{n}x^k+o(x^n)$.

5) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(1+4^{-(k+1)})x^k+o(x^n)$. 6) $\sum\limits_{k=0}^{n}(2(-1)^k3^{-(k+1)}-$ $-2^{-(k+1)})x^k+o(x^n)$. 7) $\frac{1}{3}+\sum\limits_{k=1}^{n}((-1)^k3^{-(k+1)}-1)x^k+o(x^n)$.

8) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}-7\cdot 2^{-(k+1)}}{3}x^k+o(x^n)$.

9) $\frac{5}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}((-1)^k2^{-(k+1)}-1)x^k+o(x^n)$.

18.5. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}(2x+1)!} + o(x^{2n})$. 2) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{3^{2k}}{(2k)!} x^{2k+1} + o(x^{2n})$.

3) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} 2^{4k-1}}{(2k)!} x^{2k+1} + o(x^{2n})$. 4) $x + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k+1} + o(x^{2n})$.

5) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2(2k+1)!} (3^{2k+1} - 1) x^{2k+1} + o(x^{2n})$.

6) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{3(-1)^k}{4(2k+1)!} (1 - 3^{2k}) x^{2k+1} + o(x^{2n})$. 7) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{3^{2k+1} - 1}{2(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x2n)$.

8) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} 2^{2k-1} (1 - 2^{2k}) x^{2k+1} + o(x^{2n})$.

18.6. 1) $1 - x^2 + \sum\limits_{k=2}^{n} 2(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$.

2) $-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}}{4^k} x^{2k} + o(x^{2n})$. 3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \operatorname{sh}((k+1)\ln 3)}{4} x^{2k} + o(x^{2n})$.

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{3 + (-1)^k}{2} x^{2k} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} - 3}{2} x^{2k+1} + o(x^{2n})$.

5) $-\frac{x}{3} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-k} - 1}{3k} x^{2k+1} + o(x^{2n})$. 6) $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(k-1)\, 2^{2k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + o(x^{2n})$.

7) $x + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k (2k+1)\, k!} x^{2k+1} + o(x^{2n})$.

18.7. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 3^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

2) $x^2 + \sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-3}}{(2k-2)!} x^{2k} + o(x)^{2n+1}$.

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} (1 + 4^{2k}) x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} (1 - 2^{2k}) x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} (2^{2k} + 1) x^{2k} + o(x^{2n+1})$. 6) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{6^{2k} - 4^{2k}}{2 \cdot (2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

18.8. 1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

2) $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} (1 - 2^{2k-2}) x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k 2^{2k-5}}{(2k)!} (1 - 2^{2k+1} - 3^{2k}) x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

4) $1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{4^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$. 5) $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{3(-1)^k 4^{2k-1}}{2(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

6) $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k 4^{2(k-1)}}{(2k)!} (7 + 4^{k-1}) x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

18.9. 1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} 2^{-(k+1)} - 1}{3} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1 + (-1)^k 2^{-(k+1)}}{3} x^{2k+1} +$

$+ o(x^{2n+1})$. 2) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} (3^{-(k+1)} - 5^{-(k+1)}) x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

3) $\sum_{k=1}^{n} C_{-1/2}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n} C_{-1/2}^{k} \frac{(-1)^k}{4^k} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$.

4) $\sum_{k=0}^{n} C_{1/2}^{k+1} 2^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)} (1 + (-1)^k) x^{2k} + o(x^{2n+1})$. 5) $\sum_{k=1}^{n} C_{1/2}^{k+1} x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

6) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} \left(1 + \frac{1 + (-1)^{k+1}}{2^k}\right) x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

18.10. 1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} (2^{-(k+1)} - 3^{-(k+1)}) x^{3k} + o(x^{3n})$.

2) $\frac{11}{2} + \sum_{k=1}^{n} (2(-1)^k - 3 \cdot 2^{-(k+1)}) x^{3k} + o(x^{3n})$. 3) $\sum_{k=0}^{n} x^{3k} \quad \sum_{k=0}^{n-1} x^{3k+1} + o(x^{3n})$.

18.11. 1) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1) x^{3k+1} + o(x^{3n+1})$.

2) $\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sh} k}{k} x^{3k} + o(x^{3n+1})$. 3) $\sum_{k=0}^{n} ((-1)^k 2^{-k} + 7^{-k}) x^{3k} + o(x^{3n+1})$.

18.12. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k+o\,(x-2)^n)$. 2) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{1/2}^{k}\,(x-1)^k+o(x-1)^n)$.

3) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}-1\right)}{k!}(x-1)^k+o\,((x-1)^n)$$

4) $$-e^{-2}+\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-2}2^{k-1}(k-2)}{k!}(x+1)^k+o\,((x+1)^n).$$

5) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k e^{2}2^{k-2}}{k!}(k^2+3k+4)\,(x+1)^k+o\,((x+1)^n).$$

6) $$\sum_{k=1}^{n} e^{-2}\frac{2^{k-2}(k-5)}{(k-1)!}(x+1)^k+o\,((x+1)^n).$$

7) $$\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k-1}\cos 1\cdot 2^{2k-1}}{(2k)!}(x+1)^{2k}+\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{\operatorname{sen} 1\cdot(-1)^k\,2^{2k}}{(2k+1)!}(x+1)^{2k+1}+$$
$$+o\,((x+1)^n).$$

18.13. 1) $$\ln 2+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(-1)^{k-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

2) $$\frac{\ln(26/3)}{3\ln 3}+\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(3\ln 3)\,k}\left(\frac{9}{26}\right)^k(x-3)^k+o\,((x-3)^n).$$

3) $$\ln 2+\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\,2^{-k}-1}{k}(x-1)^k+o\,((x-1)^n).$$

4) $$\ln 6-\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{-k}+3^{-k}}{k}(x-1)^k+o\,((x-1)^n).$$

18.14. 1) $$\frac{\ln 5}{3}+\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\left(\frac{7}{5}\right)^k\frac{(x-1)^k}{3k}+o\,((x-1)^n).$$

2) $$-\frac{\ln 2}{4}+\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}+2^{-k}}{4k}(x-3)^k+o\,((x-3)^n).$$

3) $$-2\ln 12+\left(\ln 12+\frac{7}{6}\right)(x+2)-\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}\left(\frac{k+2}{3^k}+\frac{k+1}{2^{2k-1}}\right)$$
$$\times(x+2)^k+o\,((x+2)^n).$$ 4) $$(x-2)+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{(-1)^k}{k-1}\right)(x-2)^k+o\,((x-2)^n).$$

5) $3+\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (k-2)}{k(k+1)} (x-1)^k + o((x-1)^n)$.

6) $-2\sum_{k=1}^{n} \frac{(x+2)^k}{k} + \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^{k-1} \frac{(x+2)^{2k}}{k} + o((x+2)^n)$.

18.15. 1) $3+\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (x-2)^k + o((x-2)^n)$. 2) $\sum_{k=2}^{n} (x-2)^k + o((x-2)^n)$.

3) $\frac{5}{7}+\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}7^{k+1}} (x-10)^k + o((x-10)^n)$.

4) $-\frac{7}{6}+\sum_{k=2}^{n} \left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{10}{21}\right)^k \left(x+\frac{1}{10}\right)^k + \left(\left(x+\frac{1}{10}\right)^n\right)$.

5) $2+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{2^k} + o((x-1)^n)$.

6) $3+\sum_{k=2}^{n} (-1)^k (x-3)^k + o((x-3)^n)$.

7) $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^{k+1}2^k}{3^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)(x+2)^k + o((x+2)^n)$.

18.16. 1) $\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k (k-1)}{3^k} (x+2)^k + o((x+2)^n)$.

2) $1+\sum_{k=1}^{n} (1-2^{-k})(x-1)^k + o((x-1)^n)$.

3) $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} \left(3-\frac{7}{2^{k+1}}\right)(x-3)^k + o((x-3)^n)$.

4) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\left(1+\frac{1}{3^{k+1}}\right)(x-2)^k + o((x-2)^n)$.

5) $\frac{5}{2}+\frac{9}{4}(x-1)+\sum_{k=2}^{n} (1+2^{-(k+1)})(x-1)^k + o((x-1)^n)$.

6) $-6(x-2)+\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{(k+1)(k+4)}{2} (x-2)^k + o((x-2)^n)$.

18.17. 1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-2}}{k!} (x+1)^{2k} + o((x+1)^{2n})$.

2) $\sum_{k=0}^{n-1} e^{-27} \frac{3^k}{k!} (x+3)^{2k+1} + o((x+3)^{2n})$.

3) $(x+2)\ln 3 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} 2^k}{3^k k} (x+2)^{2k+1} + o((x+2)^{2n})$.

4) $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{(x-5)^{2k+1}}{k} + o((x-5)^{2n})$.

18.18. 1) $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} (x-1)^{2k} + o((x-1)^{2n})$.

2) $(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{(2k)!!} (x+1)^{2k+1} + o((x+1)^{2n})$.

3) $\frac{(x-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^{2k+1} (2k)!!} (x-2)^{2k+1} + o((x-2)^{2n})$.

4) $(x-1)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3k-2)}{3^k k!} (x-1)^{2k+2} + o((x-1)^{2n})$.

5) $(x+1)^2 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} (x+1)^{2k+2} + o((x+1)^{2n})$.

18.19. 1) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} (x-1)^{2k+1} + o((x-1)^{2n})$.

2) $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{3^k}{2^{k+1}} (x-1)^{2k+1} + o((x-1)^{2n})$.

3) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(x-2)^{2k}}{2^{2k+2}} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(x-2)^{2k+1}}{2^{2k+2}} + o((x-2)^{2n})$.

18.20. 1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-4} 2^k}{k!} (x+2)^{2k} + o((x+2^{2n+1}))$.

2) $\sum_{k=0} \frac{e^{-18} 2^k}{k!} (x-3)^{2k} + o((x-3)^{2n+1})$.

3) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sqrt[4]{2} (\ln 2)^k}{k!} \left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k} + o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{e^{-3}2^k}{k!}\left((x+2)^{2k}+(x+2)^{2k+1}\right)+o\left((x+2)^{2n+1}\right)$.

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{2\,(k-1)!}(x+1)^{2k}+o\left((x+1)^{2n+1}\right)$.

6) $-\frac{1}{4}+\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{4\cdot k!}(k-\ln 2)(x-1)^{2k}+o\left((x-1)^{2n+1}\right)$.

7) $e^3+\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^3 2^{k-1}(3k+2)}{k!}(x-1)^{2k}+o\left((x-1)^{2n+1}\right)$.

18.21. 1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(1-3^{2k})}{4\,(2k)!}(x-1)^{2k}+o\left((x-1)^{2n+1}\right)$.

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\frac{3\cdot 6^{2k}}{(2k+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2k+1}+\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 3^{2k}}{2\,(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2k}+$

$+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right)$. 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2}\,(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2k}+o\left(\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)$.

4) $\frac{\pi^2}{4}+\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k\left(\frac{\pi^2}{4\,(2k)!}-\frac{1}{(2k-2)!}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

5) $-\frac{\pi}{8}+\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2}\left(\frac{\pi^{2k-1}}{(2k-1)!}+\frac{\pi^{2k+1}}{4\,(2k+1)!}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2k}+$

$+o\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

18.22. 1) $1+\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}3^k}{k2^k\ln 2}(x-4)^{2k}+o\left((x-4)^{2n+1}\right)$.

2) $\ln 3+(x+1)\ln 3-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x+1)^{2k}}{k}-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x+1)^{2k+1}}{k}+o\left((x+1)^{2n+1}\right)$.

3) $\frac{2}{3\ln 5}\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{2^{2k-1}}{2k-1}(x-1)^{2k-1}+o\left((x-1)^{2n+1}\right)$.

4) $-2\ln 3+\left(\ln 3+\frac{4}{3}\right)(x+2)^2+\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{2^{k-1}(k-4)}{3^k k\,(k-1)}(x+2)^{2k}+o\left((x+2)^{2n+1}\right)$.

18.23. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{-1/3}^{k}(x-2)^{2k+1}+o\left((x-2)^{2n+1}\right)$.

2) $\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{\sqrt{5}10^k k!}((x-2)^{2k}+(x-2)^{2k+1})+o((x-2)^{2n+1})$.

3) $1+(x-1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}((x-1)^{2k}+(x-1)^{2k+1})+o((x-1)^{2n+1})$.

4) $\sum_{k=0}^{n-1} C_{1/2}^{2k+1}2^{2k+\frac{5}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k+2}+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

5) $-\sum_{k=0}^{n} 2^{2k+3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2k+1}+o\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

6) $3+\sum_{k=1}^{n}(x-2)^{2k}+o((x-2)^{2n+1})$.

7) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{5\cdot 2^k}-\frac{2^k}{5}\right)(x+1)^{2k}+o((x+1)^{2n+1})$.

18.24. $\sum_{k=0}^{n}\frac{2(\ln 2)^k}{k!}(x-1)^{2k}+o((x-1)^{2n})$.

18.25. $(x-2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^{3k}k!}(x-2)^{2k+1}+o((x-2)^{2n+2})$.

18.26. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}C^k_{-1/3}}{2^{3k+1}}(x-2)^{3k+1}+o((x-2)^{3n+1})$.

18.27. $-1-\frac{1}{2}(x-1)^2-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}+2\frac{(4k-3)!!}{(4k)!!}\right)(x-1)^{4k-2}+$
$+o((x-1)^{4n+1})$.

18.28. 1) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\cos 2}{(2k+1)!}(x-1)^{4k+2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\operatorname{sen} 2}{(2k)!}(x-1)^{4k}+$
$+o((x-1)^{4n})$.

2) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\operatorname{sen} 1}{(2k+1)!}(x-2)^{4k+2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cos 1}{(2k)!}(x-2)^{4k}+o((x-2)^{4n})$.

3) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k 3^{2k+1}\cos 1}{(2k+1)!}(x+1)^{4k+2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^{2k}\operatorname{sen} 1}{(2k)!}(x+1)^{4k}+o((x+1)^{4n})$.

18.29. 1) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k+1}\left(\frac{8}{\pi}\right)^{2k+1}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4k+2}}{(2k+1)!}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4n+3}\right)$.

2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2k}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4k}}{(2k)!}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4n+3}\right)$.

3) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}\sqrt{\pi}}{(2k+1)!}(x+\sqrt{\pi})^{4k+2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(x+\sqrt{\pi})^{4k+3}+$
$+o((x+\sqrt{\pi})^{4n+3})$.

4) $-\frac{\operatorname{sen} 2}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2}{2}(x+1)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{2^{2k}}{(2k+1)!}(x+1)^{4k+3}+$
$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{(2k+1)!}(x+1)^{4k+2}+o((x+1)^{4n+3})$.

18.30. 1) $1-x^2+o(x^3)$. 2) $1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. 3) $o(x^{2k})$.

18.31. 1) -120. 2) 0. 3) $60!$.

18.33. 1) $1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$. 2) $1+(x+2)^4$. 3) $2(x+1)-$ $-2(x+1)^2+(x+1)^3$. 4) $144(x-2)^2+144(x-2)^3+60(x-2)^4+12(x-2)^5+$ $+(x-2)^6$.

18.36. 1) $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. 2) $e+ex+o(x^2)$. 3) $1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. 4) $1-\frac{x^2}{10}+o(x^2)$. 5) $1-3x+6x^2+o(x^2)$. 6) $-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

18.37. 1) $1-2x+2x^2+o(x^3)$. 2) $2x+\frac{7}{3}x^3+o(x^3)$. 3) $1-x-x^2+$ $+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$. 4) $x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$. 5) $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$. 6) $-\frac{x^3}{8}+o(x^3)$. 7) $e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+o(x^3)$. 8) $1+x-x^2+\frac{3}{2}x^3+o(x^3)$. 9) $x-\frac{x^2}{2}+$ $+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$.

18.38. 1) $e+\frac{e}{6}x^2+\frac{e}{30}x^4+o(x^4)$. 2) $1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{6}x^3+\frac{19}{8}x^4+o(x^4)$. 3) $3x+\frac{27}{2}x^3+o(x^4)$. 4) $x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)$. 5) $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+o(x^4)$. 6) $1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o(x^4)$. 7) $1-\frac{x^2}{6}-\frac{17}{360}x^4+o(x^4)$. 8) $1+\frac{x^2}{3}-\frac{4}{45}x^4+o(x^4)$. 9) $1+x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$.

18.39. 1) $1-6x+21x^2-32x^3+15x^4+66x^5+o(x^5)$. 2) $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$. 3) $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)$ 4) $1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{24}x^4+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$. 5) $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^5)$. 6) $1+x^2-x^3+\frac{23}{12}x^4-\frac{17}{6}x^5+o(x^5)$. 7) $1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{3}x^4+\frac{2}{3}x^5+o(x^5)$.

18.40. 1) $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$. 2) $e\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2-e^2\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^4+e^3\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^6-\frac{4}{3}e^4\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^8+o\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^9\right)$. 3) $5+5x^4-10\ln 5\cdot x^6+\frac{25}{2}x^8+o(x^9)$. 4) $2^{1973}(x-1)^{1973}+o((x-1)^{1973})$.

18.41. 1) $A=1$, $B=1$. 2) $A=4/3$, $B=-1/3$. 3) $A=1$, $B=-1$ 4) $A=-1/15$, $B=-2/5$.

18.42. 1) 5,027. 2) 3,019. 3) 3,017. 4) 1,396. 5) 0,996. 6) 0,309. 7) 0,262. 8) 0,675.

18.43. 1) $e/(n+1)!$ 2) $1/7!$ 3) $1/(2^8 8!)$. 4) $2\cdot 10^{-6}$. 5) $2\cdot 10^{-6}$. 6) $1,5\cdot 10^{-3}$.

18.44. 1) 2,7182818. 2) 3,162. 3) 0,017452. 4) 0,99619. 5) 3,1072. 6) 1,0414.

§ 19. Cálculo de los límites con ayuda de la fórmula de Taylor

19.1. 1) $-1/2$. 2) 1. 3) 1/2. 4) 1/24. 5) 27/4. 6) 1/2. 7) 4/3. 8) 0. 19.2. 1) -2. 2) -1. 3) -1. 4) 8/15. 5) -1. 6) -2. 7) 7/6. 8) 0. 19.3. 1) $-e/2$. 2) 1. 3) $11e/24$. 4) $\pi/4$. 19.4 1) 3/2. 2) 4/3. 3) $-1/8$. 4) $-1/2$. 5) -4. 19.5. 1) 2. 2) 7/8. 3) 1/8. 4) 44. 5) 40/3. 19.6. 1) 0. 2) 3. 3) $-11/12$. 4) $-13/12$. 19.7. 1) -1. 2) 2. 3) -4. 4) 1/8. 5) 3. 6) $-1/4$. 7) -10. 8) -1. 19.8. 1) -3. 2) 1/8. 3) $-1/6$. 4) 5/2. 5) 7/5. 6) 11/4. 19.9. 1) 3/4. 2) -1. 3) 1/4. 4) 1/8. 5) $-1/6$. 6) $-1/8$. 19.10. 1) 4/9. 2) -1. 3) -6. 4) 7/6. 5) -6. 6) $21e/20$. 7) 2/5. 8) -4. 19.11. 1) 7/4. 2) 3/2. 3) 3/2. 4) 13/15. 5) 4. 6) 1. 19.12. 1) 15/2. 2) 3/4. 3) 3/7. 4) 23. 5) 9/2. 6) 5. 19.13. 1) 1/18. 2) -1. 3) $5/(12e^3)$. 4) 1/7. 5) $-\frac{11}{12}\cos^2 1$. 6) $-2e^2$. 19.14. 1) $-32/3$. 2) 9/16. 3) 9. 4) 28/3. 5) $-72/5$. 6) 1/4. 7) -1. 8) 24/7. 19.15. 1) 2. 2) 0. 3) $-27/5$. 4) $\frac{5}{2}\cos 1$. 19.16. 1) 1. 2) 1/2. 3) 1/2. 4) 7/24. 19.17. 1) $-7/5$. 2) 7/45. 3) 1/12. 4) 72/5. 19.18. 1) $5e/8$. 2) 1/7. 3) 14/3. 4) 4/3. 19.19. $\alpha=-1/2$, $n=4$. 19.20. 1) $e^{-1/2}$. 2) $e^{-1/2}$. 3) $e^{1/2}$. 4) e^{-5}. 5) $e^{-7/2}$. 6) No existe. 19.21. 1) $e^{1/6}$. 2) $e^{-1/6}$. 3) $e^{-1/3}$. 4) $e^{2/3}$ 19.22. 1) $e^{1/4}$. 2) $e^{7/3}$. 3) $e^{-2/3}$. 4) e^{-2}. 19.23. 1) e. 2) $e^{-7/3}$. 3) $e^{7/3}$. 19.24. 1) e^{-1}. 2) $e^{1/6}$. 3) $e^{-1/18}$. 4) $e^{-1/6}$. 19.25. 1) $e^{-1/2}$. 2) $e^{2/3}$. 3) $e^{-3/8}$. 4) $e^{-1/4}$. 19.26. 1) $e^{-1/24}$. 2) $e^{1/6}$. 3) $e^{-5/4}$. 4) $e^{-3/4}$. 19.27. 1) $e^{8/15}$. 2) $e^{-3/10}$. 3) $e^{-23/30}$. 4) $e^{9/20}$. 19.28. 1) $e^{-5/6}$. 2) $e^{-1/8}$. 3) $e^{7/12}$. 19.29. 1) $e^{7/12}$. 2) $e^{-25/3}$. 3) $e^{-5/2}$. 4) e^{-4}. 19.30. 1) $e^{5/2}$. 2) $e^{43/81}$. 3) $e^{-5/12}$. 4) $e^{-1/12}$. 19.31. 1) $e^{2/3}$. 2) $e^{7/6}$. 3) $e^{2/3}$. 4) $e^{7/6}$. 19.32. 1) $e^{1/12}$. 2) $e^{-1/6}$. 3) $e^{7/6}$. 4) $e^{29/3}$. 19.33. 1) $e^{1/6}$. 2) $e^{-3/16}$. 3) e. 4) $e^{-1/2}$. 19.34. 1) $e^{-4/9}$. 2) $e^{-(\pi^2+4)/(3\pi^2)}$. 3) $e^{-7/6}$. 19.35. 1) $e^{-7/6}$. 2) e^2. 3) e^{-4}. 19.36. 1) $e^{-25/81}$. 2) $e^{-5/3}$. 3) $e^{-7/4}$. 19.37. 1) e^3. 2) $e^{-1/2}$. 3) $e^{-13/4}$. 4) e^{24}. 19.38. 1) e^{-2}. 2) $e^{-3/8}$. 3) $e^{-1/15}$. 19.39. 1) e^{-1}. 2) e^{-4}. 3) 1. 19.40. 1) $e^{1/2}$. 2) $e^{5/24}$. 3) $e^{-1/8}$. 19.41. 1) $e^{14/15}$. 2) e^e. 3) e^9.

4) $e^{7/16}$. **19.42.** 1) $e^{-8/9}$. 2) e. **19.44.** 1) e^{-1}. 2) $e^{-5/6}$. **19.45.** 1) $e^{2/3}$. 2) $e^{13/90}$. 3) e^{2}. **19.46.** 1) $e^{-1/8}$. 2) $e^{\pi/6}$. **19.47.** 1) e^{3}. **19.48.** 1. **19.49.** 1) e^{-2}. 2) e. 3) $e^{1/(8\cos^2 1)}$. **19.50.** 1) $e^{1/(2\cos^2 1)}$. 2) El límite no existe. 3) $e^{1/6}$. **19.51.** $e^{-1/3}$. **19.52.** $-2/5$. **19.53.** 1) 7/6. 2) 3/2. **19.54.** 1) $-\pi$. 2) $-\pi$. 3) 1/6. **19.55.** -3. **19.56.** 1) 0. 2) 0. 3) 1/3. 4) $-1/2$. **19.57.** 1) 1/2. 2) $2+\ln 2$. 3) 1/3. **19.58.** 5/18. **19.59.** 1) 1. 2) 17/12. **19.60.** 1) 2/5. 2) 11/6. 3) $-4/3$. 4) 1/2.

§ 20. Investigación de funciones

20.1. 1) $(-\infty;\ 1/2)$, $(3;\ +\infty)$ son los intervalos de crecimiento, $(1/2;\ 3)$ es el intervalo de decrecimiento. 2) $(-\infty;\ 6)$ es el intervalo de crecimiento. $(6;\ +\infty)$ es el intervalo de decrecimiento. 3) $(-\infty;\ 1)$, $(3;\ +\infty)$ son los intervalos de crecimiento, $(1;\ 3)$ es el intervalo de decrecimiento. 4) $(-\infty;\ -3/2)$, $(-1/2;\ +\infty)$ son los intervalos de crecimiento, $(-3/2;\ -1/2)$ es el intervalo de decrecimiento.

20.2. 1) $(-\infty;\ 1/3)$ es el intervalo de crecimiento, $(1/3;\ +\infty)$ es el intervalo de decrecimiento. 2) $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 1)$ son los intervalos de decrecimiento; $(1;\ +\infty)$ es el intervalo de crecimiento. 3) $(-\infty;\ -1)$, $(0;\ 1)$ son los intervalos de crecimiento, $(-1;\ 0)$, $(1;\ +\infty)$ son los intervalos de decrecimiento. 4) $(0;\ \alpha)$ es el intervalo de crecimiento, $(\alpha;\ +\infty)$ es el intervalo de decrecimiento. 5) $(0;\ \sqrt{5})$ es el intervalo de decrecimiento, $(\sqrt{5};\ +\infty)$ es el intervalo de crecimiento. 6) $(0;\ 1/\sqrt{e})$ es el intervalo de decrecimiento, $(1/\sqrt{e};\ +\infty)$ es el intervalo de crecimiento. 7) $(0;\ 1)$, $(1;\ e)$ son los intervalos de decrecimiento, $(e;\ +\infty)$ es el intervalo de crecimiento. 8) $(-\infty;\ 3)$, $(3;\ +\infty)$ son los intervalos de decrecimiento. 9) $(0;\ +\infty)$ es el intervalo de decrecimiento. 10) $\left(2k-\frac{3}{4};\ 2k+\frac{1}{4}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ son los intervalos de crecimiento, $\left(2k+\frac{1}{4};\ 2k+\frac{5}{4}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, son los intervalos de decrecimiento.

20.3. 1) $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2};\ +\infty)$ son los intervalos de crecimiento, $(-\sqrt{2};\ -1)$, $(-1;\ \sqrt{2})$ son los intervalos de decrecimiento. 2) $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$ son los intervalos de decrecimiento; 3) $(-\infty;\ -3)$, $(3;\ +\infty)$ son los intervalos de decrecimiento, $(-3;\ -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\ \sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\ 3)$ son los intervalos de crecimiento. 4) $(-\infty;\ 0)$, $(2;\ +\infty)$ son los intervalos de decrecimiento, $(0;\ 2)$ es el intervalo de crecimiento.

20.4. 1) $(-\infty;\ -50)$, $(-50;\ 25)$ son los intervalos de crecimiento, $(25;\ +\infty)$ es el intervalo de decrecimiento. 2) $(-2\sqrt{2};\ -2)$, $(0;\ 2)$ son los intervalos de crecimiento, $(-2;\ 0)$, $(2,\ 2\sqrt{2})$ son los intervalos de decrecimiento. 3) $\left(-\frac{9}{2};\ -3\right)$, $(0;\ +\infty)$ son los intervalos de crecimiento, $(-3;\ 0)$ es el intervalo de decrecimiento. 4) $(-1;\ -2{,}5)$ es el intervalo de decrecimiento, $(-2/5;\ +\infty)$ es el intervalo de crecimiento. 5) $(-\infty;\ -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\ +\infty)$ son los intervalos de crecimiento, $(-\sqrt{3};\ -1)$, $(-1;\ 1)$, $(1;\ \sqrt{3})$ son los intervalos de decrecimiento. 6) $(-\infty;\ -1)$, $(1;\ +\infty)$ son los intervalos de crecimiento. 7) $(-\infty;\ -1)$; $(0;\ +\infty)$ son los intervalos de crecimiento.

20.5. 1) $(-\infty;\ -3)$, $(-2;\ 0)$ son los intervalos de crecimiento, $(-3;\ -2)$; $(0;\ +\infty)$ son los intervalos de decrecimiento. 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, son los intervalos de crecimiento, $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, son los intervalos de decrecimiento.

20.6. 1) $(-\infty; 0)$ es el intervalo de crecimiento, $(0; +\infty)$ es el intervalo de decrecimiento. 2) $(0; 1)$ es el intervalo de crecimiento, $(1; +\infty)$ es el intervalo de decrecimiento.

20.7. $(-\infty; -e^{-2})$ es el intervalo de crecimiento, $(-e^{-2}; 0)$ es el intervalo de decrecimiento.

20.8. 1) $a \leqslant 0$. 2) $a \leqslant -3$, $a \geqslant 1$. 3) $a \geqslant 1$. 4) $a \geqslant 5$. 5) $a \geqslant 6$. 6) $-1 \leqslant a \leqslant 7$.

20.11. No, no se deduce; contraejemplo $f(x) = x + \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$.

20.13. 1) $x = 0$ es el punto de máximo, $x = 8/3$ es el punto de mínimo. 2) $x = (3 - \sqrt{17})/4$ y $x = 3$ son los puntos de mínimo, $x = (3 + \sqrt{17})/4$ es el punto de máximo. 3) $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$ son los puntos de máximo, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ son los puntos de mínimo, $k \in \mathbb{Z}$. 4) $x = (2 + \sqrt{7})/3$ son los puntos de máximo, $x = (2 - \sqrt{7})/3$ es el punto de mínimo, 5) $x = 4$ es el punto de mínimo. 6) $x = 1/2$ es el punto de mínimo. 7) $x = 1$ es el punto de máximo, $x = 2$ es el punto de mínimo. 8) $x = -5/4$ es el punto de máximo.

20.14. $x = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. **20.15.** $x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

20.16. 1) El máximo $y = 12$ con $x = 0$, el mínimo $y = -4$ con $x = \pm 2$. 2) El máximo $y = 2$ con $x = 0$. 3) El máximo $y = 1$ con $x = 2$, los mínimos $y = 3/4$ con $x = 1$ y $x = 3$. 4) El mínimo $y = 4$ con $x = 1$. 5) El mínimo $y = -324$ con $x = 1$, el máximo $y = 0$ con $x = -5$. 6) El mínimo $y = -108$ con $x = 0$, el máximo $y = 0$ con $x = -2$.

20.17. 1) El máximo $y = -4$ con $x = 1/2$. 2) El mínimo $y = -1/4$ con $x = -2$, el máximo $y = 1/4$ con $x = 2$. 3) El máximo $y = -8$ con $x = -3$, el mínimo $y = 0$ con $x = 1$. 4) El máximo $y = -27/4$ con $x = 5$. 5) El mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el mínimo $y = 32/3$ con $x = 4$, el máximo $y = 1/4$ con $x = -1$. 6) El mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el máximo $y = -256/27$ con $x = -4$.

20.18. 1) Los mínimos $y = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ con $x = 2\pi k - \dfrac{\pi}{3}$, los máximos $y = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ con $x = 2\pi k + \dfrac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, 2) Los máximos $y = 1$ con $x = 2\pi k$ y $x = 2\pi k + \dfrac{\pi}{2}$, los máximos $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ con $x = 2\pi k + \dfrac{5\pi}{4}$, los mínimos $y = -1$ con $x = 2\pi k + \pi$ y $x = 2\pi k + \dfrac{3\pi}{2}$, los mínimos $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ con $x = 2\pi k + \dfrac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. 3) Los máximos $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ con $x = 2\pi k + \dfrac{2\pi}{3}$ los mínimos $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ con $x = 2\pi k - \dfrac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. 4) No hay extremos. 5) Los máximos $y = \dfrac{\pi + 6\sqrt{3} - 12}{12} + \pi k$ con $x = \dfrac{\pi}{12} + \pi k$, los mínimos $y = \dfrac{5\pi - 6\sqrt{3} - 12}{12} + \pi k$ con $x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 6) El máximo $y = \dfrac{\pi}{2} - 1$ con $x = -1$, el mínimo $y = 1 - \dfrac{\pi}{2}$ con $x = 1$. 7) Los mínimos $y = -2n$ con $x = 2 - 2n$, los mínimos $y = 1 - 2n$ con $x = 1 + 2n$, los máximos $y = 2n - 1$ con $x = 3 - 2n$, los máximos

$y = 2n$ con $x = 2 + 2n$, $n \in \mathbb{N}$. 8) El mínimo $y = \frac{\pi}{4} - 1$ con $x = 1$, el máximo $y = 0$ con $x = 0$.

20.19. 1) El mínimo $y = -e^2/3$ con $x = 2/3$. 2) El mínimo $y = -6e^{-3}$ con $x = -3$, el máximo $y = 2e$ con $x = 1$. 3) El mínimo $y = -4e^2$ con $x = -2$, el máximo $y = 8e^{-4}$ con $x = 4$. 4) El máximo $y = 27e^{-3}/64$ con $x = 3/4$. 5) Los máximos $y = 4e^{-2}$ con $x = \pm\sqrt{2}$, el mínimo $y = 0$ con $x = 0$. 6) El máximo $y = 5^5\ e^{-4}$ con $x = 4$. 7) El máximo $y = 6$ con $x = 0$. 8) El máximo $y = 1/e$ con $x = -1$, el mínimo $y = 4\sqrt{e}$ con $x = 2$.

20.20. 1) El mínimo $y = -2/e$ con $x = e^{-2}$. 2) El mínimo $y = 0$ con $x = 1$, el máximo $y = 4e^{-2}$ con $x = e^2$. 3) El máximo $y = 1/\ln 3$ con $x = -3$. 4) Los mínimos $y = -4$ con $x = 1$ y $x = 3$. 5) Los máximos $y = -1$ con $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 6) El mínimo $y = \ln 2 - \pi/2$ con $x = 1$.

20.21. 1) El máximo $y = 13/4$ con $x = 11/4$, el mínimo unilateral $y = 3$ con $x = 3$. 2) El mínimo $y = 0$ con $x = 1$, el máximo $y = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ con $x = 1/3$. 3) El mínimo $y = 0$ con $x = 0$; el máximo $y = 4/27$ con $x = 8/27$. 4) El mínimo $y = -3\sqrt[3]{2}/8$ con $x = 3/4$. 5) El mínimo $y = 1$ con $x = 0$, los máximos $y = \sqrt[3]{4}$ con $x = \pm\sqrt{2}/2$. 6) El mínimo $y = \sqrt{3}$ con $x = 2\sqrt{3}$, el máximo $y = -\sqrt{3}$ con $x = -2\sqrt{3}$. 7) Los mínimos $y = 0$ con $x = 2$ y $x = 4$, el máximo $y = 1$ con $x = 3$. 8) El mínimo $y = -\sqrt[3]{4/3}$ con $x = 4/3$, el máximo $y = 0$ con $x = 2$. 9) El mínimo $y = \sqrt[3]{12}$ con $x = 4/3$, el máximo $y = 0$ con $x = 2/3$. 10) El máximo $y = 1$ con $x = -1$.

20.22. 1) El mínimo $y = e^{-1/e}$ con $x = 1/e$. 2) El máximo $y = e^{1/e}$ con $x = e$.

20.23. 1) El máximo $y = 27/16$ con $x = 9/2$, el mínimo $y = 0$ con $x = 5$. 2) El máximo $y = 49/24$ con $x = 7/12$, el mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el mínimo $y = 1$ con $x = 1$. 3) El máximo $y = 1/\sqrt{21}$ con $x = 1/3$, el máximo $y = 1/\sqrt{33}$ con $x = 7/3$, el mínimo $y = 1/7$ con $x = 1$. 4) El máximo $y = 2\sqrt[3]{4/3}$ con $x = 4/3$, los mínimos $y = 0$, con $x = 0$ y $x = 2$. 5) El máximo $y = 9\sqrt[3]{6/8}$ con $x - 5/4$, el mínimo $y = 0$ con $x = 1$. 6) Los máximos $y = 2(\sqrt{2} - 1)\, e^{\sqrt{2} - 1}$ con $x = \pm(1 - \sqrt{2})$, los mínimos $y = 0$ con $x \pm 1$, el mínimo $y = 1$ con $x = 0$. 7) Los máximos $y = 2(\sqrt{5} + 1)\, e^{-1-\sqrt{5}}$ con $x = \pm(1 + \sqrt{5})$, el máximo $y = 4$ con $x = 0$, los mínimos $y = 0$ con $x = \pm 2$. 8) El máximo $y = 1/2$ con $x = 1$, el mínimo $y = 1/e$ con $x = 0$.

20.24. 1) El máximo $y = \cos 1$ con $x = \pi/2$. 2) El máximo $y = 2$ sen $((\pi + 6)/4)$ con $x = (6 - \pi)/4$, el mínimo $y = \cos 3$ con $x = 3$. 3) El mínimo $y = 2 - \sqrt{3}$ con $x = \pi/2$.

20.25. 1) El máximo $y = 0$ con $x = 0$, el mínimo $y = -1/e$ con $x = 1/e$. 2) El máximo $y = 1$ con $x = 0$, el mínimo $y = e^{-1/(3e)}$ con $x = 1/\sqrt[3]{e}$. 3) El máximo $y = e^{1/e^2}$ con $x = 1/e$, el mínimo $y = 1$ con $x = 1$.

20.26. 1) El máximo $y = n^n e^{1-n}$ con $x = n - 1$, $n \in \mathbb{N}$; si n es par, el mínimo $y = 0$ con $x = -1$. 2) Si n es impar, el máximo $y = 1$ con $x = 0$; si n es par, no hay extremos. 3) El máximo $y = k^k n^n/(k + n)^{k+n}$ con $x = k/(k + n)$; si k es par, el mínimo $y = 0$ con $x = 0$; si n es par, el mínimo $y = 0$ con $x = 1$. 4) Si $ab > 0$, $a > 0$, el mínimo $y = 2\sqrt{ab}$ con $x = \frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$; si $ab > 0$, $a < 0$, el máximo $y = -2\sqrt{ab}$ con $x = \frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$.

20.27. Si $\varphi(a) > 0$ y n es par, el mínimo $y = 0$; si $\varphi(a) < 0$ y n es par, el máximo $y = 0$; si n es impar, no hay extremo.

20.28. 1) El máximo $y=\sqrt[3]{4}$ con $x=2$, el mínimo $y=0$ con $x=0$. 2) El máximo $y=\sqrt{2}-1$ con $x=-1$, el mínimo $y=1-\sqrt{2}$ con $x=1$. 3) El máximo $y=\sqrt{2}$ con $x=0$, los mínimos $y=\sqrt{(2+\sqrt{3})/2}$ con $x=\pm\sqrt{2/2}$. 4) El mínimo $y=3/\sqrt[3]{32}$ con $x=-1/\sqrt[3]{32}$.

20.29. 1) El mínimo $y=4$ con $x=1/2$. 2) El máximo $y=0$ con $x=-\ln 2/2$.

20.37. 1) 9; -7. 2) 80; 0. 3) No existe el máximo absoluto; -204. 4) 3; -13. 5) 2; -10.

20.38. 1) No existe el valor máximo absoluto; 64; 2) 1; 3/5. 3) 2; 2/3. 4) 1; $2\sqrt{2}-2$.

20.39. 1) $5-2\sqrt{5}$; -1. 2) $e-2$; $2-2\ln 2$. 3) 0; $-5/e$. 4) $5+1{,}5\ln 2$; 0. 5) e^5; $-e^3$. 6) 1; $1/e^{1/e}$.

20.40. 1) $3\sqrt{3}/2$; -2. 2) 3/4; 3/4. 3) 13π; $12\pi-1$. 4) π; $-\pi$.

20.41. 1) El mínimo $y=0$ con $x=3$, el mínimo $y=9$ con $x=0$, el máximo $y=4e$ con $x=1$; $m=0$, $M=e^4$. 2) El mínimo $y=-27e$ con $x=0$, el máximo $y=-65$ con $x=-1$; $m=-125e$, $M=e^5$. 3) Los mínimos $y=1$ con $x=0$ y $x=-1$, el máximo $y=e^{2\sqrt{3}/9}$ con $x=-2/3$; $m=1$, $M=e^2$. 4) Los mínimos $y=0$ con $x=0$ y $x=-1$, el máximo $y=\ln\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ con $x=-1/3$; $m=0$, $M=\ln 3$. 5) Los mínimos $y=0$ con $x=0$ y $x=1$, el máximo $y=\operatorname{arctg}(2\sqrt{3/9})$ con $x=1/3$; $m=0$, $M=\operatorname{arctg} 2$. 6) El mínimo $y=\operatorname{arctg}(2\sqrt{3/9})$ con $x=2/3$, los máximos $y=\pi/2$ con $x=0$ y $x=1$; $m=\operatorname{arcctg} 2$, $M=\pi/2$.

20.42. 1) El mínimo $y=-2$ con $x=1/e$, el máximo $y=0$ con $x=0$; $m=-2$, $M=4e\ln 2$. 2) El mínimo $y=e^{-1/(2e)}$ con $x=e^{-1/2}$, el máximo $y=1$ con $x=0$; $m=-2$; $M=16$. 3) El mínimo $y=2/\sqrt{3}$ con $x=\sqrt{3}$, el mínimo $y=4/\sqrt{6}$ con $x=\sqrt{6}$, el máximo $y=5/3$ con $x=2$; $m=2/\sqrt{3}$, $M=2$.

20.43. 1) El mínimo $y=-2$ con $x=-2\pi/3$, el máximo $y=3/2$ con $x=0$; $m=-2$, $M=3/2$. 2) El mínimo $y=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ con $x=0$, el mínimo $y=-\sqrt{2}$ con $x=-\pi/2$, los máximos $y=0$ con $x\in(0;\pi)$; $m=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $M=0$. 3) El mínimo $y=-\sqrt{2}$ con $x=-5\pi/12$, el mínimo $y=-2\operatorname{sen}(\pi/12)$ con $x=\pi/4$, el mínimo $y=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ con $x=0$; $m=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $M=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

20.44. 1) $n=7$. 2) $n=1985$. 3) $n=10$. 4) $n=7$. 5) $n=12$. 6) $n=14$.

20.45. 1) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$; $+\infty$. 2) $-\infty$; -1. 3) $-\infty$, 1. 4) $\sqrt{2}-3\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; $+\infty$.

20.46. 1) 0; 4. 2) $-(\sqrt{2}/2)\,e^{-3\pi/4}$; 1. 3) 0; $1/e$. 4) $1/e^{1/e}$; 1.

20.47. 1) 5; $+\infty$. 2) 5/2; $+\infty$. 3) 0; $\sqrt{3}$.

4) $\inf f=\begin{cases}\frac{1}{3}, & a\leqslant 0,\\ \frac{a^2+1}{a^2+3}, & 0<a,\end{cases}$ $\sup f=1$.

20.48. 1) Convexa hacia las y negativas. 2) Convexa hacia las y positivas. 3) Convexa hacia las y negativas. 4) Convexa hacia las y positivas. 5) Convexa

hacia las y negativas. 6) Convexa hacia las y positivas con $x > 0$, hacia las y negativas con $x < 0$.

20.49. 1) Convexa hacia las y positivas sobre el intervalo $(-1/2;\ 1/2)$, convexa hacia las y negativas sobre los intervalos $(-\infty;\ -1/2)$ y $(1/2;\ +\infty)$; los puntos de inflexión $x = \pm 1/2$. 2) $(-\infty;\ 1)$ es el intervalo de convexidad hacia las y positivas, $(1;\ +\infty)$, el intervalo de convexidad hacia las y negativas; el punto de inflexión $x = 1$. 3) $(-\infty;\ -1)$ y $(1;\ +\infty)$ son los intervalos de convexidad hacia las y positivas, $(-1;\ 1)$, el intervalo de convexidad hacia las y positivas; no hay puntos de inflexión. 4) $(-\infty;\ -6)$ y $(0;\ 6)$ son los intervalos de convexidad hacia las y negativas, $(-6;\ 0)$ y $(6;\ +\infty)$, los intervalos de convexidad hacia las y positivas; los puntos de inflexión $x = 0$; $x = \pm 6$. 5) $(-\infty;\ -3)$ es el intervalo de convexidad hacia las y negativas, $(-3;\ +\infty)$, el intervalo de convexidad hacia las y positivas; el punto de inflexión $x = -3$. 6) $(0;\ (2 + \sqrt{3})/\sqrt{3})$ es el intervalo de convexidad hacia las y positivas, $((2 + \sqrt{3})/\sqrt{3};\ +\infty)$, el intervalo de convexidad hacia las y negativas; el punto de inflexión $x = (2 + \sqrt{3})/\sqrt{3}$. 7) $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ y $(0;\ \sqrt{3})$ los intervalos de convexidad hacia las y negativas, $(-\sqrt{3};\ 0)$ y $(\sqrt{3};\ +\infty)$, los intervalos de convexidad hacia las y positivas; los puntos de inflexión $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. 8) $(-\infty;\ -3)$, $(-1;\ 0)$, $(1;\ 3)$ son los intervalos de convexidad hacia las y negativas $(-3;\ -1)$, $(0;\ 1)$, $(3;\ +\infty)$, los intervalos de convexidad hacia las y positivas; los puntos de inflexión $x = 0$, $x \pm 3$.

20.50. 1) $(\pi(4k + 1)/2;\ \pi(4k + 3)/2$ son los intervalos de convexidad hacia las y negativas, $(\pi(4k + 3)/2;\ \pi(4k + 5)/2)$, los intervalos de convexidad hacia las y positivas, los puntos de inflexión $x = \pi(2k + 1)/2$, $k \in \mathbb{Z}$. 2) $(2k\pi;\ (2k + 1)\pi)$ son los intervalos de convexidad hacia las y positivas, $((2k + 1)\pi;\ (2k + 2)\pi)$, los intervalos de convexidad hacia las y negativas, los puntos de inflexión $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 3) $(-\infty;\ -1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2};\ +\infty)$ son los intervalos de convexidad hacia las y negativas, $(-1/\sqrt{2};\ \ 1/\sqrt{2})$, el intervalo de convexidad hacia las y positivas; los puntos de inflexión $x = \pm 1/\sqrt{2}$. 4) $(-\infty;\ -1/2)$ son los intervalos de convexidad hacia las y positivas, $(-1/2;\ 0)$ y $(0;\ +\infty)$, el intervalo de convexidad hacia las y negativas; el punto de inflexión $x = -1/2$. 5) $(0;\ 10e\sqrt{e})$ es el intervalo de convexidad hacia las y positivas. $(10e\sqrt{e};\ +\infty)$, el intervalo de convexidad hacia las y negativas; el punto de inflexión $x = 10e\sqrt{e}$. 6) $(e^{\pi(8k-3)/4};\ e^{\pi(8k+1)/4}$, los intervalos de convexidad hacia las y negativas, $(e^{\pi(8k+1)/4};\ e^{\pi(8k+5)/4}$, los intervalos de convexidad hacia las y positivas; los puntos de inflexión $x = e^{\pi(4k+1)/4}$, $k \in \mathbb{Z}$. 7) $(-\infty;\ 0)$ es el intervalo de convexidad hacia las y positivas, $(0;\ +\infty)$, el intervalo de convexidad hacia las y negativas; no hay puntos de inflexión. 8) $(-\infty;\ 1/2)$ es el intervalo de convexidad hacia las y negativas $(1/2;\ +\infty)$, el intervalo de convexidad hacia las y positivas; el punto de inflexión $x = 1/2$.

20.51. 1) $x = \pm 1$. 2) $x = 2$, $x = 4$. 3) No hay puntos de inflexión. 4) $x = \pm 1$, $x = \pm 1/\sqrt{5}$.

20.52. 1) $x = -\sqrt[3]{2/2}$. 2) $x = -2 \pm \sqrt{3}$. 3) $x = \pm 2$. 4) $x = 1$. 5) $x = 3$.

20.53. 1) $x = -3$, $x = -1$. 2) $x = 0$, $x = (3 \pm \sqrt{3})/4$. 3) $x = 1/e\sqrt{e}$. 4) $x = e^{8/3}$. 5) $x = 2k\pi \pm \arccos((\sqrt{5} - 1)/2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

20.54. 1) $(1;\ 0)$, $(1/2;\ -9/4)$. 2) $(-3;\ 294)$, $(2;\ 114)$. 3) $(1/\sqrt{3};\ 23/18)$, $(-1/\sqrt{3},\ 23/18)$. 4) $(4;\ -1024/5)$. 5) $(8/7;\ -31/9)$. 6) El gráfico de la función no tiene puntos de inflexión.

20.55. 1) $(0;\ 1)$, $(1;\ 0)$. 2) $(-1;\ -1)$, $(0;\ -1)$. 3) $(5;\ 5)$. 4) $(\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{2})$.

20.56. 1) $((2+\sqrt{2})/2;\ \sqrt{e}),\ ((2-\sqrt{2})/2;\ \sqrt{e})$. 2) $(0;\ 0),\ \left(\sqrt{6};\ \frac{1}{e}\times\times\sqrt{\frac{6}{e}}\right),\ \left(-\sqrt{6};\ -\frac{1}{e}\sqrt{\frac{6}{e}}\right)$. 3) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\ln 2\right)$. 4) $\left((6k++(-1)^k)\,\pi/12;\ \frac{2-\sqrt{3}}{4}\,e^{-(6k+(-1)^k)\,\pi/6}\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

20.57. 1) $x\pm\sigma$. 2) $x=0,\ x=\pm b\sqrt{3}$.

20.58. 1) Un punto de inflexión $x=-b/(3a)$. 2) Si $3b^2-8ac>0$, entonces hay dos puntos de inflexión $x=(-3\,3b\pm\sqrt{9b^2-24ac})/12a$; si $3b^2--8ac\leqslant 0$, entonces no hay puntos de inflexión.

20.59. $a\in\left(-\infty;\ -\frac{e}{6}\right),\ a\in(0;\ +\infty)$. **20.63.** 1) No puede ser. 2) No puede ser, **20.67.** 1) $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$. 2) $(9/2;\ 27/2)$. 3) $(5;\ 21/2)$, 4) $(1/10;\ 1/4)$.

20.73. *Indicación.* Es posible bien hacer uso de la desigualdad del problema 20.72. haciendo en ella $x=a/b,\ \alpha=1/p,\ p/(p-1)=q$, o bien tomando el logaritmo de la desigualdad de Young, utilizar la convexidad hacia las y positivas de la función $\ln x$.

20.74. *Indicación.* Hagan en la desigualdad de Young (problema 20.73)

$$a=\frac{x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p},\quad b=\frac{y_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q}$$

y sumen las desigualdades obtenidas por i desde 1 hasta n.

20.75. *Indicación.* Apliquen la desigualdad de Hölder (problema 20.74) a las sumas del segundo miembro de la identidad:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p=\sum_{i=1}^{n}x_i\,(x_i+y_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}y_i\,(x_i+y_i)^{p-1}.$$

§ 21. Trazado de gráficos

21.3. 1) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas; $(-1;\ 0)$, $(2;\ 0)$, $(0;\ 4)$; el mínimo $y=0$ con $x=2$, el máximo $y=4$ con $x=0$; el punto de inflexión $(1;\ 2)$. 2) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(1;\ 0)$, $((-1\pm\sqrt{13})/2;\ 0)$, $(0;\ -3)$; el mínimo $y=-16\sqrt{3}/9-3$ con $x==-2\sqrt{3}/3$, el máximo $y=16\sqrt{3}/9-3$ con $x=2\sqrt{3}/3$; el punto de inflexión $(0;\ -3)$. 3) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(1;\ 0)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ 2)$; el mínimo $y=0$ con $x=1$, el máximo $y=4$ con $x=-1$; el punto de inflexión $(0;\ 2)$. 4) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(2;\ 0)$, $(-4;\ 0)$, $(0;\ 4)$; el mínimo $y=0$ con $x=2$, el máximo $y==8$ con $x=-2$; el punto de inflexión $(0;\ 4)$. 5) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$; el mínimo $y=-27/256$ con $x=1/4$; los puntos de inflexión $(1/2;\ -1/16)$, $(1;\ 0)$. 6) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(-2;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ 4)$; los mínimos $y=0$ con $x=-2$ y $x=1$, el máximo $y=81/16$ con $x=-1/2$; los puntos de inflexión $(0;\ 4)$, $(-1;\ 4)$. 7) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(-1;\ 0)$,

(1; 0), (0; $-$ 1); el máximo $y = 0$ con $x = -1$, el mínimo $y = -864/3125$ con $x = -1/5$; los puntos de inflexión de la función $x = 1$, $x = (\sqrt{34} - 2)/10 \approx$ $\approx 0{,}4$, $x = -(\sqrt{34} + 2)/10 \approx -0{,}8$. 8) El gráfico es simétrico respecto al eje de ordenadas; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: (0; 0), ($\pm$ 1; 0); los mínimos $y = -27/8$ con $x = \pm 1/2$, el máximo $y = 0$ con $x = 0$; los puntos de inflexión de la función

$$x = \pm 1, \quad x = \pm \sqrt{(17 + \sqrt{177})/56} \approx \pm 0{,}7,$$

$$x = \pm \sqrt{(17 - \sqrt{177})/56} \approx \pm 0{,}3.$$

21.4. 1) Campo de definición: todo el eje numérico salvo $x = 1$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $((\pm \sqrt{5} - 1)/2; 0)$, $(0; -1)$; las asíntotas $y = 1$ y $x = 1$; el mínimo $y = -5/4$ con $x = 1/3$; el punto de inflexión $(0; -1)$. 2) Campo de definición: $x \neq 2$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $((1 \pm \sqrt{33})/4; 0)$, $(0; 1)$; las asíntotas $y = -1$ y $x = 2$; el máximo $y = 33/8$ con $x = 10/7$; el punto de inflexión $(8/7; 31/9)$. 3) Campo de definición: $x \neq 1$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$; las asíntotas $y = 0$ y $x = 1$; el máximo $y = 0$ con $x = 0$, el mínimo $y = -80/27$ con $x = -2$; el punto de inflexión de la función $x = -2 \pm$ $\pm \sqrt{3}$. 4) Campo de definición: $x \neq -1$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(1; 0)$, $(0; 1)$; las asíntotas $y = 0$ y $x = -1$; el mínimo $y = 0$ con $x = 1$, el máximo $y = 2/27$ con $x = 5$; los puntos de inflexión de la función $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$. 5) Campo de definición: $x \neq 1$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$; la asíntota $x = 1$; el máximo $y = 27/4$ con $x = 3/2$; el punto de inflexión $(0; 0)$. 6) Campo de definición: $x \neq 0$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(2; 0)$, $(\pm 1, 0)$; la asíntota $x = 0$; el mínimo $y \approx -0{,}3$ con $x \approx 1{,}5$; el punto de inflexión de la función $x = -\sqrt[3]{2}$. 7) El punto de intersección con el eje de ordenadas $(0; 0{,}2)$; la asíntota $y = 1$; el mínimo $y = 3 - 2\sqrt{2}$ con $x = 1 - \sqrt{2}$, el máximo $y = 3 + 2\sqrt{2}$ con $x = 1 + \sqrt{2}$; los puntos de inflexión $(-\sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$, $(3; 5)$. 8) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(0; 5{,}5)$, $((-21 \pm$ $\pm 2\sqrt{14})/5; 0)$; la asíntota $y = 5$; el mínimo $z = -4\sqrt{2}$ con $x = -1 -$ $- 2\sqrt{2}$, el máximo $y = 4\sqrt{2}$ con $x = 2\sqrt{2} - 1$; los puntos de inflexión $(-3; -2)$, $(\pm \sqrt{21}; 1 \pm \sqrt{21})$.

21.5. 1) Campo de definición: $x \neq \pm 1$; el gráfico es simétrico con relación al origen de coordenadas; el punto de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$; las asíntotas $y = x$, $x = \pm 1$; el mínimo $y = 3\sqrt{3}/2$ con $x = \sqrt{3}$, el máximo $y = -3\sqrt{3}/2$ con $x = -\sqrt{3}$; el punto de inflexión $(0; 0)$. 2) Campo de definición: $x \neq 2$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(1; 0)$, $(0; -1/4)$; el mínimo $y = 27/4$ con $x = 4$; las asíntotas $y = x + 1$, $x = 2$; el punto de inflexión $(1; 0)$. 3) Campo de definición: $x \neq 7$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(5; 0)$, $(0; -125/49)$; las asíntotas $y = x - 1$, $x = 7$; el mínimo $y = 13{,}5$ con $x = 11$; el punto de inflexión $(5; 0)$. 4) Campo de definición: $x \neq 1$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$, $(-2; 0)$; las asíntotas $y = x + 4$, $x = 1$; los mínimos $y = 0$ con $x = 0$ e $y = 32/3$ con $x = 4$, el máximo $y = 1/4$ con $x = -1$; el punto de inflexión $(-2/7; 16/189)$. 5) Campo de definición: $x \neq 0$; las asíntotas $y = x$ y $x = 0$; el mínimo $y = 19/4$ con $x = 2$, los máximos $y = 5$ con $x = 1$ e $y =$ $= -17/3$ con $x = -3$; el punto de inflexión $(9/7; 929/189)$. 6) Campo de definición: $x \neq 2$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; 1/4)$; las asíntotas $y = x + 3$, $x = 2$; el máximo $y = 1/4$ con $x = 0$, los mínimos $y = 0$ con $x = 1$ e $y = 32/3$ con $x = 5$; el punto de inflexión $(5/7; 16/185)$.

21.6. 1) Campo de definición: $x \neq -\sqrt[3]{2}$; el punto de intersección con los ejes (0; 0); las asíntotas $y = x$, $x = -\sqrt[3]{2}$; el mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el máximo $y = -8/3$ con $x = -2$; el punto de inflexión $(\sqrt[3]{4};\ 5\sqrt[3]{25}/3)$. 2) Campo de definición: $x \neq -1$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0); las asíntotas $y = x - 3$, $x = -1$; el mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el máximo $y = -256/27$ con $x = -4$. 3) Campo de definición: $x \neq 0$; el gráfico es simétrico con relación al origen de coordenadas; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $x = \pm\sqrt{2/\sqrt{3} - 1} \approx \pm 0{,}4$; las asíntotas $y = 3x$, $x = 0$; los puntos de inflexión (1; 8), (− 1; − 8); la función crece por doquier sobre el campo de definición. 4) Campo de definición: $x \neq 1$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: (− 1; 0), (0; 1); las asíntotas $y = 1$, $x = 1$; el mínimo $y = 0$ con $x = -1$; el punto de inflexión (− 4; 81/625). 5) Campo de definición; $x \neq \pm 1$; el gráfico es simétrico con relación al origen de coordenadas; el punto de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0); las asíntotas $y = x$, $x = \pm 1$; el mínimo $y = 25\sqrt{5}/16$ con $x = \sqrt{5}$; el máximo $y = -25\sqrt{5}/16$ con $x = -\sqrt{5}$; el punto de inflexión (0; 0). 6) Campo de definición: $x \neq 2$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas (1; 0), (0; − 1/16); las asíntotas $y = x + 3$, $x = 2$; el mínimo $y = 5^5/4^4$ con $x = 6$; el punto de inflexión (1; 0). 7) Campo de definición: $x \neq 0$; el punto de intersección con el eje de abscisas $(\sqrt[3]{8};\ 0) \approx (1{,}52;\ 0)$; la asíntota $y = x$; el mínimo $y = -2{,}5$ con $x = -2$. 8) Campo de definición: $x \neq \pm 1$; el gráfico es simétrico con relación al origen de coordenadas; el punto de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0); la asíntota $y = x$; el máximo $y = -5\sqrt[4]{5}/4 \approx -1{,}87$ con $x = -\sqrt[4]{5} \approx -1{,}49$, el mínimo $y = 5\sqrt[4]{5}/4 \approx 1{,}87$ con $x = \sqrt[4]{5} \approx 1{,}49$; el punto de inflexión (0; 0).

21.7. 1) Campo de definición: $|x| \geqslant 1$; las asíntotas $y = 2x$ con $x \to +\infty$ e $y = 0$ con $x \to -\infty$; la función decrece con $x \leqslant -1$ y crece con $x \geqslant 1$; es convexa hacia las y positivas. 2) Campo de definición: $x \leqslant 0$ y $x \geqslant 2$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0); las asíntotas $y = 1$ con $x \to +\infty$ e $y = 2x - 1$ con $x \to -\infty$; la función crece con $x \leqslant 0$ y decrece con $x \geqslant 2$; es convexa hacia las y negativas. 3) Campo de definición $\mathbb{R}$; simetría respecto a los ejes de coordenadas; el punto de intersección con el eje de ordenadas (0; 2); los mínimos $y = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ con $x = \pm 1$, el máximo $y = 2$ con $x = 0$; la función es convexa hacia las y positivas. 4) Campo de definición $\mathbb{R}$; simetría respecto al origen de coordenadas; el punto de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0); la asíntota $y = 0$; el máximo $y = \sqrt[3]{16} \approx 2{,}5$ con $x = 2$, el mínimo $y = -\sqrt[3]{16} \approx -2{,}5$ con $x = -2$; el punto de inflexión (0; 0). 5) El campo de definición: $x \geqslant -1$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas (0; − 1), $(2 \pm \sqrt{7};\ 0)$; el mínimo $y = -\sqrt{2}$ con $x = 1$; la función es convexa hacia las y negativas. 6) Campo de definición: $x \geqslant 0$; el punto común con el eje de ordenadas (0; 1/3); la función crece estrictamente; el punto de inflexión $x_0 = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1{,}62$, $y_0(x_0) \approx 8$.

21.8. 1) Campo de definición: $x \geqslant -9/2$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0), (− 9/2; 0); los mínimos $y = 0$ con $x = 0$ y $x = -9/2$, el máximo $y = 3\sqrt{3}$ con $x = -3$; la función es convexa hacia las y negativas con $x > 0$ y hacia las y positivas con $-9/2 < x < 0$; el punto anguloso (0; 0). 2) El campo de definición: $x \leqslant 1$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0) y (1; 0); el máximo $y = 2/(3\sqrt{3}) \approx 0{,}38$ con $x = 2/3$, los mínimos $y = 0$ con $x = 0$ y $x = 1$; (0; 0) es el punto anguloso; la función es convexa hacia las y negativas con $x \leqslant 0$ y hacia las y positivas con $0 \leqslant x \leqslant 1$. 3) El campo de definición: $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 0$ y $x \geqslant \sqrt{3}$; los puntos de intersección con los ejes (0; 0), $(\pm\sqrt{3};\ 0)$; el máximo $y = \sqrt{2}$ con

$x = -1$; el punto de inflexión de la función $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$. 4) Campo de definición: $x \geqslant -1$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(-1; 0)$ y $(0; 0)$; los mínimos $y = 0$ con $x = -1$ y $x = 0$, el máximo $y = 16/(25\sqrt{5}) \approx 0{,}29$ con $x = -4/5$; el punto de inflexión de la función $x = (\sqrt{5} - 5)/5 \approx -0{,}55$, $y = (6 - 2\sqrt{5})/5\sqrt[4]{5} \approx 0{,}21$. 5) Campo de definición: $x \geqslant -1$; el mínimo $y \approx -6\sqrt{15}/125 \approx -0{,}19$ con $x = -2/5$; el punto de inflexión $(-4/5; -4/(25\sqrt{5}))$. 6) Campo de definición: $x \leqslant 0$, $x \geqslant 4$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$ y $(4; 0)$; las asíntotas $y = x - 1$ con $x \to +\infty$ e $y = 1 - x$ con $x \to -\infty$; la función decrece y es convexa hacia las y positivas con $x \leqslant 0$, crece y es convexa hacia las y positivas con $x \geqslant 4$.

21.9. 1) Campo de definición: $\mathbb{R}$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; \sqrt{2})$ y $(-2; 0)$; las asíntotas $y = -1$ con $x \to -\infty$ e $y = 1$ con $x \to +\infty$; el máximo $y = \sqrt{3}$ con $x = 1$; los puntos de inflexión $(-0{,}5; 1)$ y $(2; 2\sqrt{6}/3)$. 2) Campo de definición: $\mathbb{R}$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 2)$ y $(-8; 0)$; las asíntotas $y = -1$ con $x \to -\infty$ e $y = 1$ con $x \to +\infty$; el máximo $y = 2$ con $x = 0$; los puntos de inflexión de la función $x_1 = -(1 + \sqrt{33})/2 \approx -3{,}4$ y $x_2 = (\sqrt{33} - 1)/2 \approx 2{,}4$, $y(x_1) \approx 1{,}2$, $y(x_2) \approx 1{,}9$. 3) Campo de definición: $|x| > 2$; la simetría respecto al origen de coordenadas; las asíntotas $y = 8$, $x = \pm 2$; la función estrictamente decrece sobre los intervalos $(-\infty; -2)$ y $(2; +\infty)$. 4) Campo de definición: $|x| \geqslant 1/2$; la simetría respecto al origen de coordenadas; los puntos de intersección con los ejes $(\pm 1/2; 0)$; las asíntotas $y = 2$ con $x \to +\infty$ e $y = -2$ con $x \to -\infty$; la función es creciente. 5) Campo de definición: $x \leqslant 0$ y $x \geqslant 4$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$, $(4; 0)$; las asíntotas $y = -1$ con $x \to +\infty$ e $y = 1$ con $x \to -\infty$; la función es decreciente. 6) Campo de definición: $|x| \geqslant 1$; la simetría respecto al eje de ordenadas; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(\pm 1; 0)$; las asíntotas $y = x/2$ con $x \to +\infty$ e $y = -x/2$ con $x \to -\infty$; decrece sobre el intervalo $(-\infty; -1)$ y crece sobre $(1; +\infty)$. 7) Campo de definición: $|x| > 1$; las asíntotas: $y = 3$ con $x \to +\infty$, $y = -3$ con $x \to -\infty$, $x = 1$ con $x \to 1 + 0$, $x = -1$ con $x \to -1 - 0$; el mínimo $y = \sqrt{5}$ con $x = 3/2$; el punto de inflexión $(2; 4/\sqrt{3})$. 8) Campo de definición: $|x| > 2$; las asíntotas $y = 1$ con $x \to \infty$, $x = -2$ y $x = 2$ $(y \to +\infty)$; el punto de intersección con el eje de abscisas $(-6; 0)$; el mínimo $y = 0$ con $x = -6$; la función es convexa hacia las y positivas con $x < -6$ y hacia las y negativas con $-6 < x < -2$ y $2 < x$. 9) Campo de definición: $x > 0$; las asíntotas $y = 0$ con $x \to +\infty$, $x = 0$ $(y \to +\infty)$; el mínimo $y = 0$ con $x = 1$, el máximo $y = 8/(3\sqrt{3}) \approx 1{,}5$ con $x = 3$; el punto de inflexión de la función $x = 5$, $y(5) \approx 1{,}4$, sobre $(0; 1)$ y $(5; +\infty)$ la función es convexa hacia las y negativas. 10) Campo de definición: $-2\sqrt{3} \leqslant x < 0$, $x \geqslant 2/\sqrt{3}$; las asíntotas $y = 0$ con $x \to +\infty$, $x = 0$ $(y \to +\infty)$; el mínimo $y = 0$ con $x = \pm 2/\sqrt{3} \approx \pm 1{,}2$, el máximo $y = 1$ con $x = 2$; los puntos de inflexión $x_1 = -2\sqrt{11 - 2\sqrt{19}}/3 \approx -1{,}0$, $x_2 \approx 2\sqrt{11 + 2\sqrt{19}}/3 \approx 3{,}0$, $y(x_1) \approx 1{,}0$, $y(x_2) \approx 0{,}9$; la función es convexa hacia las y positivas sobre $(-2/\sqrt{3}; x_1)$ y $(2/\sqrt{3}; x_2)$. 11) Campo de definición: $x < 0$, $x \geqslant \sqrt[3]{2}$; el punto de intersección con el eje de abscisas $x = \sqrt[3]{2}$; las asíntotas: $y = \sqrt{3}x/3$ con $x \to +\infty$, $y = -\sqrt{3}x/3$ con $x \to -\infty$, $x = 0$ con $x \to -0$; el mínimo $y = 1$ con $x = -1$. 12) Campo de definición: $x \leqslant 0$, $x > 2$; las asíntotas $y = -(x + 1)/3$ con $x \to -\infty$, $y = (x + 1)/3$ con $x \to +\infty$, $x = 2$ $(y \to +\infty)$; los mínimos $y = 0$ con $x = 0$ e $y = \sqrt{3}$ con $x = 3$; la función es convexa hacia las y positivas con $x < 0$

y $x > 2$. 13) Campo de definición; $\mathbb{R}$; el punto $(0;\ 0)$ es el centro de simetría; las asíntotas $y = -(x+8)/2$ con $x \to -\infty$, $y = -(x-8)/2$ con $x \to +\infty$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0;\ 0)$, $(0;\ \pm 3\sqrt{7})$; el mínimo $y = -3\sqrt{3}/2$ con $x = -\sqrt{3}$, el máximo $y = 3\sqrt{3}/2$ con $x = \sqrt{3}$; el punto de inflexión $(0;\ 0)$, sobre $(0;\ +\infty)$ la función es convexa hacia las y positivas.

21.10. 1) Campo de definición $\mathbb{R}$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$; la asíntota $y = -x$; la función es decreciente; los puntos de inflexión $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$. 2) Campo de definición $\mathbb{R}$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0;\ 0)$, $(3;\ 0)$; la asíntota $y = 1 - x$; el mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el máximo $y = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ con $x = 2$; el punto de inflexión $(3;\ 0)$. 3) Campo de definición: $\mathbb{R}$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$; la asíntota $y = x - 2/3$; el mínimo $y = 0$ con $x = 1$, el máximo $y = \sqrt[3]{4}/3 \approx 0{,}5$ con $x = 1/3$; el punto de inflexión $(0;\ 0)$. 4) Campo de definición $\mathbb{R}$; simetría respecto al origen de coordenadas; los puntos de intersección con los ejes $(0;\ 0)$, $(\pm 2;\ 0)$; la asintota $y = x$; el mínimo $y = -2\sqrt[3]{2}/\sqrt{3} \approx -1{,}5$ con $x = 2\sqrt{3}$, el máximo $y = 2\sqrt[3]{2}/\sqrt{3} \approx 1{,}5$ con $x = -2/\sqrt{3}$; los puntos de inflexión $(0;\ 0)$, $(\pm 2;\ 0)$. 5) Campo de definición: $\mathbb{R}$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0;\ 0)$, $(5;\ 0)$; el mínimo $y = 0$ con $x = 5$, el máximo $y = 3\sqrt[3]{4} \approx 4{,}8$ con $x = 3$; el punto de inflexión $(6;\ 6)$. 6) Campo de definición $\mathbb{R}$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$; el mínimo $y = 0$ con $x = 1$, el máximo $y = \frac{2^4 3^6}{11^3}\sqrt{\frac{2}{121}} \approx 2{,}2$ con $x = \frac{7}{11}$; los puntos de inflexión de la función $x = -1$, $x = (7 + 3\sqrt{3})/11 \approx 1{,}1$, $x = (7 - 3\sqrt{3})/11 \approx 0{,}2$. 7) Campo de definición; $\mathbb{R}$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0;\ 0)$ y $(-1;\ 0)$; el mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el máximo $y = 3\sqrt[3]{20}/25 \approx 0{,}3$ con $x = -2/5$; el punto de inflexión de la función $x = 1/5$, $y\ (1/5) = 0{,}4$, la función es convexa hacia las y positivas sobre $(-\infty;\ 0)$ y $(0;\ 1/5)$. 8) Campo de definición: $\mathbb{R}$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0;\ 0)$ y $(1;\ 0)$; el mínimo $y = 0$ con $x = 1$, el máximo $y = 9^3\sqrt[3]{44}/11^4 \approx 0{,}2$ con $x = 9/11$; los puntos de inflexión de la función $x_1 = 0$, $x_2 = (27 - 3\sqrt{37})/44 \approx 0{,}2$, $x_3 = (27 + 3\sqrt{37})/44 \approx 1{,}03$, la función es convexa hacia las y positivas sobre $(-\infty;\ 0)$, $(x_2;\ 1)$, $(1;\ x_3)$. 9) Campo de definición $\mathbb{R}$; el eje de ordenadas es el de simetría; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(\pm 2;\ 0)$, $(0;\ 2\sqrt[3]{2})$; los mínimos $y = 0$ con $x = \pm 2$, el máximo $y = 2\sqrt[3]{2} \approx 2{,}5$ con $x = 0$; los puntos de inflexión de la función $x_1 = -x_2 = -2\sqrt{3}$, $y\ (x_1) = y\ (x_2) = 4$, la función es convexa hacia las y positivas sobre $(x_1;\ -2)$, $(-2;\ 2)$ y $(2;\ x_2)$. 10) Campo de definición: $\mathbb{R}$; la recta $x = -4$ es el eje de simetría; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(-6;\ 0)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ 2\sqrt[3]{18})$; los mínimos $y = 0$ con $x = -6$, $x = -2$, el máximo $y = 2\sqrt[3]{2} \approx 2{,}5$ con $x = -4$; los puntos de inflexión de la función $x_{1,2} = -4 \mp 2\sqrt{3}$, $y\ (x_1) = y\ (x_2) = 4$, la función es convexa hacia las y positivas sobre $(x_1;\ -6)$, $(-6;\ -2)$, $(-2;\ x_2)$. 11) Campo de definición: $\mathbb{R}$; la asíntota $y = -2$ con $x \to \infty$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0;\ 0)$, $(3/2;\ 0)$; el mínimo $y = -3$ con $x = 3$, el máximo $y = 1$ con $x = 1/3$; el punto de inflexión $(0;\ 0)$, la funcion es convexa hacia las y positivas sobre $(0;\ 3)$, $(3;\ +\infty)$. 12) Campo de definición: $\mathbb{R}$; la asíntota $y = 0$ con $x \to \infty$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas $(0;\ 0)$; el mínimo $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}6$ con $x = -1$, el máximo $y = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ con $x = 1$; el punto de inflexión $(0;\ 0)$, la función es convexa hacia las y negativas sobre $(0;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$.

21.11. 1) Campo de definición: $x \neq \pm 1$; la simetría respecto al origen de coordenadas; punto de interesección con los ejes (0; 0); las asíntotas $x = \pm 1$; el mínimo $y = \sqrt{3}/\sqrt[3]{2} \approx 1,4$ con $x = \sqrt{3}$, el máximo $y = -\sqrt{3}/\sqrt[3]{2} \approx -1,4$ con $x = -\sqrt{3}$; los puntos de inflexión (0; 0), (3; 3/2), (−3; −3/2). 2) Campo de definición: $x \neq -1$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0); la asíntota $x = -1$; el mínimo $y = 3\sqrt[3]{2}/2 \approx 1,9$ con $x = -3/2$; el punto de inflexión $(-3;\ 3\sqrt[3]{4}/2)$. 3) Campo de definición: $x \neq 2$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0); la asíntota $x = 2$; el mínimo $y = 3/\sqrt[3]{2} \approx 2,4$ con $x = 6$; el punto de inflexión $(12;\ 12\sqrt[3]{100})$. 4) Campo de definición: $x \neq 1$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0); la asíntota $x = -1$; el mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el máximo $y = \sqrt[3]{4} \approx -1,6$ con $x = -2$; los puntos de inflexión de la función $x = \sqrt{3} - 2 \approx -0,3$, $x = -\sqrt{3} - 2 \approx -3,7$. 5) Campo de definición: $x \neq 1$, los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $\left(\frac{2}{3};\ 0\right)(0;\ -\sqrt[3]{4})$, la asíntota $x = 1$, el mínimo $y = \sqrt[3]{12} \approx 2,3$ con $x = 4/3$, el máximo $y = 0$ con $x = 2/3$; el punto de inflexión de la función $x = (4 \pm \sqrt{3})/3$). 6) Campo de definición: $x \neq -2$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas (−1; 0), $(0;\ 1/\sqrt[3]{4})$; las asíntotas $y = 1$, $x = -2$; el mínimo $y = 0$ con $x = -1$; el punto de inflexión $(-7/6;\ 1/\sqrt[3]{25})$. 7) Campo de definición $x \neq -2$; las asíntotas $y = 0$ con $x \to \infty$, $x = -2$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0); el mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el máximo $y = \sqrt[3]{2}/3$ con $x = 4$; los puntos de inflexión $x_1 = 4 - 3\sqrt{2} \approx -0,2$, $x_2 = 4 + 3\sqrt{2} \approx 8,2$, $y(x_1) \approx 0,2$, $y(x_2) \approx 0,4$, la función es convexa hacia las y positivas sobre $(-\infty;\ -2)$, $(x_1;\ 0)$, $(0;\ x_2)$. 8) Campo de definición: $x \neq 0$; las asíntotas $y = 0$ con $x \to \infty$, $x = 0$; el punto de intersección con el eje de abscisas (−1; 0); el mínimo $y = 0$ con $x = -1$, el máximo $y = \sqrt[3]{16}/9 \approx 0,3$ con $x = -1,5$; los puntos de inflexión $x_1 = -(21 + 3\sqrt{7})/14 \approx -2,1$, $x_2 = -(21 - 3\sqrt{7})/14 \approx -0,9$, $y(x_1) \approx 0,2$, $y(x_2) \approx 0,1$, la función es convexa hacia las y positivas sobre $(x_1;\ -1)$, $(-1;\ x_2)$.

21.12. 1) Campo de definición: $|x| \leqslant 1$; la simetría respecto al eje de ordenadas; los puntos de intersección con los ejes (−1; 0), (0; 0), (1; 0); al mínimo $y = 0$ con $x = 0$, los máximos $y = 1/2$ con $x = \pm\sqrt{2}/2$. 2) Campo de definición: R; la simetría respecto al origen de coordenadas; los puntos de intersección con los ejes (0; 0), $(\pm 1;\ 0)$; los máximos $y = 0$ con $x = -1$ e $y = 1/2$ con $x = \sqrt{2}/2$, los mínimos $y = 0$ con $x = 1$ e $y = -1/2$ con $x = -\sqrt{2}/2$; los puntos de inflexión (0; 0), $(\sqrt{3}/2;\ \sqrt{3/2})$, $(-\sqrt{3/2};\ -\sqrt{3/2})$. 3) Campo de definición: $x \neq 2$; las asíntotas $y = 0$ con $x \to \infty$, $x = 2$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas (0; −2), (1; 0); el máximo $y = 0$ con $x = 1$, el mínimo $y = -2$ con $x = 0$; los puntos de inflexión de la función $x_1 = -x_2 = -2\sqrt{3}/3$, $y(x_1) = y(x_2) = -\sqrt{2\sqrt{3}} \approx -1,9$, la función es convexa hacia las y negativas sobre $(x_1;\ 1)$, $(1;\ x_2)$; $(2;\ +\infty)$. 4) Campo de definición: R; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas (0; 0), (3; 0); los mínimos $y = 0$ con $x = 0$ y $x = 3$, el máximo $y = 2$ con $x = 2$; el punto de inflexión (4;4), sobre $(-\infty;\ 0)$ y $(4;\ +\infty)$ la función es convexa hacia las y negativas, sobre (0; 3) y (3; 4), hacia las y positivas. 5) Campo de definición: R; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas (−1; 0), (0; 1), (1; 0); el máximo $y = 3\sqrt{3}/4 \approx 1,3$ con $x = 0,5$, el mínimo $y = 0$ con $x = 1$; los puntos de inflexión de la función $x_1 = -1$, $x_2 = (1 - \sqrt{3})/2 \approx -0,4$, $x_3 = (1 + \sqrt{3})/2 \approx 1,4$, $y(x_1) = 0$, $y(x_2) \approx 1,2$, $y(x_3) \approx 2,2$, la función es con-

vexa hacia las y positivas sobre $(-\infty, -1)$, $(x_2; 1)$, $(1; x_3)$. 6) Campo de definición: R; la asíntota $y = 0$; el punto de intersección con el eje de ordenadas $(0; \sqrt{3})$; los máximos $y = \sqrt{3}$ con $x = 0$ e $y = \sqrt{2}/4$ con $x = 3$, el mínimo $y = 1/3$ con $x = 2$; el punto de inflexión de la función $x_0 = (9 + 4\sqrt{3})/3 \approx \approx 5{,}3$, $y(x_0) = \sqrt[4]{3}/4 \approx 0{,}3$, la función es convexa hacia las y negativas sobre $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(x_0; +\infty)$. 7) Campo de definición: R; puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(\pm 1; 0)$, $(0; -1)$; el mínimo $y = -\frac{24}{25}\sqrt{\frac{6}{5}} \approx -1{,}1$ con $x = 1/5$; los puntos de inflexión $(-1; 0)$, $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{16}{25}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$. 8) Campo de definición: $|x| \geqslant 1$; los puntos de intersección con los ejes $(\pm 1, 0)$; las asíntotas $y=0$, $x = 2$; el mínimo $y = -\sqrt{3}/6$ con $x = -4$; los puntos de inflexión de la función $x = 2/\sqrt{3}$, $x = -4 - 2\sqrt{3}$. 9) Campo de definición: R; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$, $(-1/3; 0)$; el mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el máximo $y = \sqrt[3]{2}/8$ con $x = -1/4$; los puntos de inflexión $(-1/3; 0)$, $(-1/2; 1 - 1/(4\sqrt[3]{2}))$. 10) Campo de definición: R; los puntos de intersección con los ejes $(0; 0)$, $(2; 0)$; las asíntotas $y = x - 2/3$ con $x \to +\infty$, $y = -x + 2/3$ con $x \to -\infty$; los mínimos $y = 0$ con $x = 0$ y $x = 2$, el máximo $y = 2\sqrt[3]{4}/3$ con $x = 4/3$; la función es convexa hacia las y positivas.

21.13. 1) La asíntota $y = -x$ con $x \to -\infty$; el mínimo $y = 1$ con $x = 0$; la función es convexa hacia las y negativas. 2) El punto de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$; la asíntota $y = 0$ con $x \to +\infty$; el máximo $y = 1/(2e) \approx 0{,}2$ con $x = 0{,}5$; el punto de inflexión $(1; e^{-2})$. 3) El campo de definición: R; la asíntota $y = 0$ con $x \to +\infty$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$; el mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el máximo $y = 4e^{-2} \approx \approx 0{,}54$ con $x = 2$; los puntos de inflexión de la función $x_1 = \sqrt{3} - 1$, $x_2 = \sqrt{3} + 1$, $y(x_1) \approx 0{,}3$, $y(x_2) \approx 0{,}47$, sobre $(x_1; x_2)$ la función es convexa hacia las y positivas. 4) Campo de definición: R; la asíntota $y = 0$ con $x \to +\infty$; el punto de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$; el máximo $y = 27e^{-3} \approx 1{,}3$ con $x = 3$; los puntos de inflexión de la función $x_1 = 3 - \sqrt{3}$, $x_2 = 3 + \sqrt{3}$, $y(x_1) \approx 0{,}2$, $y(x_2) \approx 0{,}9$, sobre $(x_1; x_2)$ la función es convexa hacia las y positivas. 5) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$, $(0; -2)$; la asíntota $y = 0$ con $x \to +\infty$; el mínimo $y = -e^2 \approx -7{,}4$ con $x = -1$, el máximo $y = 2e^{-4} \approx 0{,}04$ con $x = 2$; los puntos de inflexión de la función $x = 1 - \sqrt{10}/2 \approx -0{,}6$ y $x = 1 + \sqrt{10}/2 \approx \approx 2{,}6$. 6) Campo de definición: R; la asíntota $y = 0$ con $x \to -\infty$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; e)$, $(1; 0)$; el máximo $y = e^3/3 \approx \approx 6{,}7$ con $x = 2/3$, el punto de inflexión $(-1/3; 4/3)$, sobre $(-\infty; -1/3)$ la función es convexa hacia las y negativas. 7) El gráfico es simétrico respecto al eje de ordenadas; la asíntota $y = 0$; el máximo $y = e$ con $x = 0$; los puntos de inflexión de la función $x = \pm 1/\sqrt{2}$. 8) El gráfico es simétrico con relación a la recta $x = 2$; la asíntota $y = 0$; el máximo $y = e^4$ con $x = 2$; los puntos de inflexión de la función $x = 2 \pm 1/\sqrt{2}$. 9) El gráfico es simétrico respecto al origen de coordenadas; la asíntota $y = 0$; el mínimo $y = -\frac{1}{\sqrt{e}} \approx -0{,}6$ con $x = -1$, el máximo $y = 1/\sqrt{e}$ con $x = 1$; los puntos de inflexión de la función $x = \pm\sqrt{3}$. 10) El gráfico es simétrico con relación al eje de ordenadas; la asíntota $y = 0$; el máximo $y = 2$ con $x = 0$; los puntos de inflexión $(-1; 3/e)$, $(1; 3/e)$. 11) Campo de definición: $x \neq 1$; las asíntotas $x = 1$ e $y = 0$ con

$x \to +\infty$; el máximo $y = 1$ con $x = 0$; la función es convexa hacia las y positivas con $x > 1$ y hacia las y negativas con $x < 1$.

21.14. 1) Campo de definición: $x \neq -1$; las asíntotas: $y = 1/e$ y $x = -1$ con $x \to -1 + 0$, $y(-1-0) = 0$; el punto de inflexión $(-2; e^{-3})$. 2) Campo de definición: $x \neq 0$; la asíntota $x = 0$ con $x \to +0$, $y(-0) = 0$; el mínimo $y = e^2/4$ con $x = 1/2$; la función es convexa hacia las y negativas con $x < 0$ y con $x > 0$. 3) Campo de definición: $x \neq 0$; el punto de intersección con el eje de abscisas $(2; 0)$; las asíntotas: $y = x - 3$ y $x = 0$ con $x \to -0$, $y(+0) = 0$, $y'(+0) = 0$; el máximo $y = -4\sqrt{e}$ con $x = -2$ y mínimo $y = -1/e$ con $x = 1$; el punto de inflexión $(2/5; -8e^{-5/2}/5)$. 4) Campo de definición: $x \neq 0$; los puntos de intersección con el eje de abscisas $(-3; 0)$ y $(1; 0)$; las asíntotas $y = x + 3$ y $x = 0$ con $x \to +0$; $y(-0) = 0$, $y'(-0) = 0$; el máximo $y = 4/e$ con $x = -1$; el punto de inflexión de la función $x = -5 \pm \sqrt{22}$. 5) El campo de definición: $x \neq 0$; el origen de coordenadas es el centro de simetría; las asíntotas $x = 0$, $y = x$ con $x \to \infty$; el máximo $y = -\sqrt{2e} \approx -2{,}3$ con $x = -\sqrt{2}$, el mínimo $y = \sqrt{2e}$ con $x = \sqrt{2}$; sobre $(0; +\infty)$ la función es convexa hacia las y negativas.

21.15. 1) Campo de definición: $x > 0$; la asíntota $x = 0$ con $x \to +0$; el máximo $y = 0$ con $x = 1$; la función es convexa hacia las y positivas. 2) Campo de definición: $x > 0$; el punto de intersección con el eje de abscisas $(1; 0)$; las asíntotas $y = 0$ con $x \to +\infty$ y $x = 0$ con $x \to +0$; el máximo $y = 1/e$ con $x = e$; el punto de inflexión $(e^{3/2}; 1{,}5e^{-3/2})$. 3) Campo de definición: $x > 0$; punto de intersección con el eje de abscisas $(1; 0)$; las asíntotas $y = 0$ y $x = 0$; el máximo $y = 2/e$ con $x = e^2$; el punto de inflexión $(e^{8/3}, 8e^{-4/3}/3)$. 4) Campo de definición: $x > 0$; $y(+0) = 0$, $y'(+0) = 0$; el punto de intersección con el eje de abscisas $(1; 0)$; el mínimo $y = -e \ln 2$ con $x = \sqrt{e}$; el punto de inflexión $(e^{-3/2}; -3/(2e^3))$. 5) Campo de definición: $x > 0$; $y(+0) = 0$, $y'(+0) = +\infty$; el máximo $y = 4e^2$ con $x = 1/e^2$; el mínimo $y = 0$ con $x = 1$; el punto de inflexión $(1/e; 1/e)$. 6) Campo de definición: $x > 0$; las asíntotas $x = 0$ e $y = 0$; el mínimo $y = 0$ con $x = 1$, el máximo $y = 4/e^2 \approx 0{,}6$ con $x = e^2 \approx 7{,}4$; los puntos de inflexión de la función $x = e^{(3 \pm \sqrt{5})/2}$. 7) Campo de definición: $x > 0$, $x \neq 1$; la asíntota $x = 1$; $y(+0) = 0$, $y'(+0) = 0$; el mínimo $y = e$ con $x = e$; el punto de inflexión $(e^2; e^2/2)$. 8) Campo de definición: $x \neq \pm 1$; las asíntotas $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(\approx 0{,}9; 0)$, $(\approx 1{,}2; 0)$, $(0; 6)$; el máximo $y = 2 - \ln 3$ con $x = 2$; los puntos de inflexión $(0{,}5; 4 - \ln 3)$, $(3; 1{,}5 - \ln 2)$. 9) Campo de definición: $x > 0$; la asíntota $x = 0$ $(y \to +\infty)$; el mínimo $y = 1$ con $x = 1$; la función es convexa hacia las y negativas.

21.16. 1) La función es periódica con período 2π; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 1)$, $(\pi/2; 0)$, $(3\pi/2; 0)$; el máximo $y = 3\sqrt{3}/4$ con $x = \pi/6$, el mínimo $y = -3\sqrt{3}/4$ con $x = 5\pi/6$; los puntos de inflexión $(\pi/2; 0)$, $(\pi + \operatorname{arcsen}(1/4); -3\sqrt{15}/16)$, $(3\pi/2; 0)$, $(2\pi - \operatorname{arcsen}(1/4); 3\sqrt{15}/16)$. 2) La función es periódica con período 2π; el gráfico es simétrico respecto al origen de coordenadas; el máximo $y = 3\sqrt{3}/4$ con $x = \pi/3$, el mínimo $y = -3\sqrt{3}/4$ con $x = -\pi/3$; los puntos de inflexión $(-\pi; 0)$, $(-\pi + \arccos(1/4); -3\sqrt{15}/16)$, $(0; 0)$, $(\pi - \arccos(1/4); 3\sqrt{15}/16)$, $(\pi; 0)$. 3) La función es periódica con período 2π; $y(0) = y(\pi/2) = y(\pi) = 0$; los máximos $y = 1/4$ con $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$, los mínimos $y = 0$ con $x = \pi/2$ e $y = -2$ con $x = \frac{3}{2}\pi$. Los puntos de inflexión de la función $x =$

$= \operatorname{arcsen} \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x = \pi - \operatorname{arcsen} \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x = \pi + \frac{\sqrt{33}-1}{8}$, $x = 2\pi - \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{33}-1}{8}$. 4) La función es periódica con período 2π; el gráfico es simétrico con relación al eje de ordenadas; $y\left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 0$, los máximos $y = 3/4$ con $x = \pm\pi/3$, los mínimos $y = 1/2$ con $x = 0$ e $y = -3/2$ con $x = \pm\pi$; los puntos de inflexión de la función $x = \pm \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x = \pm\left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)$. 5) La función es periódica con el período 2π; $x = 0$ es el eje de simetría, $(\pi/2; 0)$ es el centro de simetría; sobre $[0; \pi]$ el máximo $y = 4$ con $x = 0$, el mínimo $y = -4$ con $x = \pi$; sobre $[0; \pi]$ los puntos de inflexión de la función $x_1 = \operatorname{arcsen}(1/\sqrt{3})$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = \pi - \operatorname{arcsen}(1/\sqrt{3})$, $y(x_1) = -y(x_3) = 8\sqrt{6}/9 \approx 2{,}2$, $y(x_2) = 0$.

21.17. 1) Función periódica con período π; el gráfico es simétrico al eje de ordenadas; $y(0) = y(\pi/3) = y(-\pi/3) = 0$, los mínimos $y = 0$ con $x = 0$ e $y = -1$ con $x = \pm\pi/2$, los máximos $y = 9/16$ con $x = \pm \arccos(1/4)$; los puntos de inflexión $x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{129}+1}{16}$, $x = \pm\frac{1}{2}\left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{129}-1}{16}\right)$. 2) Función periódica con período 2π; el gráfico es simétrico al eje de ordenadas: $y(\pi/4) = y(\pi/2) = y(3\pi/4) = 0$; sobre el segmento $[0; \pi]$ el máximo $y = 1$ con $x = 0$, $y = 2/(3\sqrt{6})$ con $x = \pi - \operatorname{arcsen}\sqrt{5/6}$, los mínimos $y = -2/(3\sqrt{6})$ con $x = \operatorname{arcsen}\sqrt{5/6}$, $y = -1$ con $x = \pi$; los puntos de inflexión $\left(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}; \frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$, $(\pi/2; 0)$, $\left(\pi - \arccos\sqrt{13/18}; -\frac{4}{9}\sqrt{13/18}\right)$. 3) Función periódica con período 2π, el gráfico es simétrico al origen de coordenadas; $y(0) = y(\pi) = 0$; sobre el segmento $[0; \pi]$ el máximo $y = (3+4\sqrt{2})/6$ con $x = \pi/4$ e $y = (4\sqrt{2}-3)/6$ con $x = 3\pi/4$, el mínimo $y = \sqrt{3}/4$ con $x = 2\pi/3$; los puntos de inflexión de la función $x = 0$, $x = \pi$, $x = \arccos \frac{\sqrt{7}-1}{6}$, $x = \pi - \arccos \frac{\sqrt{7}-1}{6}$.

21.18. 1) Campo de definición $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, es una función periódica con periodo 2π; las asíntotas $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; sobre el intervalo $(-\pi/2; 3\pi/2)$ el máximo $y = 1$ con $x = 0$, el mínimo $y = -1$ con $x = \pi$; la función decrece sobre los intervalos $(0; \pi/2)$ y $(\pi/2; \pi)$, crece sobre los intervalos $(-\pi/2; 0)$ y $(\pi; 3\pi/2)$. 2) Función periódica con período π; las asíntotas $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; los puntos de inflexión $(\pi/2 + \pi n; 1/\sqrt{2})$, $n \in \mathbb{Z}$; la función crece sobre el intervalo $(0; \pi)$. 3) El gráfico es simétrico al origen de coordenadas;

las asíntotas $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; el máximo $y = \pi/2 + 2n\pi - 1$ con $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; el mínimo $y = 3\pi/2 + 2\pi n + 1$ con $x = 3\pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; los puntos de inflexión $(\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

21.19. 1) El gráfico es simétrico al origen de coordenadas; las asíntotas: $y = (x - \pi)/2$ con $x \to +\infty$ e $y = (x + \pi)/2$ con $x \to -\infty$; el máximo $y = 1$ con $x = (2 - \pi)/4$, el mínimo $y = -1$ con $x = (\pi - 2)/4$; el punto de inflexión $(0; 0)$. 2) Campo de definición: $\mathbb{R}$; las asíntotas $y = 1/\pi$ con $x \to -\infty$, $y = x$ con $x \to +\infty$; el punto de intersección con el eje de ordenadas $(0; 2/\pi)$; la función es convexa hacia las y negativas. 3) Campo de definición: $\mathbb{R}$; las asíntotas $y = (\pi x + 2)/2$ con $x \to -\infty$, $y = (\pi x - 2)/2$ con $x \to +\infty$; el punto de inflexión $(0; 0)$, sobre $(-\infty; 0)$ la función es convexa hacia las y positivas. 4) Campo de definición: $\mathbb{R}$; $(0; \pi)$ es el centro de simetría; las asíntotas $y = (x + 4\pi)/2$ con $x \to -\infty$, $y = x/2$ con $x \to +\infty$; $y(0) = \pi$, $y = 0$ con $x \approx 12{,}2$; el máximo $y = (10\pi - 3\sqrt{3})/6 \approx 4{,}4$ con $x = -\sqrt{3}$, el mínimo $y = (2\pi + 3\sqrt{3})/6 \approx 1{,}9$ con $x = \sqrt{3}$; el punto de inflexión $(0; \pi)$, sobre $(-\infty; 0)$ la función es convexa hacia las y positivas. 5) Campo de definición: $|x| \geqslant 1$; $(0; -\pi/2)$ es el centro de simetría; la asíntota $y = (3x - \pi)/2$ con $x \to \infty$; el máximo $y = -(6\sqrt{3} + 5\pi)/6 \approx -4{,}4$ con $x = -2\sqrt{3}/3$, el mínimo $y = (6\sqrt{3} - \pi)/6 \approx 1{,}2$ con $x = 2\sqrt{3}/3$; sobre $(-\infty; -1)$ la función es convexa hacia las y positivas. 6) Campo de definición: $\mathbb{R}$; el grafico es simétrico al origen de coordenadas; la asíntota $y = 0$; el máximo $y = \pi/2$ con $x = 1$, el mínimo $y = -\pi/2$ con $x = -1$; $y'(1 - 0) = 1$, $y'(1 + 0) = -1$; el punto de inflexión $(0; 0)$. 7) Campo de definición: $\mathbb{R}$; el gráfico es simétrico al eje de ordenadas; la asíntota $y = \pi$; la función crece con $x > 0$, $y'(+0) = 2$. 8) Campo de definición: $\mathbb{R}$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; -\pi/2)$, $(x_0; 0)$, donde $x_0 \approx 0{,}7$; la asíntota $y = (x - \pi)/2$; los máximos $y = 1$ con $x = 1$ e $y = -(3\sqrt{3} + 5\pi)/6$ con $x = -\sqrt{3}$, los mínimos $y = -1/2 - \pi$ con $x = -1$ e $y = (3\sqrt{3} - \pi)/6$ con $x = \sqrt{3}$; la función es convexa hacia las y positivas sobre los intervalos $(-\infty; -1)$ y $(0; 1)$, y hacia las y negativas sobre $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$; el punto de inflexión $(0; -\pi/2)$; $y'(-1 - 0) = -1/2$, $y'(-1 + 0) = 3/2$, $y'(1 - 0) = 3/2$, $y'(1 + 0) = -1/2$.

21.20. Función periódica con período 2π, el gráfico es simétrico al eje de ordenadas; el máximo $y = e$ con $x = 0$, el mínimo $y = 1/e$ con $x = \pi$; los puntos de inflexión $x = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y $x = 2\pi - \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 2) Las asíntotas: $y = e^{\pi/2}$ con $x \to -\infty$, $y = e^{-\pi/2}$ con $x \to +\infty$; la función decrece; $(-1/2; e^{\operatorname{arctg}(1/2)})$ es el punto de inflexión. 3) Campo de definición: $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, es periódica con período 2π; las asíntotas $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; el mínimo $y = 1$ con $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 4) Campo de definición: $x > 0$; el mínimo $y = (1/e)^{1/e} \approx 0{,}69$ con $x = 1/e$; $y(+0) = 1$; la función es convexa hacia las y negativas. 5) Campo de definición: $x > -1$; $x \neq 0$; $y(+0) = y(-0) = e$; las asíntotas $x = -1$, $y = 1$; la función es convexa hacia las y negativas. 6) Campo de definición: $x < -1$, $x > 0$, las asíntotas $y = e$ con $x \to \infty$, $x = -1$ $(y \to +\infty)$; sobre $(-\infty; -1)$ la función es convexa hacia las y negativas, sobre $(0; +\infty)$, hacia las y positivas.

21.21. 1) Campo de definición: $x > 0$; la asíntota $y = 1$; el máximo $y = e^{1/e} \approx 1{,}44$ con $x = e$; $y(+0) = 0$. 2) La asíntota $y = e(x - 1/2)$; $y(+0) = 0$. 3) Función periódica con período 2π; los maximos $y = 1$ con $x = 0$ y $x = \pi/2$, $y = -1/\sqrt{2}$ con $x = 5\pi/4$, los mínimos $y = 1/\sqrt{2}$ con $x = \pi/4$, $y = -1$ con $x = \pi$ y $x = 3\pi/2$. 4) La función es periódica con período 2π; $x = \pi/2$ es el eje de simetría, $(0; 0)$ es el centro de simetría; sobre $[0; \pi]$ los mínimos $y = -3\sqrt{3}$ con $x = \pi/3$ y $x = 2\pi/3$, el máximo $y = -4$ con $x = \pi/2$. 5) Función periódica con período 2π; los máximos $y = 1$ con $x = \pi/2$,

$y = 1/3$ con $x = 3\pi/2$, los mínimos $y = 0$ con $x = 0$, $x = \pi$. 6) Función periódica con período 2π, el gráfico es simétrico al eje de ordenadas; los máximos $y = 11/6$ con $x = 0$, $y = -5/12$ con $x = 2\pi/3$, los mínimos $y = -1/2$ con $x = \pi/2$ e $y = -5/6$ con $x = \pi$. 7) Campo de definición: $x > 0$; la asíntota $x = 0$; el máximo $y = -2 \ln 2 - 5 \operatorname{arctg}(1/2)$ con $x = 1/2$, el mínimo $y = 2 \ln 2 - 5 \operatorname{arctg} 2$ con $x = 2$. 8) Campo de definición: $x \neq \pm 1$, el gráfico es simétrico al eje de ordenadas; las asíntotas $x = -1$ con $x \to -1 + 0$, $x = 1$ con $x \to 1 - 0$, $y = 0$; el mínimo $y = e$ con $x = 0$, el máximo $y = 1/(4\sqrt{e}) \approx 0,15$ con $x = \pm\sqrt{3}$. 9) Campo de definición: $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$; las asíntotas $x = 2$, $x = -2$, $y = 1$, $x = 0$ con $x \to +0$; $y(-0) = 0$; el mínimo $y \approx 0,94$ con $x = -4 - 2\sqrt{5} \approx -8,48$, el máximo $y \approx -0,5$ con $x = -4 + 2\sqrt{5} \approx 0,48$, la función crece sobre los intervalos $(-4 - 2\sqrt{5}; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; -4 + 2\sqrt{5})$, decrece sobre los intervalos $(-\infty; -4 - 2\sqrt{5})$, $(-4 + 2\sqrt{5}; 2)$, $(2; +\infty)$.

21.22. 1) Campo de definición: $\mathbb{R}$; el máximo $(-3; 3)$, el mínimo $(5; -1)$; el punto de inflexión $(1; 1)$. 2) Campo de definición: $\mathbb{R}$; las asíntotas $y = x$, $y = x + 6\pi$; el máximo $(-3\pi - 1; 3\pi/2 - 1)$, el mínimo $(-3\pi + 1; 1 - 3\pi/2)$; el punto de inflexión $(-3\pi; 0)$. 3) Campo de definición: $\mathbb{R}$; puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$, $(8/5; 0)$; la asíntota $y = x - 2$; el máximo $(0; 0)$, el mínimo $(1/2; -1/2)$; convexidad hacia las y negativas. 4) Campo de definición: $x < 0$; las asíntotas $y = x + \ln 2$, $x = 0$; el máximo $(-\ln 2/2; 0)$; la convexidad hacia las y positivas. 5) Campo de definición: $\mathbb{R}$; la función es periódica con período 2π; las rectas $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, son los ejes de simetría; sobre $[0; 2\pi]$ el mínimo $y = 0$ con $x = 0$, el máximo $y = 2$ con $x = \pi$; sobre $(0; 2\pi)$ la convexidad hacia las y positivas. 6) Campo de definición: $\mathbb{R}$; el eje de ordenadas es el de simetría; la asíntota $y = 0$ con $x \to \infty$; el máximo $y = 1$ con $x = 0$; la función es convexa hacia las y negativas sobre $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$.

21.23. 1)

t	$-\infty$	-1	$-1/3$	0	1	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$-4/27$	0	4	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$-80/27$	-2	0	$-\infty$

$(0; -4)$—punto de retroceso.

2)

t	$-\infty$	1	$5/3$	2	$7/3$	3	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$-4/27$	0	$16/27$	4	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-16/27$	-1	$-32/27$	0	$+\infty$

$(0; 0)$ — punto de retroceso.

3) **Asíntotas:** $y = x + 3$, $y = 0$, $x = 0$.

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	$-1/2$	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	$+0$	$+\infty$	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	$1/2$	$+0$
y	$-\infty$	-0	-0	$-1/2$	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

4) **Asíntotas:** $y = x - 1$, $y = 0$, $x = 0$; **punto múltiple** $(-1;\ -1)$.

t	$-\infty$	-0	$+0$	$1-0$	$1+0$	2	$+\infty$
x	$-\infty$	-0	-0	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-0	$+0$	$3/2$	$+\infty$

5) **Asíntotas:** $y = 1$, $y = 1/2$, $x = -1/2$.

t	$-\infty$	$-2-0$	$-2+0$	-1	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	$-\infty$	$-1/2-0$	$-1/2+0$	0	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$
y	$1+0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$1/2-0$	$1/2+0$	$2/3$	$1-0$

6) **Asíntotas:** $y = 2$, $y = 2/3$, $x = 1$, $x = 4/3$.

t	$-\infty$	$-2-\sqrt{5}$	$-2-0$	$-2+0$	$-1-0$	$-1+0$	0	$-2+\sqrt{5}$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	$1+0$	$\approx 1,1$	$\frac{4}{3}-0$	$\frac{4}{4}+0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\approx 0,1$	$-\infty$	$+\infty$	$1+0$
y	$-\infty$	$\approx -8,5$	$-\infty$	$+\infty$	$2+0$	$2-0$	$1/2$	$\approx 0,5$	$\frac{2}{3}-0$	$\frac{2}{3}+0$	$+\infty$

7) Asíntota $y = x$ con $x \to \infty$; puntos de inflexión (aproximadamente) (−2,4; 3,0), (2,2; 3,0), (3,2; 3,0).

t	$-\infty$	-1 ∓ 0	∓0	1 ∓ 0	$\sqrt[3]{2}\mp0$	$+\infty$
x	$-\infty$	$-2-0$	$\mp\infty$	$2+0$	$\frac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\mp0\approx2,1\mp0$	$+\infty$
y	$-\infty$	∓0	$+\infty$	2 ± 0	$\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}+0\approx1,9+0$	$+\infty$

21.24. 1) Asíntota $x = 5/3$, punto retroceso (−4/3, 27/2), punto de inflexión (77/3; 27/2).

t	$-\infty$	-3	-0	$+0$	$+\infty$
x	$+\infty$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}-0$	$\frac{5}{3}+0$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{27}{2}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2) Asíntota $y = (4x - 1)/8$, punto de retroceso (0; 0), punto de inflexión (−9/8; −27/16).

t	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}-0$	$\frac{1}{2}+0$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
x	$+\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{9}{8}$	-1	$-\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{27}{32}$	-1	$-\infty$

3) Asíntota $y = -x + 1/3$, punto de retroceso (0;0).

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	0	$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
x	-0	$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$+0$
y	$1+0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$1-0$

4) Asíntotas: $y = 1$, $x = 0$, punto de retroceso $(-2;\ 0)$, punto de inflexión $(117/64;\ 49/9)$, con $t = (-3 \pm \sqrt{21})/4$ punto múltiple con coordenadas $x \approx -1{,}1$, $y \approx 2{,}4$.

t	$-\infty$	-1	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	$-\infty$	2	$+0$	-0	-2	$+\infty$
y	$1+0$	4	$+\infty$	$+\infty$	0	$1-0$

5) Asíntotas: $y = (2x + 1)/4$, $y = x - 1$, $x = -1/2$.

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0	$+0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	-0	$-\frac{1}{2}+0$	$-\frac{1}{2}-0$	$\approx -1{,}1$	$-\infty$	$+\infty$	4	$\approx 4{,}1$	$+\infty$	$-\infty$	-0
y	$+0$	$+\infty$	$-\infty$	$\approx -2{,}6$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{8}{3}$	$\approx 2{,}6$	$+\infty$	$-\infty$	-0

6) Asíntota $y = x + 1$, punto de inflexión $(-27/2;\ -9/2)$

t	$-\infty$	-0	$+0$	$1/2$	$2/3$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	-0	$-\infty$	$-\infty$	-8	$-27/4$	$-\infty$	$+\infty$	$+0$
y	$+0$	$+\infty$	$-\infty$	-4	$-9/2$	$-\infty$	$+\infty$	$+0$

7) La curva es simétrica respecto al eje de ordenadas, asíntotas $y = \pm x - 5/4$, $y = 0$.

t	$+0$	$1/\sqrt[4]{5}$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	$+\infty$	$5\sqrt[4]{5}/4$	$+\infty$	$-\infty$	-0
y	$+0$	$1/4$	$+\infty$	$-\infty$	$-1-0$

8) Los ejes de coordenadas son los de simetría; (0; 0) — punto de inflexión

t	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\mp 0$	-1 ∓ 0	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mp 0$	-0
x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm 0$	$-\sqrt{2}+0$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\mp 0$	-0
y	$\frac{1}{2}-0$	± 0	$-\frac{1}{2}+0$	-0

21.25. 1) Asíntota $y = 2x$ con $x \to +\infty$; (1; 1) — punto de retroceso

t	$-\infty$	∓ 0	$+\infty$
x	$+\infty$	$1+0$	$+\infty$
y	$+\infty$	$1+0$	$+\infty$

2) Asíntotas $y = 0$, $x = 0$; puntos de inflexión $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}};\ -\sqrt{2}\ e^{-\sqrt{2}})$.

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-0	$-1/e$	0	e	$+\infty$
y	$-\infty$	$-e$	0	$1/e$	$+0$

3) (−4; 4) — punto de inflexión

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-0	$-10/e$	-4	$-2e$	$+\infty$
y	-0	$-11/e$	-4	$-e$	$+\infty$

4) Asíntota $y = 1$, punto de retroceso $(e;\ 0)$, punto de inflexión $\left(-\frac{3}{2}e^{-2/3};\ \frac{25}{9}e^{-2/3}\right)$.

t	$-\infty$	-1	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	-0	$-1/e$	$-\infty$	$+\infty$	e	$+\infty$
y	$+0$	$4/e$	$1+0$	$1-0$	0	$+\infty$

5) Asíntotas: $y = e^2x - 2e$, $y = 0$, $x = 0$.

t	$-\infty$	-2	$-1-0$	$-1+0$	0	$+\infty$
x	-0	$-1/e^2$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	$-e^2$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+0$

6) Asíntota $y = x - 1$ con $x \to -\infty$.

t	$-\infty$	0	$1/2$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$1-\ln 2$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}-\ln 2$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

7) Asíntotas: $y=0$, $x=0$; puntos de inflexión $(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}; -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$, $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}; \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$.

t	$+0$	$1/e$	1	e	$+\infty$
x	-0	$-1/e$	0	e	$+\infty$
y	$-\infty$	$-e$	0	$1/e$	$+0$

7) la misma curva que en el problema 2).
8) Asíntotas $y = x/4$, $x = 2$, punto anguloso $(0; 0)$.

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	0	$1-0$	$1+0$	2	$+\infty$
x	$+\infty$	$2+0$	$2-0$	0	$2-0$	$2+0$	8	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$2+3\ln 3$	$+\infty$

9) La curva es simétrica al eje de abscisas; asíntotas: $y = x - 1$, $y = 1 - x$, puntos múltiples (0; 0), (2; 0).

t	$+0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi-0$	$\pi+0$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi-0$
x	$+\infty$	2	1	0	$-\infty$	$+\infty$	2	1	0	$-\infty$
y	$+\infty$	0	-1	0	$+\infty$	$-\infty$	0	1	0	$-\infty$

10) La curva es simétrica a los ejes de coordenadas: asíntotas $y = \pm 3x$, $y = \pm 1/2$; puntos múltiples $(\pm\sqrt{3}/3;\ 0)$, $(0;\ \pm\sqrt{2}/2)$.

t	$+0$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2-0$
x	$+\infty$	$\sqrt{3}/3$	0	$-\infty$
y	$\frac{1}{2}-0$	0	$-\sqrt{2}/2$	$-\infty$

11) El eje de abscisas es el de simetría; (1; 0) — punto de retroceso.

t	$-\pi+0$	$-2\pi/3\mp0$	$-\pi/3\mp0$	-0
x	$-3+0$	$-1/2\mp0$	$3/2-0$	$1+0$
y	-0	$-3\sqrt{3}/2+0$	$-\sqrt{3}/2\mp0$	-0

12) El eje de abscisas es el de simetría.

t	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
x	2	1	0	-1	-2	-1	0	1	2
y	-2	0	$\sqrt{2}$	2	0	-2	$-\sqrt{2}$	0	2

13) Los ejes de coordenadas son los de simetría; puntos múltiples $(\pm 1/2; \pm 1/\sqrt{2})$ (los signos son arbitrarios).

t	$+0$	$\frac{\pi}{6} \mp 0$	$\frac{\pi}{4} \mp 0$	$\frac{\pi}{3} \mp 0$	$\frac{\pi}{2} \mp 0$
x	$+0$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \mp 0$	$1-0$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pm 0$	± 0
y	$+0$	$1-0$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \pm 0$	± 0	$-1+0$

14) Esta curva es la evolvente de una circunferencia unitaria; las tangentes son paralelas al eje de abscisas en los puntos $((-1)^n; \pi n\, (-1)^n)$, las tangentes son paralelas al eje de ordenadas en los puntos $((-1)^n \pi(1+2n)/2; (-1)^n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

15) Las tangentes son paralelas al eje de abscisas en los puntos con coordenadas $x_n' = -y_n' = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} e^{\pi(4n-1)/4}$, las tangentes son paralelas al eje de ordenadas en los puntos con coordenadas $x_n'' = y_n'' = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} e^{\pi(4n+1)/4}$.

21.26. 1) $y = -x$ es el eje de simetría; la asíntota $y = x$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; -1)$, $(1; 0)$, ellos son también los puntos de inflexión. 2) Los ejes de coordenadas y las rectas $y = \pm x$ son los de simetría; $(\pm 1; 0)$, $(0; \pm 1)$ son los puntos de intersección con los ejes de coordenados; el máximo $x = 1$ y el mínimo $x = -1$ con $y = 0$; el máximo $y = 1$ y el mínimo $y = -1$ con $x = 0$. 3) El eje de abscisas es el simetría; la asíntota $x = 1$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas $(0; 0)$ y $(-1; 0)$; $(0; 0)$, el punto múltiple; el mínimo $x = -1$ con $y = 0$; el máximo $y \approx 0{,}3$ con $x = (1 - \sqrt{5}/2) \approx 0{,}6$. 4) El eje de abscisas es el de simetría; las asíntotas $y = \pm x$; el punto de intersección con el eje de abscisas $(\sqrt[3]{2}; 0)$; el mínimo $x = \sqrt[3]{2}$ con $y = 0$; el mínimo $y = 1$ con $x = -1$, el máximo $y = -1$ con $x = 1$. 5) el eje de abscisas es el de simetría; $(0; 0)$, $(2; 0)$ son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas; $(0; 0)$ es el punto de retroceso; el máximo $x = 2$ con $y = 0$, el mínimo $x = 0$ con $y = 0$; el máximo $y = 27/16$ y el mínimo $y = -27/16$ con $x = 3/2$; los puntos de inflexión $x = (3 - \sqrt{3})/2 \approx$ $\approx 0{,}23$, $y \approx \pm 0{,}35$. 6) Los ejes de coordenadas son los de simetría; $(\pm 1; 0)$, $(0; 0)$ son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas; $(0; 0)$ es el punto múltiple; el máximo $x = 1$ y el mínimo $x = -1$ con $y = 0$; los máximos $y = 2/\sqrt{3}$ y los mínimos $y = -2\sqrt{3}$ con $x = \pm\sqrt{2/3}$; los puntos de inflexión (aproximadamente) $(\pm 0{,}52; \pm 0{,}70)$. 7) El eje de abscisas es el de simetría; la asíntota $y = 0$ con $x \to +\infty$; el punto de intersección con el eje de abscisas $(1; 0)$; el máximo $x = 1$ con $y = 0$; el máximo $y = 1$ y el mínimo $y =$ $= -1$ con $x = 2$; los puntos de inflexión $x = (6 + 2\sqrt{3})/3 \approx 3{,}15$, $y =$ $= \pm\sqrt{\sqrt{3}/2} \approx \pm 0{,}93$. 8) El eje de abscisas es el de simetría; la asíntota $x = 2$; $(0; 0)$ es el punto de retroceso; el mínimo $x = 0$ con $y = 0$. 9) Los ejes de coordenadas son los de simetría; las asíntotas $y = \pm x$; $(\pm 1, 0)$ son los puntos de intersección con el eje de abscisas; el mínimo $x = 1$ y el máximo $x = -1$ con $y = 0$. 10) Los ejes de coordenadas son los de simetría; las asíntotas $y =$ $\pm x$, $x = \pm 1$; $(0; 0)$, $(\pm 2; 0)$ son los puntos de intersección con los ejes de co-

ordenadas; (0; 0) es el punto múltiple; el mínimo $x = 2$ y el máximo $x = -2$ con $y = 0$. 11) El eje de abscisas es el de simetría; las asíntotas $y = \pm (x + 2)/3$ y $x = 1$; el máximo $x = -3$ con $y = 0$; el mínimo $y \approx 2{,}54$ y el máximo $y = -2{,}54$ con $x = \sqrt{3}$.

21.27. 1) Hipérbola con ejes $x = 0$ e $y = 1$ y con asíntotas $y = 1 \pm x$. 2) Elipse con ejes en las rectas $y = -2x$ y $x = 2y$. 3) el eje de ordenadas es el de simetría; las asíntotas $x = 0$, $y = 0$; (0; 1) es el punto de intersección con el eje de ordenadas; el máximo $y = 1$ con $x = 0$; los puntos de inflexión $x = \pm \sqrt{\sqrt{3}/8} \approx \pm 0{,}47$, $y = (6 - 2\sqrt{3})/3 \approx 0{,}85$. 4) La recta $y = x$ es el eje de simetría; las asíntotas $x = 0$, $y = 0$, $y = -x$; el máximo $x = -\sqrt[3]{4}$ con $y = -\sqrt[3]{4}/2$; el máximo $y = -\sqrt[3]{4}$ con $x = -\sqrt[3]{4}/2$. 5) (0; 0) es el centro de simetría; las asíntotas $y = 0$, $y = x$, $x = 0$; los mínimos $y = 1 \pm \sqrt{2}$ con $x = 1$, los máximos $y = -1 \pm \sqrt{2}$ con $x = -1$. 6) La asíntota $y = 2 - x$; (0; 0), (6; 0) son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas; (0; 0) es el punto de retroceso; el máximo $y = 2\sqrt[3]{4}$ con $x = 4$; (6; 0) es el punto de inflexión.

21.28. 1) $x = 4t/(1 - t^4)$, $y = 4t^2/(1 - t^4)$*); el eje de ordenadas es el de simetría; las asíntotas $y = \pm x - 1$; (0; 0) es el punto múltiple y el de retroceso; los puntos de inflexión $(\pm 6/\sqrt[4]{3};\ 2\sqrt{3})$. 2) $x = (t - 1)/t^3$, $y = (t - 1)^2/t^3$; la recta $y = x$ es el eje de simetría; (0; 0) es el punto múltiple; el máximo $x = 4/27$ con $y = 2/27$; el máximo $y = 4/27$ con $x = 2/27$. 3) $x = t\,(1 \pm \sqrt{8t^2 - 1})$, $y = t\,(1 \mp \sqrt{8t^2 - 1})$; las rectas $y = \pm x$ son los ejes de simetría; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas: (0; 0), (0; ± 1), (± 1; 0); (0; 0) es el punto aislado; los puntos más próximos al origen de coordenadas son $(1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2};\ -1/\sqrt{2})$; los puntos de inflexión $x = 1/y = \pm(\sqrt{2} - 1)$, $x = 1/y = \pm(\sqrt{2} + 1)$. 4) $x = t^3/(1 - 2t^2)$, $y = t^4/(1 - 2t^2)$; el eje de ordenadas es el de simetría; la asíntota $y = -(4\sqrt{2}x + 1)/8$; el máximo $x = -3\sqrt{3}/(4\sqrt{2})$ y el mínimo $x = 3\sqrt{3}/(4\sqrt{2})$ con $y = -9/8$; los máximos $y = -1$ con $x = \pm 1$, el mínimo $y = 0$ con $x = 0$; los puntos de inflexión $(\pm 3\sqrt{3}/5;\ -9/5)$. 5) $x = \pm\sqrt{(t - 2)/(1 - t^3)}$, $y = \pm t\sqrt{(t - 2)/(1 - t^3)}$; (0; 0) es el centro de simetría; la asíntota $y = x$; tres puntos de inflexión, (0; 0) es uno de ellos. 6) $x = (t^2 + 1/t)/2$, $y = (t^2 - 1/t)/2$; la recta $y = x$ es el eje de simetría; las asíntotas $y = \pm x$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas (0; 1), (1; 0); el mínimo $x = 3/\sqrt[3]{32}$ con $y = -1/\sqrt[3]{32}$, el mínimo $y = 3/\sqrt[3]{32}$ con $x = -1/\sqrt[3]{32}$. 7) Astroide; $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$; los ejes de coordenadas y las rectas $y = \pm x$ son los ejes de simetría; (± 1; 0), (0; ± 1) son los puntos de retroceso. 8) $x = \pm \operatorname{ch}^{3/2} t$, $y = \operatorname{sh}^{3/2} t$; los ejes de abscisas son los de simetría; las asíntotas $y = \pm x$; el máximo $x = -1$ y el mínimo $x = 1$ con $y = 0$.

21.29. 1) $r = \sqrt{\operatorname{tg} \varphi}$; (0; 0) es el centro de simetría; la asíntota $x = 0$; el máximo $x = 1/\sqrt{2}$ con $y = 1/\sqrt{2}$, el mínimo $x = -1/\sqrt{2}$ con $y = -1/\sqrt{2}$; los puntos de inflexión: $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = -x_3 = \sqrt[4]{8\sqrt{3} - 12}/2 \approx 0{,}6$, $y_2 = -y_3 = \sqrt[4]{24\sqrt{3} + 36} \approx 1{,}5$. 2) Lemniscata; $r = \sqrt{\operatorname{sen} 2\varphi/2}$; las rectas $y = \pm x$ son los ejes de simetría; (0; 0) es el punto múltiple; el máximo $x = \sqrt[4]{27}/4$ con $y = \sqrt[4]{3}/4$, el mínimo $x = -\sqrt[4]{27}/4$ con $y = -\sqrt[4]{3}/4$; los máximos $r = 1/\sqrt{2}$ con $\varphi = \pi/4$ y $\varphi = 5\pi/4$.

Biscuito; $r = 2/\sqrt{3 + \cos 4\varphi}$; los ejes de coordenadas y las rectas $y = \pm x$ son los ejes de simetría; (0; 0) es el punto aislado; (± 1; 0), (0; ± 1).

---

*) Se indica una de las posibles variantes de parametrización.

son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas; los máximos $x = \sqrt{(\sqrt{2}+1)/2} \approx 1{,}1$ y los mínimos $x = -\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}$ con $y = \pm 1/\sqrt{2}$; los máximos $y = \sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}$ y los mínimos $y = -\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}$ con $x = \pm 1/\sqrt{2}$; los puntos de inflexión (aproximadamente) $(\pm 1{,}05;\ \pm 0{,}35)$, $(\pm 0{,}35;\ \pm 1{,}05)$ (los signos son arbitrarios). 4) $r = \sqrt{2 \operatorname{sen} 2\varphi/(2 - \operatorname{sen}^2 2\varphi)}$; las rectas $y = \pm x$ son los ejes de simetría; el máximo $x = \sqrt[8]{27/16}$ con $y = \sqrt[8]{3/16}$, el mínimo $x = -\sqrt[8]{27/16}$ con $y = -\sqrt[8]{3/16}$; el máximo $y = \sqrt[8]{27/16}$ con $x = \sqrt[8]{3/16}$, el mínimo $y = -\sqrt[8]{27/16}$ cos $x = -\sqrt[8]{3/16}$; el máximo $r = \sqrt{2}$ con $\varphi = \pi/4$ y $\varphi = 5\pi/4$. 5) $r = \sqrt{\operatorname{tg} 2\varphi/2}$; (0; 0) es el centro de simetría; las asíntotas $y = \pm x$; (0; 0) es el punto múltiple; los puntos de inflexión (aproximadamente): $x_1 = -x_3 \approx 1{,}11$, $y_1 = -y_3 \approx 0{,}68$, $x_2 = -x_4 \approx -0{,}68$, $y_2 = -y_4 \approx 1{,}11$. 6) $r = \sqrt{(3\cos 2\varphi - 1)/2\cos 2\varphi}$; los ejes de coordenadas son los de simetría; las asíntotas $y = \pm x$; (0; 0) es el punto múltiple; el máximo $x = 1$ y el mínimo $x = -1$ con $y = 0$; el máximo $y = \sqrt{2}$ y el mínimo $y = -\sqrt{2}$ con $x = 0$, los máximos $y = (\sqrt{3} - 1)/2$ e $y = -(\sqrt{3}+1)/2$ y los mínimos $y = (\sqrt{3}+1)/2$ e $y = -(\sqrt{3}-1)/2$ con $x = \pm 1/\sqrt{2}$. 7) Caracol de Pascal: $r = 2\cos\varphi \pm 1$, el eje de abscisas es el de simetría; (0; 0) es el punto múltiple; (3; 0), (1; 0), (0; ± 1) son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas, los máximos $x = 3$ y $x = 1$ con $y = 0$; los mínimos $x = -1/8$ con $y = \pm\sqrt{15}/8 \approx \pm 0{,}48$; el máximo $y \approx 1{,}76$ y el mínimo $y \approx -1{,}76$ con $x = (15 + \sqrt{33})/16 \approx 1{,}3$, el máximo $y \approx 0{,}37$ y el mínimo $y \approx -0{,}37$ con $x = (15 - \sqrt{33})/16 \approx 0{,}58$. 8) Caracol de Pascal: $r = 2 + \cos\varphi$, $r = 0$; el eje de abscisas es el de simetría; (0; 0) es el punto aislado; el máximo $x = 3$ y el mínimo $x = -1$ con $y = 0$; el máximo $y \approx 2{,}2$ y el mínimo $y \approx -2{,}2$ con $x = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}87$.

21.30. 1) El eje de ordenadas es el de simetría; (0; 0) es el punto múltiple; (0; 6) es el punto de intersección con el eje de ordenadas; el máximo $y = 6$ con $x = 0$, los mínimos $y = -2$ con $x = \pm 2\sqrt{2}$; hay dos máximos y dos mínimos x. 2) Cuadripétalo; los ejes de coordenadas y las rectas $y = \pm x$ son los ejes de simetría; (0; 0) es el punto múltiple; los máximos $x = 2$ y los mínimos $x = -2$ con $y = \pm\sqrt{2}$; los máximos $y = 2$ y los mínimos $y = -2$ con $x = \pm\sqrt{2}$; (0; 0) es el punto de inflexión. 3) El eje de ordenadas es el de simetría; (0; 0) es el punto múltiple; el máximo $x = \sqrt{2/3}$ y el mínimo $x = -\sqrt{2/3}$ con $y = 16/9$; los máximos $y = 2$ con $x = \pm 2$. 4) La asíntota $y = 1 - x$; (0; 0) es el punto de retroceso; (4; 0) es el punto de intersección con el eje de abscisas; el máximo $x = 27/8$ con $y = -9/8$; el punto de inflexión (27/4; 9/4). 5) Kappa; los ejes de coordenadas son los de simetría; las asíntotas $y = \pm 2$; (0; 0) es el punto múltiple y de inflexión. 6) La recta $y = x$ es el eje de simetría; la asíntota $y = (2 - 3x)/3$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas (1; 0), (0; 1); (0; 0) es el punto aislado; el máximo $x \approx 1{,}1$ con $y = 2/3$, el mínimo $x = 1$ con $y = 0$; el máximo $y \approx 1{,}1$ con $x = 2/3$, el mínimo $y = 1$ con $x = 0$; los puntos de inflexión $(2(3 \mp \sqrt{3})/9;\ 2(3 \pm \sqrt{3})/9)$. 7) La recta $y = -x$ es el eje de simetría; (0; 0) es el punto de intersección con los ejes de coordenadas; el mínimo $x = 3\sqrt[3]{2}/2$ con $y = -3\sqrt[3]{4}/2$; el máximo $y = -3\sqrt[3]{2}/2$ con $x = 3\sqrt[3]{4}/2$; los puntos de inflexión $(3\sqrt[3]{(3 \mp \sqrt{5})/2};\ -3\sqrt[3]{(3 \pm \sqrt{5})/2})$, (aproximadamente) (2,18; −4,13), (4,13; −2,18). 8) La recta $y = x$ es el eje de simetría; las asíntotas $y = 1$, $y = x$, $x = 1$; el punto múltiple $(e;\ e)$.

21.31. 1) Rosácea de cuatro pétalas; los ejes de coordenadas y las rectas $y = \pm x$ son los ejes de simetría; el punto múltiple (0; 0); los máximos $r = 1$

con $\varphi = \pi(1+2k)/4$, $k = 0, 1, 2, 3$; con $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ el máximo $x = 4\sqrt{3}/9$ con $y = 2\sqrt{6}/9$ ($\varphi = \arccos\sqrt{2/3}$); el máximo $y = 4\sqrt{3}/9$ con $x = 2\sqrt{6}/9$ ($\varphi = \arcsen\sqrt{2/3}$). 2) Rosácea de tres pétalas; las rectas $y = 0$, $y = \pm\sqrt{3}x$ son los ejes de simetría; (0; 0) es el punto múltiple; los máximos $r = 1$ con $\varphi = 0$, $\pm 2\pi/3$; el máximo $x = 1$ con $y = 0$ ($\varphi = 0$), los mínimos $x = -9/16$ con $y = \pm 3\sqrt{15}/16 \approx \pm 0{,}73$ ($\varphi = \pm\arccos(-\sqrt{6}/4)$); el máximo $y \approx 0{,}185$ y el mínimo $y \approx -0{,}185$ con $x \approx 0{,}63$, el máximo $y \approx 0{,}88$ y el mínimo $y \approx -0{,}88$ con $x = -0{,}44$. 3) (0; 0) es el centro de simetría, el punto múltiple y el punto de inflexión; las asíntotas $y = \pm x - 1/\sqrt{2}$ con $x \to +\infty$ e $y = \pm x + 1/\sqrt{2}$ con $x \to -\infty$. 4) Las rectas $x = 0$ e $y = \pm x\sqrt{3}$ son los ejes de simetría; las asíntotas $y = 0$, $y = \pm x\sqrt{3}$; los mínimos $r = 1$ con $\varphi = \pi(1+4k)/6$, $k = 0, 1, 2$; el mínimo $x \approx 0{,}83$ y el máximo $x \approx -0{,}83$ con $y \approx 0{,}68$; el máximo $y \approx -1$ con $x = 0$. 5) La curva del problema **21.29.** 8) sin el punto aislado (0; 0). 6) Cardioide; el eje de abscisas es el de simetría; (0; 0) es el punto de retroceso; (2; 0), (0; $\pm$ 1) son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas; el máximo $x = 2$ con $y = 0$, los mínimos $x = -1/4$ con $y = \pm\sqrt{3}/4$ ($\varphi = \pm 2\pi/3$); el máximo $y = 3\sqrt{3}/4$ y el mínimo $y = -3\sqrt{3}/4$ con $x = 3/4$ ($\varphi = \pm\pi/3$). 7) Parte de la curva del problema **21.29.** 7). 8) La curva es simétrica a la curva 7) respecto al eje de ordenadas. 9) El eje de abscisas es el de simetría; la asíntota $x = 2$; el mínimo $x = 1$ con $y = 0$ ($\varphi = 0$). 10) (0; 0) es el centro de simetría; las asíntotas $x = \pm 1$; los puntos de intersección con los ejes de coordenadas ($\pm$ 1; 0), (0; 0); el máximo $x = \sqrt{2}$ con $y = \sqrt{2}$, el mínimo $x = -\sqrt{2}$ con $y = -\sqrt{2}$; el máximo $y \approx 0{,}23$ con $x \approx -0{,}5$; el mínimo $y \approx -0{,}23$ con $x \approx 0{,}5$; los puntos de inflexión (0; 0) y (aproximadamente) ($\pm$ 1,35; $\pm$ 2,58).

§ 22. Problemas para hallar los valores máximo y mínimo absolutos

22.1. 1) Cuadrado con lado $\sqrt{S}$. 2) Cuadrado con lado $\sqrt{S}$. **22.2.** $2R^2$. **22.3.** (2; 1), (2; -1). **22.4.** (1; 1). **22.5.** 2. **22.6.** -2. **22.7.** $\sqrt{s/\operatorname{sen}\alpha}$. **22.8.** $2x + 4y = 5$. **22.9.** $\pi/3$ y $\pi/6$. **22.10.** $a/\sqrt{2}$. **22.11.** $(\pi-\alpha)/2$, $(\pi-\alpha)/2$. **22.12.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **22.13.** $R^2\sqrt{27}/4$. **22.14.** $p/(\pi+4)$. **22.15.** $(a/\sqrt{2};\ b/\sqrt{2})$. **22.16.** $(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2})/6$. **22.17.** $\pi/3$. **22.18.** $2R/\sqrt{3}$. **22.19.** La distancia desde el centro del círculo hasta el lado del rectángulo, paralelo a la recta l, es igual a $(h + \sqrt{8R^2 + h^2})/4$. **22.20.** $\pi a^3/216$. **22.21.** $S^{3/2}/(3\sqrt{6\pi})$. **22.22.** 1. **22.23.** La caldera debe tener la forma de una esfera con radio $\sqrt[3]{3v/(4\pi)}$. **22.24.** 1/2. **22.25.** $\pi(\sqrt{5}+1)R^2$. **22.26.** Altura del cilindro $a/\sqrt{3}$, radio de su base $a/\sqrt{6}$. **22.27.** $4R/3$. **22.28.** $4R$. **22.29.** Radio de su base $2R/3$, altura $H/3$. **22.30.** $2\pi\sqrt{2/3}$. **22.31.** $3^{7/6}(\pi v^2/2)^{1/3}$. **22.32.** $2\pi l^3\sqrt{3}/27$. **22.33.** $\pi r^3\sqrt{3}/2$. **22.34.** $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$. **22.35.** $\pi/4$. **22.36.** r. **22.37.** Ángulo de inclinación del macho al horizonte $\arccos((l + \sqrt{l^2 + 128R^2})/16R)$. **22.38.** $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$. **22.40.** $\sqrt{2}$. **22.41.** $h/2$. **22.42.** $BD = b - \frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$, si $b > a/\sqrt{k^2-1}$; $BD = 0$, si $b \leqslant a/\sqrt{k^2-1}$. **22.43.** $R/\sqrt{2}$. **22.44.** $r_1^2/r_2^2 = R_1^3/R_2^3$, donde r_1 y r_2 — distancia del punto luminoso hasta el centro de las esferas con radios R_1 y R_2 respectivamente. **22.45.** $\operatorname{arctg} k$. **22.46.** $\sqrt{ab}$.

§ 23. Resolución numérica de ecuaciones

23.1. 1) $(-3; -2.5)$*), $(0,5; 1)$, $(2; 2,5)$. 2) $(-0,5; 0)$, $(1; 1,5)$. 3) $(-2, -1,5)$. 4) $x_1 = -1,5$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 1$. 5) $x = 1,5$. 6) $(2,5; 3)$. 7) $(1; 1,5)$. 8) $(-1,5; -1)$, $(2,5; 3)$. **23.2.** 1) $(-0,6; -0,5)$. 2) $(1,2; 1,3)$. 3) $(-0,6; -0,5)$. 4) $(1,9; 2)$. 5) $(0,8; 0,9)$. 6) $(-0,9; -0,8)$, $(0,8; 0,9)$. 7) $(0,5; 0,6)$, $(2,2; 2,3)$. 8) $(2,5; 2,6)$. **23.13.** $(-0,5; 0)$, $(1; 1,5)$, $(2,5; 3)$. **23.16.** 1) $(2,3; 2,4)$, 2) $(-1,1; -1)$, $(0,9; 1)$. **23.21.** 1) $[0,5; 3,7]$. 2) $[0,74; 22]$. **23.22.** $[-11/3; -1/9]$, $[0,27; 2,64]$; $(1; 1,5)$. **23.23.** $(0,4; 0,5)$. **23.24.** 2) $4b^3 + 27c^2 + 4a^3c - a^2b^2 - 18abc \leqslant 0$. **23.25.** $p^6 \geqslant q^2$. **23.26.** $4q \leqslant p^2$ con $m = 2$, $n = 1$; $0 < 27q^2 \leqslant -4p^3$ con $m = 3$, $n = 1$; $-4p^3 \leqslant 27q < 0$ ó bien $0 < 27q \leqslant -4p^3$ con $m = 3$, $n = 2$; $p < 0$ y $0 < 4q \leqslant p^2$ con $m = 4$, $n = 2$; con el resto de m y n y cualesquiera p y q la ecuación tendrá al menos una raíz compleja. **23.28.** 1) Dos raíces. 2) Una raíz con $a < 1$, tres raíces con $a > 1$, dos raíces de las cuales una de ellas es doble, con $a = 1$. **23.29.** 1) $a < -175$; $a > 188/27$. 2) $a = 7,5$, $a = 104/9$. 3) $a < 16$, $a \neq 0$. 4) $0 < a < 23/16$. **23.30.** $(0; 0,2)$. **23.31.** 1) Una raíz con $a \leqslant 0$, dos raíces con $0 < a < 1/e$, una raíz doble con $a = 1/e$, no hay raíces con $a > 1/e$. 2) No hay raíces con $a < -1/e$, una raíz doble con $a = -1/e$, dos raíces con $-1/e < a < 0$, una raíz con $a \geqslant 0$. 3) No hay raíces con $a \leqslant 0$, una raíz con $0 < a < e^2/4$, una raíz simple y una doble con $a = e^2/4$, tres raíces con $a > e^2/4$. 4) No hay raíces con $|a| < \operatorname{sh} x_0 \approx 1,5$, una raíz doble con $|a| = \operatorname{sh} x_0$, dos raíces con $|a| > \operatorname{sh} x_0$, donde x_0 es la raíz positiva de la ecuación $\operatorname{cth} x = x$. 5) No hay raíces con $|a| > 3\sqrt{3}/16$, una raíz doble con $|a| = 3\sqrt{3}/16$, dos raíces con $0 < |a| < 3\sqrt{3}/16$, tres raíces, de las cuales una es triple, con $a = 0$. **23.32.** 1) $a > 1$. 2) $a = -(3 + \ln 16)/4$. 3) $a > 2e$. 4) $|a| < 3\pi/2 - 1$. **23.33.** 2) No hay raíces con $b > e^{-1-a}$, una raíz doble con $b = e^{-1-a}$, dos raíces con $0 < b < e^{-1-a}$, una raíz con $b \leqslant 0$.

23.34. 2) La frontera de los recintos en el plano $(a; b)$ son la recta $b = 0$ y la curva $a = e^x(3 - x)/3$, $b = e^x/3x^2$, prefijada de forma paramétrica. **23.36.** Si n es un número par, entonces: una raíz con $a > (n/e)^n$, dos raíces, de las cuales una doble, con $a = (n/e)^n$, tres raíces con $0 < a < (n/e)^n$, una raíz n-ésima con $a = 0$, no hay raíces con $a < 0$; si n es un número impar, entonces no hay raíces con $a > (n/e)^n$, una raíz doble con $a = (n/e)^n$, dos raíces con $0 < a < (n/e)^n$, una raíz n-ésima con $a = 0$, una raíz con $a < 0$. **23.27.** 1) $(1; 2)$. 2) $(-5; -4)$, $(-1; 0)$; $(5; 6)$. 3) $(4; 5)$. 4) $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(3; 4)$. 5) $(2; 3)$, $(3; 4)$. 6) $(-7; -6)$, $(-1; 0)$. 7) $(-4; -3)$, $(-1; -0,5)$, $(-0,5; 0)$, $(0; 1)$, $(3; 4)$. 8) $(-2; -1)$. $(0; 0,5)$, $(0,5; 1)$. 9) $(-2; -1)$. 10) $(-3; -2)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$. **23.38.** $(-a^2, -b^2)$, $(-b^2; -c^2)$, $(-c^2; +\infty)$. **23.39.** 1) $(-1; -0,9)$, $(0,9; 1)$. 2) $(-3,6; -3,5)$, $(-2,2; -2,1)$, $(1,2; 1,3)$. 3) $(-0,9; -0,8)$, $(0,6; 0,7)$. 4) $(-0,8; -0,7)$. 5) $(-0,5; -0,4)$. **23.40.** 1) $x_1 = -1,86$, $x_2 = 1,70$. 2) $x_1 = -3,06$, $x_2 = -0,69$, $x_3 = 3,76$. 3) $x = 3,63$. 4) $x_1 = -0,435$, $x_2 = 0,381$. 5) $x_1 = -0,867$, $x_2 = 1,867$. 6) $x_1 = 0,27$, $x_2 = 2,25$. 7) $x = 0,21$. 8) $x = 1,088$. 9) $x_1 = 0,776$, $x_2 = 2,223$. 10) $x = 0,567$. **23.41.** 652,7 mm. **23.42.** $(-1,10; -0,48)$, $(1,71; 1,39)$. **23.44.** 1) $x_1 \in (3; 3,1)$, $x_2 \in (4,7; 4,8)$. 2) $x_1 = 3,028$. 3) $x_2 = 4,728$. **23.45.** 1) $x = 9,9667$. 2) $x = -0,88677$. 3) $x = -0,19994$. 4) $x = 0,091$. 5) $x = 0,15495$. 6) $x = -0,5283$. 7) $x = 2,0945514815$. 8) $x = 0,4816$. 9) $x = 1,172$. **23.46.** 1) $a \leqslant e^{1/e}$. 2) $e^{-e} < a < e^{1/e}$. **23.47.** 1) 3,4368. 2) $x_1 = 4,7300$; $x_2 = 7,8532$. **23.48.** $x' = 0,5896$, $x_{n+1} = e^{0,8x_n - 1}$; $x'' = 2,2805$, $x_{n+1} = 1,25\ (1 + \ln x_n)$. **23.49.** 1) $x_1 = -2,214$, $x_2 = 0,539$, $x_3 = 1,675$. 2) $x_1 = -1,221$, $x_2 = 0,724$. 3) 2,259. 4) $x = -2,087$. 5) $x_1 = -x_2 = -0,824$. 6) $x_1 = -2,33006$, $x_2 = 0,20164$, $x_3 = 2,12842$. **23.50.** 1) $x = \pm 3,60555127$. 2) $x_1 = -2,666667$, $x_2 = 0,292893$, $x_3 = 1,707107$. 3) 0,84375. **23.51.** 1) $x = 1,76926$. 2) $x = 1,21341$.

*) Aquí y en adelante se indica uno de los posibles intervalos de aislamiento de la raíz.

3) $x_1 = -0{,}951$, $x_2 = 1{,}756$, $x_3 = 2{,}694$. 4) $x_1 = 0{,}472$, $x_2 = 9{,}999$. 5) $x = 0{,}739087$. 6) $x = 2{,}5062$. 7) $x = -0{,}56715$. 8) $x = \pm 1{,}199678$. 9) $x = 4{,}49341$. 10) $x_1 = 2{,}081$, $x_2 = 5{,}940$. **23.52.** $x = -10{,}261$. **23.53.** $z = \pm i0{,}9320$. **23.54.** 1) $x = 0{,}675$. 2) $x = 0{,}6705$. 3) $x = 0{,}6705$. **23.55.** Converge hacia sign x_0 si $|x_0| > 1/\sqrt{3}$; converge hacia 0 si $|x_0| < 1/\sqrt{5}$; no converge con $|x_0| = 1/\sqrt{5}$; con $|x_0| = 1/\sqrt{3}$ la sucesión no está definida; con $1/\sqrt{5} < |x_0| < 1/\sqrt{3}$, si la sucesión está definida, ella converge bien hacia $+1$, o bien hacia -1. **23.58.** $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$. **23.61.** $|\xi - x_2| < 10^{-7}$. **23.62.** 1) $x = 0{,}325$. 2), 3), 4) $x = 0{,}3295$. **23.63.** $x = 1{,}0448$. **23.64.** $x_1 = -10{,}2610$, $x_2 = 9{,}8860$. **23.65.** $x = 0{,}740841$. **23.66.** 1) $x = 0{,}78669$. 2) $x = 1{,}755581$.

§ 24. Función vectorial. Curvas

24.6. 1) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. 2) $-\mathbf{i} - \mathbf{j}/\pi = \mathbf{k}$. **24.11.** 1) $\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$; $x - t_0 = (y - t_0^2)/(2t_0) = (z - t_0^3)/(3t_0^2)$. 2) $\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $(x - \operatorname{sen} t_0)/\cos t_0 = -(y - \cos t_0)/\operatorname{sen} t_0$, $z + 1 = 0$. 3) $\omega \operatorname{sen} 2\omega t\,(a\mathbf{i} - b\mathbf{j}) + \mathbf{k}$;

$$\frac{x - a\operatorname{sen}^2 \omega t_0}{a\omega \operatorname{sen} 2\omega t_0} = -\frac{y - b\cos^2 \omega t_0}{b\omega \operatorname{sen} 2\omega t_0} = z - t_0.$$

24.12. 1) $2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. 2) $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\sqrt{\mathbf{r}^2}$. 3) $[[\mathbf{r}, \mathbf{r}''], \mathbf{r}''] + [[\mathbf{r}, \mathbf{r}'], \mathbf{r}''']$. 4) $(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''')$. **24.23.** 1) $(\mathbf{r}')^2 [\mathbf{r}', \mathbf{a}]^2$. 2) $-(\mathbf{r}', \mathbf{a}\,([\mathbf{r}', \mathbf{a}])^2$.

24.29. 1) $$\cos\alpha = \frac{(\sqrt{\rho^2 + z^2})'}{\sqrt{(\rho')^2 + (\rho\varphi')^2 + (z')^2}} = \frac{\rho\rho' + zz'}{\sqrt{\rho^2 + z^2}\sqrt{(\rho')^2 + (\rho\varphi')^2 + (z')^2}}.$$

2) $|\mathbf{r}''| = \sqrt{\rho_0^2[(\varphi')^4 + (\varphi'')^2] + (z'')^2}$.

24.30. $|\mathbf{r}'| = \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2[(\theta')^2 + (\varphi'\cos\theta)^2]}$. **24.35.** $x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$. **24.36.** 1) $x = ae^{k\varphi}\cos\varphi$, $y = ae^{k\varphi}\operatorname{sen}\varphi$, $z = be^{k\varphi}$. 2) $x = at\cos t$, $y = at\operatorname{sen} t$, $z = bt$. **24.41.** (a_{ij}) — matriz degenerada. **24.43.** $\rho = e^{\varphi}$ $(t = \varphi)$. **24.46.** 1) $(x - e)/e = (y - e^{-1})/(-e^{-1}) = (z - 1)/2$. 2) $x = y + 1 = z$. **24.47.** $x + a(4 - \pi)/2 = y = z/\sqrt{2} - a$; $\varphi = \pi/4$. **24.48.** Si $t_0 \neq 0$, entonces $(x - t_0^4)/(4t_0^3) = (y - t_0^3)/(3t_0) = (z - t_0^2)/2$, $4t_0^2(x - t_0^4) + 3t_0 + (y - t_0^3) + 2(z - t_0^2) = 0$, y si $t_0 = 0$, entonces $x = y = 0$ — recta tangente, $z = 0$ — plano normal.

24.49. $x + (-1)^m z\sqrt{2} = (0{,}5 + (-1)^n)R$, $2y - (-1)^n R = 0$, $m, n = 0{,}1$.

24.50. $(-2; 12; 14)$, $(-2; 3; -4)$. **24.51.** $8(x + y + z) - 5 = 0$.

24.52. $x + 3y = 10$, $3y + 4z = 25$. **24.53.** $\cos\alpha = \sqrt{a}/c$, $\cos\beta = \sqrt{b}/c$, $\cos\gamma = \sqrt{2z}/c$, $c = \sqrt{a + b + 2z}$. **24.54.** $(p + q)/\sqrt{2}$. **24.59.** $(x - 1)/1 = (y - 1)/2 = (z - 1)/3$, $x + 2y + 3z - 6 = 0$, parábola $y = 3x^2/4$. **24.60.** $x/x_0 - y/y_0 + z/z_0 = 1$, $x_0y_0z_0 \neq 0$.

24.71. 1) $\operatorname{ch}(x/a)$. 2) $\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}$. 3) $\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t}$.

4) $3a|\operatorname{sen} 2t|/2$. 5) $2a|\cos(t/2)|$. 6) $\sqrt{a^2 + b^2}$. 7) $R\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}$.

24.73. 1) $a\sqrt{1 + \varphi^2}$. 2) $a\sqrt{1 + \varphi^2}/\varphi^2$. 3) $ae^{b\varphi}\sqrt{1 + b^2}$.

24.76. 1) $k = R^{-1} = 2|a|/(1 + 4a^2x^2)^{3/2}$. 2) $k = R^{-1} = 6|x|/(1 + 9x^4)^{3/2}$.

3) $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}$. 4) $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x/a)}$. 5) $k = \dfrac{1}{R} = |\cos(x/a)|/a$.

24.77. 1) $k=\dfrac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}=\dfrac{ab}{(\varepsilon^2x^2-a^2)^{3/2}}$, $\xi=x^3c^2/a^4$, $\eta=-y^3c^2/b^4$, donde $c^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=c/a$ — excentricidad. 2) $k=\sqrt{\dfrac{3a^2}{x(2a+3x)^3}}$, $\xi=-x(a+3x)/a$, $\eta=2y(a+2x)/x$. 3) $k=1/3\sqrt[3]{a|xy|}$, $\xi=x^{1/3}(3a^{2/3}-2x^{2/3})$, $\eta=y^{1/3}(a^{2/3}+2x^{2/3})$.
4) $k=|x+2a|(a-x)^2/a(2a^2-x^2)^{3/2}$, $\xi=a(x^3-2a^3)/(x+2a)(a-x)^2$, $\eta=2ay(x+a)/x(x+2a)$.

24.78. 1) $ab/(a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}$.
2) $ab/(a^2\operatorname{sh}^2 t+b^2\operatorname{ch}^2 t)^{3/2}$.
3) $1/(4a|\operatorname{sen}(t/2)|)$.

24.79. 1) $\xi=-(9t^2+2)t^2/2$, $\eta=4(3t^2+1)t/3$. 2) $\xi=\dfrac{a^2+b^2}{a}\operatorname{ch}^3 t$, $\eta=-\dfrac{a^2+b^2}{b}\operatorname{sh}^3 t$. 3) $\xi=\pi a+a(t-\operatorname{sen} t)$, $\eta=-2a+a(1-\cos t)$. 4) $x^2+y^2=a^2$.

24.80. p. **24.81.** 1) $2/(3\sqrt{3})$. 2) $2/a$, $a>0$. 3) $1/a$, $a>0$.

24.86. 1) $a^2/3\rho$. 2) $\dfrac{4}{3}a\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|$.
3) $a\cos^2\varphi\,(1+8\operatorname{sen}^2\varphi)^{3/2}/(4+8\operatorname{sen}^2\varphi)$. 4) $a(1+\varphi^2)^{3/2}/(2+\varphi^2)$.
5) $a(\varphi^2+1)^{3/2}/\varphi^4$. 6) $\rho\sqrt{1+b^2}$.

24.88. 1) $y=a\operatorname{ch}(x/a)$. 2) Con ese mismo polo y con el giro correspondiente del eje: $\rho=\lambda e^{a\varphi_1}$, $\varphi_1=\varphi+\pi/2$. 3) Cardioide. **24.92.** $\ln a=a^{\pi/2}$. **24.105.** $y=\sqrt{2}(x-1+\sqrt{1-x})$. **24.106.** $y=-x^2/2+\pi x/2+1-\pi^2/8$.

24.108. 1) $8a$. 2) $3a/2$. 3) $8a$. **24.109.** 1) $x\operatorname{sen} t_0-y\cos t_0+\dfrac{a}{b}z-at_0=0$; $x\operatorname{sen} t_0-y\cos t_0-\dfrac{b}{a}z+\dfrac{b^2}{a}t_0=0$; $x\cos t_0+y\operatorname{sen} t_0-a=0$.
2) $3t_0^2x-3t_0y+z-t_0=0$; $x+2t_0y+3t_0^2z-t_0(1+2t_0^2+3t_0^4)=0$; $t_0(9t_0^2+2)x+(9t_0^4-1)y-3t_0(2t_0^2+1)z-t_0^2(1+6t_0^2+3t_0^4)=0$.
3) $e^{-t_0}x-e^{t_0}y-\sqrt{2}z+2t_0=0$; $e^{t_0}x-e^{-t_0}y+\sqrt{2}z+2(t_0+\operatorname{sh}2t_0)=0$; $x+y-\sqrt{2}\operatorname{sh}t_0 z+2(t_0\operatorname{sh}t_0-\operatorname{ch}t_0)=0$. 4) $(\operatorname{sen}t_0-\cos t_0)x-(\operatorname{sen}t_0+\cos t_0)y+2z-e^{t_0}=0$; $(\cos t_0-\operatorname{sen}t_0)x+(\cos t_0+\operatorname{sen}t_0)y+z-2e^{t_0}=0$; $(\operatorname{sen}t_0+\cos t_0)x+(\operatorname{sen}t_0-\cos t_0)y-e^{t_0}=0$. 5) $6y_0^2(x-x_0)-8y_0^3(y-y_0)-(z-z_0)=0$; $2y_0(x-x_0)+(y-y_0)+4y_0^3(z-z_0)=0$; $(1-32y_0^6)(x-x_0)-2y_0(12y_0^4+1)(y-y_0)+2y_0^2(8y_0^2+3)(z-z_0)=0$. 6) $ay-z+b=0$, $x+\varphi'(x_0)y+a\varphi'(x_0)z=x_0+(a^2+1)\varphi(x_0)\varphi'(x_0)+ab\varphi'(x_0)$, $(a^2+1)\varphi'(x_0)x-y-az=(a^2+1)\varphi'(x_0)x_0-(a^2+1)\varphi(x_0)-ab$.

24.110. 1) $xy_0-x_0y=0$, $z=z_0$; $x_0x+y_0y=a^2$, $a^2(x-x_0)=by_0(z-z_0)$.
2) $\dfrac{x-x_0}{1-32y_0^6}=-\dfrac{y-y_0}{2y_0(12y_0^4+1)}=\dfrac{z-z_0}{2y_0(8y_0^2+3)}$; $\dfrac{x-x_0}{6y_0^2}=-\dfrac{y-y_0}{8y_0^3}=-(z-z_0)$. 3) $\dfrac{x-x_0}{t_0^3+2t_0}=\dfrac{y-y_0}{1-t_0^4}=-\dfrac{z-z_0}{t_0(2t_0^2+1)}$; $x-x_0=-\dfrac{y-y_0}{2t_0}=\dfrac{z-z_0}{t_0^3}$.

24.113. Hélice: $x=(a+l)\cos t$, $y=(a+l)\operatorname{sen} t$, $z=bt$. **24.115.** $bx-ay+abz=2ab$. **24.116.** $4x-y+z-9=0$.

24.118. $\boldsymbol{\tau}=(\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{\nu}=(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{6}$, $\boldsymbol{\beta}=(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})/\sqrt{3}$.

24.119. 1) $\boldsymbol{\tau}=(3\cos t\,\mathbf{i}-3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}+4\mathbf{k})/5$, $\boldsymbol{\nu}=\operatorname{sen} t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{1}{5}$

$\times (4\cos t\mathbf{i} - 4\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$. 2) $\boldsymbol{\tau} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\,\mathbf{i} + \cos\frac{t}{2}\,\mathbf{j} - \mathbf{k}\right)$, $\boldsymbol{\nu} = \cos\frac{t}{2}\,\mathbf{i} - \mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\,\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\beta} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\,\mathbf{i} + \cos\frac{t}{2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$.

24.121. $2/(1 + a^2)$. **24.122.** 1) $a\,[a^2 + b^2\,\mathrm{ch}\,2t]^{1/2}/[a^2\mathrm{ch}\,2t + b^2]^{3/2}$. 2) $|\,\mathrm{sen}\,2t\,|/\sqrt{2}$. 3) $0{,}25\sqrt{1 + \mathrm{sen}^2\,(t/2)}$. 4) $\sqrt{2}/(x + y)^2$. 5) $\mathrm{sh}\,t/(a\sqrt{2}\,\mathrm{ch}^3\,t)$. 6) $2/(a\,\mathrm{ch}\,t)$. 7) $(a + b)^{1/2}/(a + b + 2z)^{3/2}$.

24.123. 1) $e^t/3$. 2) $1/(a\,\mathrm{ch}^2 t)$. 3) $-1/2y/(64y^6 + 36y^4 + 1)$.

24.124. 1) $k = \varkappa = a/(a + y)^2$. 2) $k = \varkappa = 1/(2a\,\mathrm{ch}^3\,t)$. 3) $k = -\varkappa = 2abt/(a^2 + b^2t^2)^2$. 4) $k = \varkappa = 1/(3\,(t^2 + 1)^2)$. 5) $k = \sqrt{5 + 3\,\mathrm{sen}^2 t}/(R\,(1 + \mathrm{sen}^2 t)^{3/2})$, no hay puntos rectificables: $\varkappa = 6\,\mathrm{sen}\,t/(R\,(5 + 3\,\mathrm{sen}^2 t))$, los puntos aplanables $(0;\ 0;\ \pm R)$.

24.125. 1) Los puntos rectificables $x = n\pi$; los puntos aplanables $x = \pi/2 + n\pi$. 2) No hay puntos rectificables; los puntos aplanables $t = \pm 1$. **24.132.** Una hélice. **24.134.** El paso de la hélice es igual a la longitud de la circunferencia del cilindro. **24.139.** El centro yace en la binormal a la distancia $\left|\frac{1}{\varkappa}\frac{dR}{ds}\right|$, donde R es el radio de curvatura.